Insiemi e Logica

Teoria Assiomatica degli insiemi

Zermelo 1908

Parole chiave

Insieme $A, B, X, Y \dots$

elemento $a, b, x, y \dots$

appartenenza $\in$

Un insieme è definito se abbiamo un criterio con cui stabilire se un dato oggetto è o non è elemento dell'insieme

Scriveremo

$$x \in A$$

per indicare che l'elemento x appartiene all'insieme A

Per specificare un insieme

- Elencare gli elementi

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- specificare le proprietà dell'insieme

$$A = \{ n \in \mathbb{N}^+ : n \text{ pari} \}$$

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots \}$$

in generale

$$A = \{ P(x) \}$$

A = insieme di elementi x che soddisfa la proprietà P

Inclusione Stretta $A \subset B$

$x \in A \Rightarrow x \in B$ e $\exists\, x_0 \in B : x_0 \notin A$

tale che

$\notin$ non appartiene

Attenzione:

non confondere $\in$ e $\subseteq$

$$1 \in \{1, 2, 3\}$$

$$\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

$$\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$\emptyset$ = insieme vuoto

$\forall A \quad \emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$

$\forall$ quantificatore universale

si legge "per ogni"

Ω = insieme universo

= insieme di tutti gli insiemi

Insieme delle parti

$A \subseteq \Omega$

$\mathcal{P}(A) = \{ \text{sottoinsiemi di } A \}$

Es $\quad A = \{1, 2, 3\}$

singoletto

$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\},$
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

$\#$ numero degli elementi
o cardinalità

Se $\# A = n \Rightarrow \# \mathcal{P}(A) = 2^n$

In questo caso

$\{1\} \in \mathcal{P}(A)$

e

$\{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

insieme dei numeri Naturali

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

insieme dei numeri Interi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

insieme dei numeri razionali

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri Reali

$$\mathbb{C} = \{x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}\}$$

= insieme dei numeri Complessi

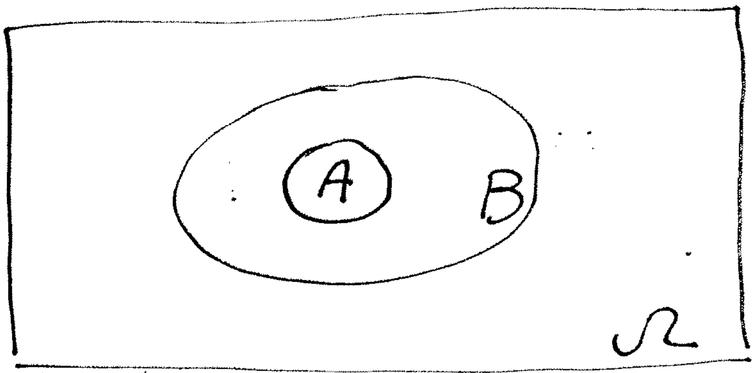
$$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

vedremo che $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Relazioni tra insiemi

Ω insieme universo

Inclusione $A \subseteq B$



linguaggio logico

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Se $x \in A$ allora $x \in B$

Uguaglianza $A = B$

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

linguaggio logico

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

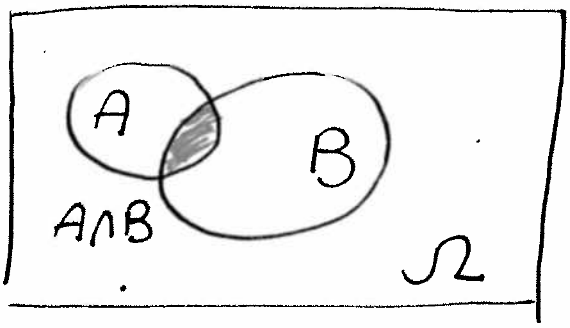
$x \in A$ se e solo se $x \in B$

Operazioni su Insiemi

Siano $A, B \subseteq \Omega$

Intersezione

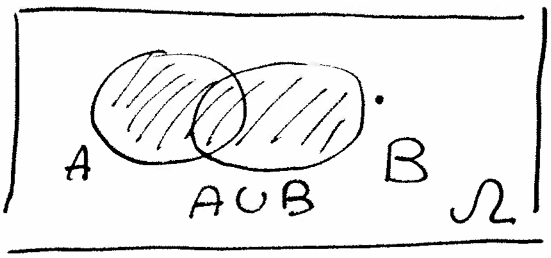
$$A \cap B = \{x \in A \text{ e } x \in B\}$$



e = congiunzione logica = $\wedge$

Unione

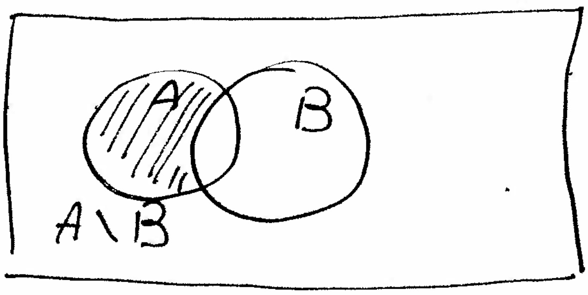
$$A \cup B = \{x \in A \text{ o } x \in B\}$$



o = disgiunzione logica = $\vee$

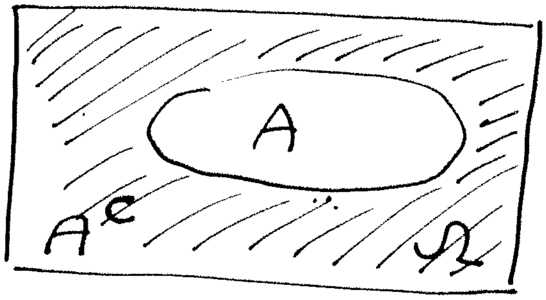
Differenza

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Complementare

$$A^c = \Omega \setminus A = \{x \notin A\}$$



Proprietà di $\cap$

1. $A \cap B = B \cap A$ commutativa
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ associativa
3. $A \cap A = A$ idempotenza
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cap \Omega = A$

Proprietà di $\cup$

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cup \Omega = \Omega$

Proprietà Distributive

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Leggi di De Morgan

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. $(A^c)^c = A$

4. $\Omega^c = \emptyset$

5. $\emptyset^c = \Omega$