Principi del massimo e del confronto per funzioni convesse sul gruppo di Heisenberg

Annamaria Montanari

11 marzo 2003

Risultati ottenuti in collaborazione con Cristian E. Gutiérrez

1 Introduzione

In questo seminario presento alcuni principi del massimo e del confronto per una classe di funzioni convesse sul gruppo di Heisenberg. Lo scopo di questi risultati è di stabilire delle stime puntuali per questa classe di funzioni, analoghe a quelle di Aleksandrov per le funzioni convesse in senso classico.

Negli anni '60 Aleksandrov dimostrò la seguente stima integrale per le funzioni convesse, in termini dell'operatore di Monge–Ampère $\det D^2 u$.

Teorema 1.1 (Principio del massimo di Aleksandrov). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto convesso e limitato e se $u \in C(\bar{\Omega})$ è convessa, $u = 0$ sul $\partial\Omega$, allora*

$$|u(y)|^n \le C_n \, diam(\Omega)^{n-1} \, dist(y, \partial\Omega) \int_\Omega \det D^2 u(x) \, dx,$$

per ogni $y \in \Omega$, dove C_n è una costante che dipende solo dalla dimensione n.

Questa stima è di notevole importanza nella teoria delle soluzioni deboli dell'equazione di Monge–Ampère e più in generale gioca un ruolo centrale nella teoria delle equazioni uniformemente ellittiche in forma di non divergenza per via della disuguaglianza elementare

$$\det A \det B \le \left(\frac{\text{traccia}\, AB}{n} \right)^n$$

per A, B matrici simmetriche semidefinite positive (si veda ad esempio [3]). In particolare se si sceglie come A la matrice Hessiana di u, che indicheremo con $D^2 u$, per ogni matrice B

simmetrica e definita positiva, si ottiene dalla precedente

$$\det D^2 u \le \frac{1}{\det B}\Big(\frac{\operatorname{traccia} BD^2 u}{n}\Big)^n$$

sul sottoinsieme Γ di Ω dove il grafico di u sta sopra ad un iperpiano di supporto, cioè

$$\Gamma = \{y \in \Omega :\ u(x) \ge u(y) + p(x-y)\ \forall\, x \in \Omega \text{ per qualche}\, p \in \mathbb{R}^n\}$$

La prova della stima di Aleksandrov (che si può trovare ad esempio in [4, Theorem 1.4.2] o in [3, Lemma 9.2]) ruota attorno ad alcune considerazioni geometriche sulla nozione di mappa normale o subdifferenziale in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che se u è un'arbitraria funzione continua in Ω si definisce la mappa normale in un punto $y \in \Omega$ come

$$\partial u(y) = \{p \in \mathbb{R}^n : u(x) \ge u(y) + p\cdot(x-y) \quad \forall x \in \Omega\}.$$

In particolare, da argomenti geometrici, si vede facilmente che se $u = v$ sul $\partial\Omega$, $v \ge u$ in Ω allora $\partial v(\Omega) \subseteq \partial u(\Omega)$ [4, Lemma 1.4.1]. Da questo segue un principio del confronto [4, Theorem 1.4.6] per misure di Monge-Ampère $Mu(E) = \operatorname{mis}(\partial u(E))$ dove, se $u \in C^2(\Omega)$, $Mu(E) = \int_\Omega \det D^2 u\, dx$ per ogni insieme di Borel $E \subset \Omega$.

Se poi si sceglie come v la funzione che ha per grafico il cono suuperiore con vertice $(y, u(y))$ e base $\Omega \times \{0\}$, si ha $v \ge u$ in Ω perchè u è convessa, e per il principio del confronto

$$C_n \left(\frac{-u(y)}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^{n-1} |p| \le \operatorname{mis}(\partial v(\Omega)) \le \operatorname{mis}(\partial u(\Omega))$$

con $|p| = \frac{-u(y)}{\operatorname{dist}(y,\partial\Omega)}$. Da questo si ottiene immediatamente la stima di Aleksandrov.

Sul gruppo di Heisenberg, e più in generale su gruppi di Carnot, sono state introdotte diverse definizioni di convessità in [2] e in [7]. La nozione di funzione $\mathcal{H}$–convessa che noi utilizziamo è data nella Definizione 3.2, e la domanda che si pone in maniera naturale è se in questo contesto valgono principi del confronto e del massimo analoghi a quelli sopra descritti. La motivazione di questo studio è che queste stime sarebbero utili nello sviluppo di una teoria delle soluzioni deboli di equazioni in forma di non divergenza del tipo $a_{ij} X_i X_j$ dove a_{ij} è una matrice uniformemente ellittica e misurabile e X_i sono i campi vettoriali di Heisenberg. Il passo successivo sarebbe poi quello di estendere questa teoria a campi non lineari di tipo Levi, e quindi allo studio delle soluzioni deboli dell'equazione di Levi Monge-Ampère introdotta in [6].

La difficoltà che subito si incontra in questo programma è la dubbia esistenza di una nozione di mappa normale in $\mathbb{H}^n$, utile per stabilire principi del massimo e del confronto.

In un recente lavoro con Cristian E. Gutiérrez [5] affrontiamo questo problema seguendo una strada diversa da quella sopra descritta per le funzioni convesse e senza usare una nozione di mappa normale. Questo tipo di approccio è stato recentemente usato anche da Trudinger e Wang per lo studio di equazioni Hessiane [9] e si basa sul fatto che l'operatore di Monge Ampère si può scrivere in forma di divergenza. Precisamente

$$\det D^2 u = \frac{1}{n} \operatorname{div}\left((D^2 u)^* Du\right),$$

dove abbiamo indicato con $(D^2u)^*$ la matrice dei cofattori di D^2u. Nel nostro contesto non vale una formula esatta analoga alla precedente, perchè i campi di Heisenberg non commutano. Vale invece una formula con un resto, che dimostriamo nella Proposizione 4.1. Da questo segue che le nostre stime integrali sono in termini del seguente operatore di tipo Monge–Ampère: $\det \mathcal{H}(u) + 12(u_t)^2$, si veda la Definizione 3.1. Utilizzando allora un metodo di integrazione per parti, inizialmente stabiliamo un principio del confronto per funzioni C^2, Teorema 4.1, poi estendiamo questo principio ad una famiglia di "coni" Teorema 5.2. Questo risultato, insieme alla geometria di $\mathbb{H}^n$, ci consente di dimostrare una stima puntuale analoga a quella di Aleksandrov su una famiglia di palle (si veda la Sezione 2 per la definizione precisa di B_R).

Teorema 1.2. *Sia $u \in C^2(B_R)$ $\mathcal{H}$–convessa, $u = 0$ sul ∂B_R. Se*

$$u(z_0) = \min_{B_R} u,$$

allora esiste una costante positiva c, dipendente da $d(z_0, \partial B_R)$, tale che

$$|u(z_0)|^2 \leq c \int_{B_R} (\det \mathcal{H}(u) + 12\, u_t^2)\, dz.$$

Inoltre, otteniamo anche una stima dal basso dell'oscillazione di funzioni $\mathcal{H}$–convesse, si veda Proposizione 7.1. Questa stima ci permette di estendere l'integrale di $\det \mathcal{H}(u) + 12(u_t)^2$ come misura di Monge–Ampère alle funzioni continue $\mathcal{H}$–convesse e di ottenere per queste un principio del confronto generale, Teorema 7.2 e un principio del massimo Teorema 7.3. Infine, con il Controesempio 7.1 mostriamo che non può valere una stima analoga a quella di Aleksandrov in questo contesto per l'operatore $\det \mathcal{H}u$. In altre parole, non si può trascurare il termine di resto u_t^2.

2 Notazioni

Indichiamo con $u = u(x,y,t)$, con $z = (x,y,t)$ un punto di $\mathbb{R}^3$, e con $X = \partial_x + 2y\,\partial_t$, $Y = \partial_y - 2x\,\partial_t$ i campi di Heisenberg. Allora il commutatore di X e Y è $[X,Y] = XY - YX = -4\partial_t$. Denotiamo con $\mathbb{H}^1$ lo spazio $\mathbb{R}^3$ munito della legge non commutativa di gruppo: se $z_0 = (x_0, y_0, t_0)$ e $z = (x,y,t)$,

$$z_0 \circ z = (x_0 + x, y_0 + y, t_0 + t + 2(xy_0 - yx_0)).$$

Si ha $z^{-1} = -z$, e $(z_0 \circ z)^{-1} = z^{-1} \circ z_0^{-1}$. In $\mathbb{H}^1$ definiamo il "gauge" come la funzione

$$\rho(z) = \left((x^2 + y^2)^2 + t^2\right)^{1/4},$$

e la distanza

$$d(z, z_0) = \rho(z_0^{-1} \circ z).$$

Ricordiamo che per d vale la disuguaglianza triangolare

$$d(z, z_0) \leq d(z, \zeta) + d(\zeta, z_0) \tag{1}$$

per ogni $z, z_0, \zeta \in \mathbb{H}^1$. Dato $\lambda > 0$ consideriamo le dilatazioni

$$\delta_\lambda(z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t).$$

Allora

$$d(\delta_\lambda z, \delta_\lambda z_0) = \lambda\, d(z, z_0).$$

Per ulteriori dettagli su $\mathbb{H}^n$ si veda [8, Capitoli XII e XIII].

Denotiamo con $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^3 : d(z, z_0) < R\}$ la palla di centro z_0 e raggio R rispetto alla distanza d. Per ogni $z_0 = (x_0, y_0, t_0) \in R^3$ definiamo

$$\Pi_{z_0} = \{(x,y,t) : t - t_0 - 2(xy_0 - yx_0) = 0\}$$

il piano generato dai vettori $(1, 0, 2y_0)$, $(0, 1, -2x_0)$ e passante per il punto z_0. Osserviamo che se $h \in \mathbb{H}^1$, allora

$$z \in \Pi_{z_0} \text{ se e solo se } h \circ z \in \Pi_{h \circ z_0}. \tag{2}$$

3 $\mathcal{H}$–convessità

Se $c \in \mathbb{C}$ e $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, definiamo

$$\mathcal{H}_c(u) = \begin{bmatrix} X^2u & XYu + cu_t \\ YXu - cu_t & Y^2u \end{bmatrix}$$

e

$$H_c(u) = \det \begin{bmatrix} X^2u & XYu + cu_t \\ YXu - cu_t & Y^2u \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Con Ω denotiamo un aperto di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 3.1. *La funzione $u \in C^2(\Omega)$ è $\mathcal{H}$–convessa in Ω se la matrice simmetrica*

$$\mathcal{H}(u) = \mathcal{H}_2(u) = \begin{bmatrix} X^2u & (XYu + YXu)/2 \\ (XYu + YXu)/2 & Y^2u \end{bmatrix}$$

è semidefinita positiva in Ω.

Osserviamo che la matrice $\mathcal{H}_c(u)$ è simmetrica se e solo se $c = 2$. Inoltre, se $\langle \mathcal{H}_c(u)\xi, \xi\rangle \geq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^2$ e per qualche c, allora questa forma quadratica è non negativa per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$.

Estendiamo la definizione di $\mathcal{H}$–convessità alle funzioni continue.

Definizione 3.2. *La funzione $u \in C(\Omega)$ è $\mathcal{H}$–convessa in Ω se esiste una successione $u_k \in C^2(\Omega)$ di funzioni $\mathcal{H}$–convesse in Ω tale che $u_k \to u$ uniformemente sui compatti di Ω.*

Definizione 3.3. *$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è $\mathcal{H}$–convesso se per ogni $z_0 \in \Omega$ e $z \in \Pi_{z_0} \cap \Omega$, $z_0 \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z) \in \Omega$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$.*

La seguente proposizione fornisce condizioni equivalenti alla $\mathcal{H}$–convessità.

Proposizione 3.1. *Sia $u \in C(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto e $\mathcal{H}$–convesso. Sono equivalenti:*

1. *u è $\mathcal{H}$–convessa.*
2. *Per ogni $z = (x, y, t) \in \Omega$ e ogni linea ℓ passante per z e contenuta nel piano Π_z, la funzione u ristretta a $\ell \cap \Omega$ è una funzione convessa di una variabile reale in senso usuale.*

3. Dato $z_0 \in \Omega$

$$u(z_0 \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z)) \leq u(z_0) + \lambda(u(z) - u(z_0)), \tag{4}$$

per ogni $z \in \Pi_{z_0}$ *e* $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) È sufficiente supporre $u \in C^2(\Omega)$. Poichè $\ell \subset \Pi_z$, i punti della retta ℓ si possono scrivere in termini del parametro $s \in \mathbb{R}$ come $z + s\,v$, per qualche $v = \lambda\,(1,0,2y) + \mu\,(0,1,-2x)$. I punti su ℓ sono $(x+s\,\lambda, y+s\,\mu, t+2\,s\,(\lambda\,y-\mu\,x))$, con $s \in \mathbb{R}$. Sia $g(s) = u(x+s\,\lambda, y+s\,\mu, t+2\,s\,(\lambda\,y-\mu\,x))$. Si ha $g'(s) = \lambda\,(\partial_x u + 2y\,\partial_t u) + \mu\,(\partial_y u - 2x\,\partial_t u) = \lambda\,Xu + \mu\,Yu$, e $g''(s) = \lambda^2\,X^2 u + \lambda\,\mu\,YXu + \lambda\,\mu\,XYu + \mu^2\,Y^2 u \geq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Banale.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\varphi \geq 0$, supp $\varphi \subset B_1(0)$ e $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(h)\,dh = 1$. Siano $\varepsilon > 0$ e

$$u_\varepsilon(z) = u * \varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-4} \int_{\mathbb{H}^1} u(h^{-1} \circ z)\,\varphi(\delta_{1/\varepsilon} h)\,dh.$$

La funzione u_ε è C^∞ e $u_\varepsilon \to u$ uniformemente sui compatti di Ω. Da (2) e (4) deduciamo che

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon\left(z_0 \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z)\right) &= \varepsilon^{-4} \int_{\mathbb{H}^1} u\left(h^{-1} \circ \left(z_0 \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z)\right)\right)\,\varphi(\delta_{1/\varepsilon} h)\,dh \\
&= \varepsilon^{-4} \int_{\mathbb{H}^1} u\left(\left(h^{-1} \circ z_0\right) \circ \delta_\lambda\left((h^{-1} \circ z_0)^{-1} \circ (h^{-1} \circ z)\right)\right)\,\varphi(\delta_{1/\varepsilon} h)\,dh \\
&\leq \varepsilon^{-4} \int_{\mathbb{H}^1} \left(u(h^{-1} \circ z_0) + \lambda\left(u(h^{-1} \circ z) - u(h^{-1} \circ z_0)\right)\right)\,\varphi(\delta_{1/\varepsilon} h)\,dh \\
&= u_\varepsilon(z_0) + \lambda\,\left(u_\varepsilon(z) - u_\varepsilon(z_0)\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 3.1. Dalla Proposizione 3.1(2) segue che se u è convessa in senso classico, allora u è $\mathcal{H}$–convessa. Non è vero il viceversa. Infatti la funzione gauge $\rho(x,y,t) = \left((x^2+y^2)^2 + t^2\right)^{1/4}$ è $\mathcal{H}$–convessa ma non è convessa in senso classico, (si veda la Proposizione 5.2).

4 Principio del confronto

Se $u \in C^2$ per ogni c definiamo

$$\mathcal{H}_c^*(u) = \begin{bmatrix} Y^2 u & -YXu + cu_t \\ -XY - cu_t & X^2 u \end{bmatrix}.$$

La prova del nostro principio del confronto si basa sulla seguente proposizione.

Proposizione 4.1. *Se $u \in C^2$ allora*

$$\operatorname{div}_{(X,Y)}\Big(\mathcal{H}_c^*(u)\begin{bmatrix} Xu \\ Yu \end{bmatrix}\Big) = 2(\det\mathcal{H}(u) + 12u_t^2).$$

per $c = -4$. Inoltre, se $u, v \in C^2$ e $c = -4$

$$(\det\mathcal{H}(u) + 12u_t^2) - (\det\mathcal{H}(v) + 12v_t^2) = \frac{1}{2}\operatorname{div}_{(X,Y)}\Big(\mathcal{H}_c^*(u+v)\begin{bmatrix} X(u-v) \\ Y(u-v) \end{bmatrix}\Big).$$

Dimostrazione. Si calcola direttamente, tenendo presente che $[X,Y] = -4\partial_t$ e $[X,\partial_t] = [Y,\partial_t] = 0$. $\square$

Teorema 4.1. *Siano $u, v \in C^2(\bar\Omega)$ tali che $u+v$ è $\mathcal{H}$–convessa in Ω e $v = u$ sul $\partial\Omega$, $v < u$ in Ω. Allora*

$$\int_\Omega \left\{\det\mathcal{H}(u) + 12\,(\partial_t u)^2\right\}\,dz \le \int_\Omega \left\{\det\mathcal{H}(v) + 12\,(\partial_t v)^2\right\}\,dz,$$

e

$$\int_\Omega \operatorname{traccia}\mathcal{H}(u)\,dz \le \int_\Omega \operatorname{traccia}\mathcal{H}(v)\,dz.$$

Dimostrazione. Se $Z = \alpha_1\,\partial_{x_1} + \alpha_2\,\partial_{x_2} + \alpha_3\,\partial_{x_3}$ è un campo vettoriale a coefficienti regolari, allora

$$\int_\Omega Zu\,dx = \int_{\partial\Omega}\nu_Z\,u\,d\sigma(x) - \int_\Omega((\alpha_1)_{x_1} + (\alpha_2)_{x_2} + (\alpha_3)_{x_3})\,u\,dx, \tag{5}$$

dove $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ è la normale al $\partial\Omega$ e $\nu_Z = \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3$.

Poichè $v = u$ sul $\partial\Omega$, $v < u$ in Ω e entrambe sono funzioni regolari fino al bordo, allora la normale al $\partial\Omega$ è $\nu = \dfrac{D(v-u)}{|D(v-u)|}$, e $\nu_X = \dfrac{X(v-u)}{|D(v-u)|}$, $\nu_Y = \dfrac{Y(v-u)}{|D(v-u)|}$. Dalla Proposizione 4.1 e da (5) segue che

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left\{\det\mathcal{H}(u) + 12\,(\partial_t u)^2\right\}\,dz - \int_\Omega \left\{\det\mathcal{H}(v) + 12\,(\partial_t v)^2\right\}\,dz \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\langle H_c^*(u+v)\begin{bmatrix} X(u-v) \\ Y(u-v) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_X \\ \nu_Y \end{bmatrix}\rangle\,d\sigma(z).\end{aligned}$$

Poichè $u+v$ è $\mathcal{H}$–convessa, per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}&\langle\begin{bmatrix} Y^2(u+v) & -YX(u+v) + c\partial_t(u+v) \\ -XY(u+v) - c\partial_t(u+v) & X^2(u+v) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}\rangle \\ &= \langle H_c(u+v)\begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{bmatrix}\rangle \ge 0.\end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$\int_\Omega \left\{\det \mathcal{H}(u) + 12\,(\partial_t u)^2\right\}\,dz \le \int_\Omega \left\{\det \mathcal{H}(v) + 12\,(\partial_t v)^2\right\}\,dz.$$

Procedendo nello stesso modo otteniamo anche la seconda disuguaglianza. $\square$

5 Principio del massimo debole

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica 2×2 tale che $A \ge 0$, e traccia $A > 0$, $a_{ij} \in C(D)$ dove $D \subset \mathbb{R}^3$ è un insieme aperto; $X_1 = X, X_2 = Y$ e $L = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(z) X_i X_j$.

Teorema 5.1. *Sia Ω è un insieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^3$ e sia $w \in C^2(\Omega)$. Se $Lw \ge 0$ in Ω e $\limsup_{z \to z_0} w(z) \le 0$ per ogni $z_0 \in \partial\Omega$, allora $w \le 0$ in Ω.*

La prova di questo risultato è standard e si fonda sui due lemmi seguenti.

Lemma 5.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme limitato e aperto, e $w \in C(\Omega)$. Allora esiste $z_0 \in \bar\Omega$ tale che $\sup_{\Omega \cap D(z_0,\rho)} w = \sup_\Omega w$ per ogni $\rho > 0$, dove $D(z_0,\rho)$ è la boccia euclidea di raggio ρ e centro z_0.*

Lemma 5.2. *Sia Ω un insieme limitato e aperto. Esiste una funzione $w_0 \in C^2(\Omega)$ tale che $w_0 > 0$ e $Lw_0 < 0$ in Ω.*

Dimostrazione. Dato $\lambda > 0$ scegliamo $M \in \mathbb{R}$ tale che $\sup_{z \in \Omega} e^{\lambda x + \lambda y} < M$; $z = (x,y,t)$. Sia $w_0 = M - e^{\lambda x + \lambda y}$. Allora $w_0 > 0$ in Ω, $X_1 w_0 = -\lambda e^{\lambda x}$, $X_1^2 w_0 = -\lambda^2 e^{\lambda x}$, $X_2 w_0 = -\lambda e^{\lambda y}$, $X_2^2 w_0 = -\lambda^2 e^{\lambda y}$, e $X_1 X_2 w_0 = X_2 X_1 w_0 = 0$. Pertanto $Lw_0 = -\lambda^2(a_{11}\,e^{\lambda x} + a_{22}\,e^{\lambda y}) < 0$ in Ω. $\square$

Dimostrazione del Teorema 5.1. Supponiamo $Lw > 0$ in Ω. Per il Lemma 5.1, esiste $z_0 \in \bar\Omega$ tale che $\sup_{\Omega \cap B(z_0,\rho)} w = \sup_\Omega w$ per ogni $\rho > 0$. Se $z_0 \in \Omega$, allora $w(z_0) = \sup_\Omega w$ e

$Dw(z_0) = 0$, $D^2w(z_0) \le 0$. Pertanto

$$
\begin{aligned}
0 < Lw(z_0) &= \text{traccia}\left(A\begin{bmatrix} X^2w & XYw \\ YXw & Y^2w \end{bmatrix}\right)(z_0) \\
&= \text{traccia}\left(A\begin{bmatrix} X^2w & (XYw+YXw)/2 \\ (XYw+YXw)/2 & Y^2w \end{bmatrix}\right)(z_0) \\
&= \text{traccia}\left(A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & -2x \end{bmatrix} D^2w \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y & -2x \end{bmatrix}\right)(z_0) \\
&= \text{traccia}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y & -2x \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & -2x \end{bmatrix} D^2w\right)(z_0) \\
&= \text{traccia}\,(\widetilde{A}D^2w)(z_0) \le 0,
\end{aligned}
$$

dove $\widetilde{A} \ge 0$ e $D^2w(z_0) \le 0$. Questo è assurdo. Quindi $z_0 \in \partial\Omega$ e $w \le 0$ in Ω. Se $Lw \ge 0$ in Ω, allora per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo $w_\varepsilon = w - \varepsilon w_0$ con w_0 come nel Lemma 5.2. Si ha $Lw_\varepsilon = Lw - \varepsilon Lw_0 > 0$ e $\limsup_{z\to z_0} w_\varepsilon(z) \le \limsup_{z\to z_0} w(z) \le 0$ for each $z_0 \in \partial\Omega$. Dal precedente argomento , $w_\varepsilon \le 0$ in Ω per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi $w \le 0$. □

Poniamo

$$
\mathcal{H}^*(u) = \begin{bmatrix} Y^2u & -(XYu+YXu)/2 \\ -(XYu+YXu)/2 & X^2u \end{bmatrix}.
$$

Si verifica facilmente che

$$
\det \mathcal{H}(u) = \frac{1}{2}\,\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u)\,\mathcal{H}(u)),
$$

e

$$
\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u)\,\mathcal{H}(v)) = \text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(v)\,\mathcal{H}(u)). \tag{6}
$$

Dal Teorema 5.1 otteniamo il seguente principio del confronto.

Proposizione 5.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto limitato, $u, v \in C^2(\Omega)$ tali che $u + v$ è $\mathcal{H}$–convessa, e* traccia $\mathcal{H}(u+v) > 0$. *Se* $\det \mathcal{H}(u) \ge \det \mathcal{H}(v)$ *in Ω e $u \le v$ on $\partial\Omega$, allora $u \le v$ in Ω.*

Dimostrazione. Da (6) segue

$$
\begin{aligned}
0 &\le \det \mathcal{H}(u) - \det \mathcal{H}(v) \\
&= \frac{1}{2}\,(\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u)\,\mathcal{H}(u)) - \text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(v)\,\mathcal{H}(v))) \\
&= \frac{1}{2}\,(\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u)\,\mathcal{H}(u-v)) + \text{traccia}\,((\mathcal{H}^*(u) - \mathcal{H}^*(v))\,\mathcal{H}(v))) \\
&= \frac{1}{2}\,(\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u)\,\mathcal{H}(u-v)) + \text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(v)\,\mathcal{H}(u-v))) \qquad \text{per (6)} \\
&= \frac{1}{2}\,\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u+v)\,\mathcal{H}(u-v)) \\
&= \frac{1}{2}\,\text{traccia}\,(\mathcal{H}^*(u+v)\,\mathcal{H}(w)),
\end{aligned}
$$

dove $w = u - v \le 0$ on $\partial\Omega$. Applicando il Teorema 5.1 a w con $A = \mathcal{H}^*(u+v)$, si ottiene l'asserto. □

5.1 Un principio del confronto

Come conseguenza della Proposizione 5.1 otteniamo che i "coni" che coincidono con una funzione $\mathcal{H}$–convessa u sul bordo di una d-palla B stanno sopra al grafico di u dentro B.

Proposizione 5.2. *Sia* $d(z, z_0) = \|z_0^{-1} \circ z\|$, $\|z\| = ((x^2+y^2)^2 + t^2)^{1/4}$, $z = (x, y, t)$, $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^3 : 0 < d(z, z_0) < R\}$, *e* $v(z) = m\left(\dfrac{d(z,z_0)}{R} - 1\right)$. *Se* $m \ge 0$, *allora* v *è* $\mathcal{H}$*–convessa in* Ω, $\det \mathcal{H}(v) = 0$ *in* Ω, *e* $\det \mathcal{H}(v)$ *è sommabile in* $\bar{\Omega}$.

Dimostrazione. Se $\zeta \in \mathbb{R}^3$ e $g(z) = f(\zeta \circ z)$, allora $Xg(z) = (Xf)(\zeta \circ z)$ e $Yg(z) = (Yf)(\zeta \circ z)$. Possiamo allora supporre $z_0 = 0$. Siano $r = (x^2+y^2)^2 + t^2$ e $h \in C^1((0, +\infty))$. Allora $Xr = 4x^3 + 4xy^2 + 4yt$, $Yr = 4yx^2 + 4y^3 - 4xt$, $X^2 r = Y^2 r = 12(x^2+y^2)$, $YXr = 4t$, e $XYr = -4t$. Se $u(x,y,t) = h(r)$, si ha $Xu = h'(r)\,Xr$, $Yu = h'(r)\,Yr$, $X^2u = h''(r)\,(Xr)^2 + h'(r)\,X^2 r$, $Y^2 u = h''(r)\,(Yr)^2 + h'(r)\,Y^2 r$, $XYu = h''(r)\,XrYr + h'(r)\,XYr$, $YXu = h''(r)\,YrXr + h'(r)\,YXr$. Allora

$$\det \mathcal{H}(u) = 48\,(x^2+y^2)^2\,\{4\,r\,h''(r) + 3\,h'(r)\}\,h'(r). \tag{7}$$

Pertanto $\det \mathcal{H}(u) = 0$ se $h'(r) = 0$ o $4\,r\,h''(r) + 3\,h'(r) = 0$, cioè, $h(r) = C$ oppure $h(r) = r^{1/4}$. Se $h(r) = r^{1/4}$, allora $X^2 h(r) = 3\,r^{-7/4}\,(y(x^2+y^2) - xt)^2 \ge 0$ e $Y^2 h(r) = 3\,r^{-7/4}\,(x(x^2+y^2) + yt)^2 \ge 0$, e $r^{1/4}$ è $\mathcal{H}$–convessa in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

D'altronde, $\det \mathcal{H}(u) \le C\,r^{-1/2}$ e quindi posto $Q = 4$, si ha

$$\int_{r^{1/4} \le R} \det \mathcal{H}(u)\,dz \le C \int_{r^{1/4} \le R} r^{-1/2}\,dz = C \int_0^R \rho^{Q-1}\,\rho^{-2}\,d\rho = C\,R^2.$$

□

Proposizione 5.3. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa, con $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^3 : 0 < d(z, z_0) < R\}$, e $u \leq 0$ sul $\{z \in \mathbb{R}^3 : d(z, z_0) = R\}$. Allora $u \leq v$, dove v è la funzione definita nella Proposizione 5.2 con $m = -u(z_0)$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, $z_0 = (x_0, y_0, t_0)$, $z = (x, y, t)$,

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon\,(x^2 + y^2),$$

e

$$v_\varepsilon(z) = -(1 - \sqrt{\varepsilon})\,u(z_0)\,\left(\frac{d(z, z_0)}{(1 - \sqrt{\varepsilon})\,R} - 1\right).$$

Per ε sufficientemente piccolo $u_\varepsilon(z) \leq v_\varepsilon(z)$ per ogni $z \in \partial\Omega$. Infatti se $z = z_0$, allora $u_\varepsilon(z_0) \leq v_\varepsilon(z_0)$ se e solo se $\sqrt{\varepsilon}\,(x_0^2 + y_0^2) \leq -u(z_0)$ che vale per ogni ε piccolo. D'altronde, se $d(z, z_0) = R$, allora $v_\varepsilon(z) = -\sqrt{\varepsilon}\,u(z_0)$ e $u_\varepsilon(z) \leq \varepsilon\,(x^2+y^2) \leq \varepsilon\,\max_{d(z,z_0)=R}(x^2+y^2) = \varepsilon\,M$. Quindi $u_\varepsilon(z) \leq v_\varepsilon(z)$ sul $d(z, z_0) = R$ se $\sqrt{\varepsilon}\,M \leq -u(z_0)$ che vale per ε piccolo.

Abbiamo anche che

$$\det\mathcal{H}(u_\varepsilon) = \det\mathcal{H}(u) + 2\varepsilon\,\mathrm{traccia}\,\mathcal{H}(u) + 4\,\varepsilon^2 > 0 = \det\mathcal{H}(v_\varepsilon) \tag{8}$$

in Ω, e $\mathrm{traccia}\,\{\mathcal{H}(u_\varepsilon + v_\varepsilon)\} = \mathrm{traccia}\,\mathcal{H}(u) + 8\,\varepsilon + \mathrm{traccia}\,\mathcal{H}(v_\varepsilon) > 0$. Pertanto, dalla Proposizione 5.1 otteniamo $u_\varepsilon \leq v_\varepsilon$ in Ω, e la proposizione segue mandando $\varepsilon \to 0$.

□

Come conseguenza delle precedenti proposizioni otteniamo la seguente estensione del Teorema 4.1, che utilizzeremo in seguito nella prova del principio del massimo Teorema 1.2.

Teorema 5.2. *Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^3 : 0 < d(z, z_0) < R\}$, e sia $v \in C^2(\bar{B}_R(z_0))$ $\mathcal{H}$–convessa in Ω e tale che $v = 0$ sul $\partial B_R(z_0)$. Poniamo $u(z) = -v(z_0)\,\left(\dfrac{d(z, z_0)}{R} - 1\right)$. Allora*

$$\int_{B_R(z_0)} \left\{\det\mathcal{H}(u) + 12\,(\partial_t u)^2\right\}\,dz \leq \int_{B_R(z_0)} \left\{\det\mathcal{H}(v) + 12\,(\partial_t v)^2\right\}\,dz.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 5.3 otteniamo che $v \leq u$ in $B_R(z_0)$. Dimostreremo che

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(z_0)\setminus B_\varepsilon(z_0)} \left\{\det\mathcal{H}(u) + 12\,(\partial_t u)^2\right\}\,dz\\ &\qquad\leq \int_{B_R(z_0)\setminus B_\varepsilon(z_0)} \left\{\det\mathcal{H}(v) + 12\,(\partial_t v)^2\right\}\,dz + O(\varepsilon^{1/4}),\end{aligned} \tag{9}$$

per $\varepsilon \to 0$. Per l'invarianza dei campi vettoriali rispetto alla legge di gruppo, non è restrittivo supporre $z_0 = 0$. Poichè le funzioni u, v sono $\mathcal{H}$–convesse e C^2 eccetto nel punto 0, procediamo come nella prova del Teorema 4.1 ma sull'insieme aperto $\Omega_\varepsilon = B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)$. Al termine di bordo dobbiamo pertanto aggiungere il seguente

$$
\begin{aligned}
&- \int_{d(z)=\varepsilon} Y^2(u+v)\, X(u-v)\, \frac{Xd}{|Dd|}\, d\sigma(z) - \int_{d(z)=\varepsilon} X^2(u+v)\, Y(u-v)\, \frac{Yd}{|Dd|}\, d\sigma(z) \\
&+ \int_{d(z)=\varepsilon} XY(u+v)\, X(u-v)\, \frac{Yd}{|Dd|}\, d\sigma(z) + \int_{d(z)=\varepsilon} YX(u+v)\, Y(u-v)\, \frac{Xd}{|Dd|}\, d\sigma(z), \\
&+ c \int_{d(z)=\varepsilon} \partial_t(u+v)\, X(u-v)\, \frac{Yd}{|Dd|}\, d\sigma(z) - c \int_{d(z)=\varepsilon} \partial_t(u+v)\, Y(u-v)\, \frac{Xd}{|Dd|}\, d\sigma(z)
\end{aligned}
$$

dove $d(z) = d(z, 0)$. Dimostriamo che ogni addendo è $O(\varepsilon^{1/4})$. Tutti i termini hanno sostanzialmente lo stesso comportamento per $\varepsilon \to 0$. Utilizzando i conti della prova della Proposizione 5.2, vediamo ad esempio che

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{d(z)=\varepsilon} Y^2(u+v)\, X(u-v)\, \frac{Xd}{|Dd|}\, d\sigma(z) \\
&\leq C \int_{d(z)=\varepsilon} r^{-11/4}\, (x(x^2+y^2)+yt)^2\, (4x^3+4xy^2+4yt)^2\, \frac{d\sigma(z)}{|Dd|} \\
&\leq C\, \varepsilon^{-11/4} \int_{d(z)=\varepsilon} \frac{d\sigma(z)}{|Dd|}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

D'altronde, per la formula di coarea

$$
\int_0^t \int_{d(z)=s} \frac{d\sigma(z)}{|Dd|}\, ds = \int_{d(z)\leq t} dz = C\, t^4.
$$

Quindi $\displaystyle\int_{d(z)=s} \frac{d\sigma(z)}{|Dd|} = C\, s^3$ e inserendo questo valore in (10) otteniamo che $J = O(\varepsilon^{1/4})$.

Pertanto vale (9) e il teorema segue mandando $\varepsilon \to 0$. □

Come conseguenza della Proposizione 5.1 otteniamo che le funzioni $\mathcal{H}$–convesse sono lipschitziane rispetto alla distanza d.

Proposizione 5.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e $u \in C(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa in Ω. Allora per ogni palla $\bar{B} \subset \Omega$ esiste una costante C_B tale che $|u(x) - u(y)| \leq C_B\, d(x, y)$ per ogni $x, y \in B$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $u \in C^2(\Omega)$ e $B_d(x_0, 2R) \subset \Omega$. Sia $y \in B_d(x_0, R)$ e $\phi(x) = u(x) - u(y) + \varepsilon\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right)$; $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, con $x \in B_d(y, R)$. Abbiamo che $\mathcal{H}(\phi + C_\varepsilon\, d(\cdot, y)) > 0$ in $B_d(y, R)$ e $\phi(x) \leq C_\varepsilon\, d(x, y)$ per $d(x, y) = R$ dove $C_\varepsilon =$

$\dfrac{\operatorname{osc}_{B_d(x_0,2R)} u \; + \varepsilon \operatorname{diam}(B_d(x_0,2R))^2}{R}$. Poichè $\det \mathcal{H}(\phi) \geq \det \mathcal{H}(d(\cdot, y))$ in $B_d(y,R) \setminus \{y\}$ per il principio del confronto Proposizione 5.1 otteniamo che $\phi(x) \leq C_\varepsilon \, d(x,y)$ per $x \in B_d(y,R)$. Mandando $\varepsilon \to 0$ otteniamo $u(x) - u(y) \leq C \, d(x,y)$ per $x \in B_d(y,R)$ con $C = \dfrac{\operatorname{osc}_{B_d(x_0,2R)} u}{R}$ e $y \in B_d(x_0,R)$. Se $x, y \in B_d(x_0, R/4)$, allora $x \in B_d(y, R/2)$ e $y \in B_d(x,R)$ e per la precedente disuguaglianza $u(y) - u(x) \leq C \, d(y,x) = C \, d(x,y)$. Pertanto otteniamo che $|u(x) - u(y)| \leq C \, d(x,y)$ per ogni $x, y \in B_d(x_0, R/4)$. □

6 Principio del massimo

Proposizione 6.1. *Sia u $\mathcal{H}$–convessa in Ω aperto e limitato. Supponiamo $u \leq 0$ on $\partial\Omega$. Allora $u \leq 0$ in Ω.*

Dimostrazione. Siano $\varepsilon > 0$ e $u_\varepsilon(x,y,t) = u(x,y,t) + \varepsilon\,(x^2+y^2)$. Allora $\mathcal{H}(u_\varepsilon) = \mathcal{H}(u) + 2\varepsilon \, \mathrm{Id}$, e

$$\det \mathcal{H}(u_\varepsilon) = \det \mathcal{H}(u) + 2\varepsilon \operatorname{traccia} \mathcal{H}(u) + 4\,\varepsilon^2.$$

Poichè $\det \mathcal{H}(\varepsilon(x^2+y^2)) = 4\,\varepsilon^2$, otteniamo $\det \mathcal{H}(u_\varepsilon) \geq \det \mathcal{H}(\varepsilon(x^2+y^2))$ in Ω. Inoltre $u_\varepsilon \leq \varepsilon(x^2+y^2)$ sul $\partial\Omega$, e $\operatorname{traccia}\{\mathcal{H}(u_\varepsilon + \varepsilon(x^2+y^2)\} = \operatorname{traccia} \mathcal{H}(u) + 8\,\varepsilon > 0$. La proposizione allora segue dalla Proposizione 5.1. □

Proposizione 6.2. *Sia $u \in C^2$ e $\mathcal{H}$–convessa in Ω aperto e limitato. Supponiamo $u \leq 0$ sul $\partial\Omega$. Allora $u \leq 0$ in Ω. Inoltre, se esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $u(z_0) = 0$ allora $u \equiv 0$ in Ω.*

Dimostrazione. Definiamo

$$L := X^2 + Y^2$$

il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. Poichè u è $\mathcal{H}$–convessa in Ω allora $Lu = \operatorname{traccia} \mathcal{H}u \geq 0$. Quindi, per il principio del confronto per L, otteniamo $u \leq 0$ in Ω. Inoltre, se esiste $z_0 \in \Omega$ tale che $u(z_0) = 0$ allora u ha un punto di massimo in un punto interno e per il principio del massimo forte per L, (si veda ad esempio [1]) otteniamo $u \equiv 0$ in Ω. □

Lemma 6.1. *Siano $z_0 \in B_R(0)$ e $z \in \Pi_{z_0} \cap B_R(0)$. Sia $\lambda > 0$ tale che*

$$z' = z_0 \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z) \in \Pi_{z_0} \cap \partial B_R(0).$$

Supponiamo u $\mathcal{H}$–convessa in $B_R(0)$ e $u = 0$ sul $\partial B_R(0)$. Allora:

1. *Se* $z_0 = (x_0, y_0, t_0)$ *e* $z = (0, 0, t_0)$, *allora* $\lambda \geq 2$ *e*

$$u(z) \leq \frac{1}{2}\, u(z_0). \tag{11}$$

2. *Se* $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, $\rho(z_0) \leq \alpha\, R$ *e* $d(z_0, z) \leq \beta\, R$, *allora* $\lambda \geq \dfrac{1-\alpha}{\beta}$ *e*

$$u(z) \leq \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}\, u(z_0). \tag{12}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte di (1). Se $\eta = (x, y, t) \in \Pi_{z_0}$, allora abbiamo che

$$z_0 \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ \eta) = (x_0 + \lambda(x - x_0), y_0 + \lambda(y - y_0), t_0 + \lambda(t - t_0)),$$

e $z' = ((1-\lambda)x_0, (1-\lambda)y_0, t_0)$. Quindi

$$\begin{aligned} R^4 = \rho(z')^4 &= \left((1-\lambda)^2 x_0^2 + (1-\lambda)^2 y_0^2\right)^2 + t_0^2 \\ &= (1-\lambda)^4\, \left(x_0^2 + y_0^2\right)^2 + \rho(z_0)^4 - (x_0^2 + y_0^2)^2 \\ &\leq \left((1-\lambda)^4 - 1\right)\, \left(x_0^2 + y_0^2\right)^2 + R^4, \end{aligned}$$

e $|1-\lambda| \geq 1$. Poichè $\lambda > 0$, segue $\lambda \geq 2$.

Per dimostrare la prima parte di (2) scriviamo

$$\begin{aligned} R = \rho(z') &= \rho((z_0^{-1})^{-1} \circ \delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z)) \leq \rho(z_0^{-1}) + \rho(\delta_\lambda(z_0^{-1} \circ z)) \\ &= \rho(z_0) + \lambda\, \rho(z_0^{-1} \circ z) = \rho(z_0) + \lambda\, d(z_0, z) \\ &\leq \alpha\, R + \lambda\, \beta\, R, \end{aligned}$$

e quindi $\lambda \geq \dfrac{1-\alpha}{\beta}$.

Per dimostrare (11) e (12), per definizione di z' abbiamo che $z = z_0 \circ \delta_{1/\lambda}(z_0^{-1} \circ z')$. Da (4) e poichè $u(z') = 0$, segue che $u(z) \leq \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) u(z_0)$. Quindi (11) e (12) seguono, perchè $u \leq 0$ in $B_R(0)$. $\square$

Utilizzando ripetutamente il Lemma 6.1 si dimostra la seguente stima puntuale (rimandiamo al lavoro [5] per la dimostrazione in tutti i dettagli).

Proposizione 6.3. *Sia* u $\mathcal{H}$*–convessa e* $u = 0$ *sul* $\partial B_R(0)$. *Dato* $z_0 \in B_R(0)$ *esiste una costante positiva* $c < 1$, *dipendente da* $d(z_0, \partial B_R(0))$, *tale che*

$$u(0) \leq c\, u(z_0).$$

La Proposizione 6.3 ci permette di spostare una stima puntuale nel centro della boccia ad un punto qualsiasi della boccia, e quindi di dimostrare il Teorema 1.2.

Dimostrazione del Teorema 1.2. Poniamo

$$u(0) = -m$$

e

$$v(\zeta) = m\left(\frac{d(\zeta,0)}{R} - 1\right).$$

Si ha $v = u = 0$ sul ∂B_R, v è $\mathcal{H}$–convessa in B_R e $v \geq u$ in B_R. Dal Principio del confronto, Teorema 5.2, otteniamo

$$\int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(v) + 12\, v_t^2\}\, dz \leq \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(u) + 12\, u_t^2\}\, dz.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(v) + 12\, v_t^2\}\, dz &= \left(\frac{m}{R}\right)^2 \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(d(\zeta,0)) + 12\,(\partial_t d(\zeta,0))^2\}\, d\zeta \\ &= 12\left(\frac{m}{R}\right)^2 R^2 \int_{B_1} (\partial_t d(\zeta,0))^2 d\zeta \\ &= c_1 m^2 \end{aligned}$$

con

$$c_1 = 12 \int_{B_1} (\partial_t d(\zeta,0))^2 d\zeta > 0.$$

Sia

$$u(z_0) = \min_{B_R} u = -m_0.$$

Per la Proposizione 6.3 esiste una costante $0 < c_2 < 1$ tale che

$$m_0 \leq \frac{1}{c_2} m.$$

Quindi

$$m_0^2 \leq \frac{1}{c_2^2} m^2 \leq \frac{c_1}{c_2^2} \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(u) + 12\, u_t^2\}\, dz.$$

$\square$

7 $\mathcal{H}$–Misure

7.1 Stime dell'oscillazione

In questa sezione proviamo che se u è $\mathcal{H}$–convessa, possiamo localmente controllare l'integrale di $\det \mathcal{H}(u) + 12(u_t)^2$ in termini dell'oscillazione di u.

Cominciamo con un lemma sulle funzioni $\mathcal{H}$–convesse.

Lemma 7.1. *Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ sono funzioni $\mathcal{H}$–convesse, e f è convessa in $\mathbb{R}^2$ e non decrescente in ogni variabile, allora la funzione composta $w = f(u_1, u_2)$ è$\mathcal{H}$–convessa.*

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e poniamo $X_1 = X, X_2 = Y$. Si ha

$$X_j w = \sum_{p=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_p} X_j u_p,$$

$$X_i X_j w = \sum_{p=1}^{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_p} X_i X_j u_p + \sum_{q=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_q \partial u_p} X_i u_q X_j u_p \right),$$

e per ogni $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}(w)h, h\rangle &= \sum_{i,j=1}^{2} X_i X_j w \, h_i \, h_j \\
&= \sum_{p=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_p} \langle \mathcal{H}(u_p)h, h\rangle + \sum_{p,q=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_q \partial u_p} (\sum_{i=1}^{2} X_i u_q h_i)(\sum_{j=1}^{2} X_j u_p h_j) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

perchè $\mathcal{H}(u_p)$ è semidefinita positiva e $\dfrac{\partial f}{\partial u_p} \geq 0$ per $p = 1, 2$, e la matrice

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_q \partial u_p} \right)_{p,q=1,2}$$

è semidefinita positiva.

Se f è soltanto continua, per $h > 0$ definiamo

$$f_h(x) = h^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \left(\frac{x-y}{h} \right) f(y) dy,$$

dove $\varphi \in C^\infty$ è non negativa, si annulla fuori dalla palla unitaria di $\mathbb{R}^2$, e $\int \varphi = 1$. Poichè f è convessa, allora f_h è convessa e per il conto precedente $w_h = f_h(u_1, u_2)$ è $\mathcal{H}$–convessa. In particolare, w_h soddisfa le ipotesi della Proposizione 3.1 e poichè $w_h \to w$ uniformemente sui compatti per $h \to 0$, otteniamo che w è $\mathcal{H}$–convessa. $\square$

Proposizione 7.1. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa. Per ogni dominio compatto $\Omega' \Subset \Omega$ esiste una costante positiva C dipendente da Ω' e da Ω ma indipendente da u, tale che*

$$\int_{\Omega'} \{\det \mathcal{H}(u) + 12(u_t)^2\}\, dz \le C(\mathrm{osc}_\Omega u)^2. \tag{13}$$

Dimostrazione. Dato $z_0 \in \Omega$ sia $B_R = B_R(z_0)$ la d–palla di raggio R e centro z_0 tale che $B_R \subset \Omega$. Denotiamo con $B_{\sigma R}$ la palla concentrica di raggio σR, con $0 < \sigma < 1$. Senza perdere di generalità possiamo supporre $z_0 = 0$, perchè i campi vettoriali X e Y sono invarianti a sinistra rispetto al gruppo di traslazioni. Sia $M = \max_{B_R} u$, allora $u - M \le 0$ in B_R. Dato $\varepsilon > 0$ lavoreremo con la funzione $u - M - \varepsilon < -\varepsilon$. in altre parole, sottraendo una costante, possiamo supporre $u < -\varepsilon$ in B_R, per ogni costante positiva assegnata ε; ε tenderà a zero alla fine della prova.

Definiamo

$$m_0 = \inf_{B_R} u,$$

e

$$v(z) = \frac{m_0}{(1-\sigma^4)R^4}(R^4 - \|z\|^4).$$

Ovviamente $v = 0$ sul ∂B_R e $v = m_0$ sul $\partial B_{\sigma R}$. Vogliamo dimostrare che v è $\mathcal{H}$–convessa in B_R e $v \le m_0$ in $B_{\sigma R}$. Posto $r = \|z\|^4$, $h(r) = \dfrac{m_0}{(1-\sigma^4)R^4}(R^4 - r)$, e seguendo i conti della prova della Proposizione 5.2 otteniamo

$$\det \mathcal{H}(v) = 144(x^2+y^2)^2 \left(\frac{m_0}{(1-\sigma^4)R^4}\right)^2 \ge 0,$$

e

$$X^2 h = Y^2 h = -12\,(x^2+y^2)\frac{m_0}{(1-\sigma^4)R^4} \ge 0,$$

perchè m_0 è negativa. Quindi v è $\mathcal{H}$–convessa in B_R. Poichè $v - m_0 = 0$ sul $\partial B_{\sigma R}$, dalla Proposizione 6.1 segue che $v \le m_0$ in $B_{\sigma R}$. In particolare, $v \le u$ in $B_{\sigma R}$.

Sia $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ una funzione radiale con supporto nella palla unitaria euclidea e tale che $\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x)\, dx = 1$. Posto

$$f_h(x_1,x_2) = h^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho((x-y)/h)\, \max\{y_1,y_2\}\, dy_1 dy_2 \tag{14}$$

abbiamo che

1. Se $x_1 > x_2$, allora esiste $h_0 > 0$ e un intorno V di (x_1, x_2) tale che $f_h(y_1, y_2) = y_1$ per ogni $(y_1, y_2) \in V$ e per ogni $h \leq h_0$.

2. Esiste una costante positiva α tale che $f_h(x, x) = x + \alpha\, h$ per ogni $h > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Per ogni $h > 0$, $f_h(\cdot, x_2)$ è non decrescente per ogni x_2 e $f_h(x_1, \cdot)$ ènon decrescente per ogni x_1.

Definiamo

$$w_h = f_h(u, v).$$

Dal Lemma 7.1 w_h è $\mathcal{H}$–convessa in B_R. Se $y \in B_{\sigma R}$ allora $v(y) \leq u(y)$. Se $v(y) < u(y)$ allora $f_h(u, v)(y) = u(y)$ per h piccolo; se $v(y) = u(y)$, allora $f_h(u, v)(y) = u(y) + \alpha\, h$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{B_{\sigma R}} \{\det \mathcal{H}(u) + 12(\partial_t u)^2\}\, dz &= \int_{B_{\sigma R}} \{\det \mathcal{H}(w_h) + 12((w_h)_t)^2\}\, dz \\ &\leq \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(w_h) + 12((w_h)_t)^2\}\, dz. \end{aligned} \tag{15}$$

Notiamo che $f_h(u, v) \geq v$ in B_R per h piccolo. Inoltre, $u < 0$ e $v = 0$ sul ∂B_R pertanto $f_h(u, v) = 0$ sul ∂B_R. Applicando allora il Teorema 4.1 a w_h e v otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(w_h) + 12(\partial_t w_h)^2\}\, dz &\leq \int_{B_R} \{\det \mathcal{H}(v) + 12(v_t)^2\}\, dz \\ &= 48 \left(\frac{m_0}{(1-\sigma)R^4} \right)^2 \int_{B_R} (3(x^2 + y^2)^2 + t^2)\, dz \\ &= 48 \left(\frac{m_0}{(1-\sigma)} \right)^2 \int_{B_1} (3(x^2 + y^2)^2 + t^2)\, dz. \end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza, combinata con (15), otteniamo

$$\int_{B_{\sigma R}} \{\det \mathcal{H}(u) + 12(\partial_t u)^2\}\, dz \leq C\,(m_0)^2 \leq C\,(\mathrm{osc}_{B_R} u + \varepsilon)^2.$$

La disuguaglianza (13) segue mandando $\varepsilon \to 0$ e ricoprendo Ω' con delle palle. □

Corollario 7.1. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa. Per ogni dominio compatto $\Omega' \Subset \Omega$ esiste una costante C, indipendente da u, tale che*

$$\int_{\Omega'} \det \mathcal{H}(u)\, dz \leq C(\mathrm{osc}_\Omega u)^2. \tag{16}$$

Corollario 7.2. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa. Per ogni dominio compatto $\Omega' \Subset \Omega$ esiste una costante positiva C, indipendente da u, tale che*

$$\int_{\Omega'} \operatorname{traccia} \mathcal{H}_2(u)\, dz \leq CR^2 \operatorname{osc}_{\Omega} u. \tag{17}$$

7.2 Misure generate da funzioni $\mathcal{H}$–convesse

Dimostreremo che possiamo estendere $\int \det \mathcal{H}(u) + u_t^2$ a funzioni continue e $\mathcal{H}$–convesse come misure di Borel. Chiameremo questa $\mathcal{H}$–misura associata a u, e mostreremo che la mappa $u \in C(\Omega) \to \mu(u)$ è debolmente continua su $C(\Omega)$.

Teorema 7.1. *Data una funzione $\mathcal{H}$–convessa $u \in C(\Omega)$ esiste un'unica misura di Borel $\mu(u)$ tale che se $u \in C^2(\Omega_1)$ per $\Omega_1 \subseteqq \Omega$, allora*

$$\mu(u)(E) = \int_E \{\det \mathcal{H}(u) + 12u_t^2\}\, dz \tag{18}$$

per ogni insieme boreliano $E \subset \Omega_1$. Inoltre, se $u_k \in C(\Omega)$ sono $\mathcal{H}$–convesse, e $u_k \to u$ sui compatti di Ω, allora $\mu(u_k)$ converge debolmente a $\mu(u)$, cioè

$$\int_\Omega f\, d\mu(u_k) \to \int_\Omega f\, d\mu(u), \tag{19}$$

per ogni $f \in C(\Omega)$ con supporto compatto in Ω.

Dimostrazione. Sia $u \in C(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa, e sia $\{u_k\} \subset C^2(\Omega)$ una successione di funzioni $\mathcal{H}$–convesse convergenti a u uniformemente sui compatti di Ω. Per la Proposizione 7.1

$$\int_{\Omega'} \{\det \mathcal{H}(u_k) + 12(\partial_t u_k)^2\}\, dz$$

sono uniformemente limitati, per ogni $\Omega' \Subset \Omega$, e quindi una sottosuccessione di $(\det \mathcal{H}(u_k) + 12(\partial_t u_k)^2)$ converge debolmente nel senso delle misure a una misura di Borel $\mu(u)$ su Ω. Dimostriamo ora che la mappa $u \in C(\Omega) \to \mu(u) \in M(\Omega)$, lo spazio delle miure finite di Borel su Ω, è ben definita. Sia $\{v_k\} \subset C^2(\Omega)$ un'altra successione di funzioni $\mathcal{H}$–convesse convergenti a u uniformemente sui compatti di Ω. Supponiamo che $(\det \mathcal{H}(u_k) + 12(\partial_t u_k)^2)$ e $(\det \mathcal{H}(v_k) + 12(\partial_t v_k)^2)$ convergano debolmente a delle misure di Borel μ, μ' rispettivamente. Sia $B = B_R \Subset \Omega$, e fissiamo $\sigma \in (0,1)$. Sia $\eta \in C^2(\bar{\Omega})$ una funzione $\mathcal{H}$–convessa tale che $\eta = 0$ in $B_{\sigma R}$ e $\eta = 1$ sul ∂B_R.[1] Dalla convergenza uniforme di $\{u_k\}$ e $\{v_k\}$ a u, dato $\varepsilon > 0$

[1] Nella d–palla $B_R(0)$, la funzione η si può costruire così: se $v(z) = \frac{1}{1-\sigma^4}\left(\frac{\|z\|^4}{R^4} - \sigma^4\right)$ e f_h è la funzione definita in (14), allora $\eta(z) = f_h(v, 0)$ per h sufficientemente piccolo.

esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$-\frac{\varepsilon}{2} \le u_k(x) - v_k(x) \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{per ogni } x \in \bar{B} \text{ e } k \ge k_\varepsilon.$$

Quindi

$$u_k + \frac{\varepsilon}{2} \le v_k + \varepsilon\eta$$

sul ∂B_R per $k \ge k_\varepsilon$. Definiamo $\Omega_k = \{z \in B_R : u_k + \frac{\varepsilon}{2} > v_k + \varepsilon\eta\}$. Dal Teorema 4.1 otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} \{\det \mathcal{H}(u_k) + 12(\partial_t u_k)^2\}\, dz &\le \int_{\Omega_k} \det \mathcal{H}(v_k + \varepsilon\eta) + 12(\partial_t v_k + \varepsilon \partial_t \eta)^2 \\
&\le \int_{B_R} \det \mathcal{H}(v_k) + 12(\partial_t v_k)^2 + \varepsilon^2 C \\
&\quad + \varepsilon C \int_{B_R} (\operatorname{traccia} \mathcal{H}_2(v_k) + |\partial_t v_k|) \\
&\le \int_{B_R} \det \mathcal{H}(v_k) + 12(\partial_t v_k)^2 + \varepsilon^2 C \\
&\quad + \varepsilon C \int_{B_R} \big(\operatorname{traccia} \mathcal{H}_2(v_k) + |\partial_t v_k|^2 + 1\big) \qquad (20)
\end{aligned}$$

e per la Proposizione 7.1 e il Corollario 7.2 il secondo membro è limitato da

$$\int_{B_R} \det \mathcal{H}(v_k) + 12(\partial_t v_k)^2 + \varepsilon C.$$

Per definizione di Ω_k e poichè $\eta = 0$ in $B_{\sigma R}$, segue che $B_{\sigma R} \subset \Omega_k$ e quindi per (20) otteniamo

$$\int_{B_{\sigma R}} \det \mathcal{H}(u_k) + 12(\partial_t u_k)^2 \le \int_{B_R} \det \mathcal{H}(v_k) + 12(\partial_t v_k)^2 + \varepsilon C, \qquad (21)$$

e mandando $k \to \infty$, otteniamo $\mu(B_{\sigma R}) \le \mu'(B_R) + C\,\varepsilon$. Quindi, se $\varepsilon \to 0$ e $\sigma \to 1$ otteniamo

$$\mu(B) \le \mu'(B).$$

Scambiando $\{u_k\}$ con $\{v_k\}$ abbiamo $\mu = \mu'$.

Per la prova di (19) rimandiamo il lettore al lavoro [5]. □

Corollario 7.3. *Se $u, v \in C(\bar{\Omega})$ sono $\mathcal{H}$–convesse in Ω, $u = v$ sul $\partial\Omega$ e $u \ge v$ in Ω, allora $\mu(u)(\Omega) \le \mu(v)(\Omega)$.*

7.3 Principi del confronto e del massimo per $\mathcal{H}$–misure

Teorema 7.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e limitato. Se $u, v \in C(\bar{\Omega})$ sono $\mathcal{H}$–convesse in Ω, $u \le v$ sul $\partial\Omega$ e $\mu(u)(E) \ge \mu(v)(E)$ per ogni insieme boreliano $E \subset \Omega$, allora $u \le v$ in Ω.*

Dimostrazione. Supponiamo $0 \in \Omega$, $\Delta = \mathrm{diam}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, e $u_\varepsilon(x,y,t) = u(x,y,t) + \varepsilon\,(x^2 + y^2 - \Delta^2)$. Allora $x^2 + y^2 - \Delta^2 < 0$ per $(x,y,t) \in \bar{\Omega}$, e $u_\varepsilon < u \le v$ in $\partial\Omega$. Supponiamo che esista $(x_o, y_o, t_o) \in \Omega$ tale che $u(x_o, y_o, t_o) > v(x_o, y_o, t_o)$. Quindi l'insieme $D = \{(x,y,t) \in \Omega : u_\varepsilon(x,y,t) > v(x,y,t)\}$ è non vuoto per ogni ε piccolo. Inoltre, $\bar{D} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Pertanto $\bar{D} \subset \Omega$ e $u_\varepsilon = v$ sul ∂D. Per il Corollario 7.3 otteniamo $\mu(u_\varepsilon)(D) \le \mu(v)(D)$. D'altronde, esiste $u_k \in C^2(\Omega)$ $\mathcal{H}$–convessa in Ω tale che $u_k \to u$ uniformemente sui compatti di Ω. Sia $u_{k,\varepsilon}(x,y,t) = u_k(x,y,t) + \varepsilon\,(x^2 + y^2 - \Delta^2)$. Per (8) abbiamo

$$\begin{aligned}\int_D \{\det \mathcal{H}(u_{k,\varepsilon}) + (u_{k,\varepsilon})_t^2\}\,dz &= \int_D \{\det \mathcal{H}(u_k) + 2\varepsilon \,\mathrm{traccia}\, \mathcal{H}(u_k) + 4\varepsilon^2 + (u_k)_t^2\}\,dz \\ &\ge \mu(u_k)(D) + 4\varepsilon^2\,|D|.\end{aligned}$$

Mandando $k \to \infty$, per il Teorema 7.1 si ha $\mu(u_\varepsilon)(D) \ge \mu(u)(D) + 4\varepsilon^2\,|D| > \mu(u)(D)$, e otteniamo una contraddizione. $\square$

Teorema 7.3. *Sia $u \in C(B_R)$ $\mathcal{H}$–convessa, $u = 0$ sul ∂B_R. Se*

$$u(z_0) = \min_{B_R} u,$$

allora esiste una costante positiva c, dipendente da $d(z_0, \partial B_R)$, tale che

$$|u(z_0)|^2 \le c\mu(\Omega)$$

Concludiamo questa nota osservando che dalla stima (13) segue anche la seguente

$$\int_{\Omega'} \det \mathcal{H}(u)\,dz \le C(\mathrm{osc}_\Omega u)^2, \tag{22}$$

e pertanto si potrebbe pensare di definire un'altra misura ν tale che se $u \in C^2(\Omega)$

$$\nu(u)(E) = \int_E \det \mathcal{H}(u)\,dz$$

per ogni insieme boreliano $E \subset \Omega$. Per questa misura ν non può però valere una stima analoga a quella di Aleksandrov, come mostra il seguente controesempio.

Controesempio 7.1. *Siano v e Ω la funzione e l'insieme definiti nella Proposizione 5.2. Si ha che v è continua, $\mathcal{H}$–convessa, $\det \mathcal{H}(v)$ è sommabile in $\bar{\Omega}$ e $\det \mathcal{H}(v) = 0$ in Ω. Pertanto $\nu(\Omega) = 0$. Se per assurdo $|\min_\Omega v|^2 \le c\nu(\Omega)$ per qualche costante c positiva, si avrebbe $v \equiv 0$, e questo è assurdo.*

Riferimenti bibliografici

[1] J. M. Bony. *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicitè du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptic dégénérés.* Ann. Ist. Fourier (Grenoble), **29** (1969) 277-304.

[2] D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu. *Notions of convexity in Carnot groups.* To appear in Comm. Anal. Geom.

[3] D. Gilgarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehrer der Math. Wiss. vol. 224, Springer-Verlag, New York (1977).

[4] C. E. Gutiérrez. *The Monge-Ampère equation.* Birkhäuser, Boston, MA, 2001.

[5] C. E. Gutiérrez, A. Montanari. *Maximum and comparison principles on the Heisenberg group.* Preprint.

[6] F. Lascialfari, A. Montanari. *Smooth regularity for solutions of the Levi Monge-Ampère equation.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **12** (2001) pagg. 115-123.

[7] G. Lu, J. Manfredi, B. Stroffolini. *Convex functions on the Heisenberg group.* Preprint.

[8] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real Variable methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals* Vol. 43 of the Princeton Math. Series. Princeton U. Press. Princeton, NJ, 1993.

[9] N. S. Trudinger, Xu-Jia Wang. *Hessian measures I* Topol. Methods Nonlinear Anal. **10** (1997) 225-239.