Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato

$$M = \sup A \iff \begin{cases} i) & a \leq M \quad \forall a \in A \\ ii) & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A \text{ t.c. } M - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$$

i) ci dice che M è un maggiorante di A

ii) ci dice che M è il min dei maggioranti di A

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A inf. limitato

$$m = \inf A \iff \begin{cases} i) & m \leq a \quad \forall a \in A \\ ii) & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A \text{ t.c. } a_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$$

i) m è un minorante di A

ii) m è il max dei minoranti di A

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A \neq \emptyset$

Se A non è superiormente limitato

poniamo $\quad \sup A = +\infty$

Se A non è inferiormente limitato

poniamo $\quad \inf A = -\infty$

$$\sup A = +\infty \iff \forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : a \geq \ell$$

$$\inf A = -\infty \iff \forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : a \leq \ell$$

Teorema (di Archimede)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{N}^+ \quad \text{t.c.} \quad x < m$$

<u>Dim</u> Per ASSURDO, se $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq x \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$

$\Rightarrow x$ maggiorente di $\mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{N}^+$ superiormente limitato

$\Rightarrow \exists M = \sup \mathbb{N}^+ \in \mathbb{R} \Rightarrow m+1 \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$

$\Rightarrow m \leq M-1 \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$

cioè $M-1$ è un maggiorente $\mathbb{N}^+$

e questo è <u>assurdo</u> perché M è il minimo dei maggioranti

Principio di Induzione

Supponiamo di voler dimostrare che

$$p(n) \text{ è vera } \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Il principio di induzione afferma che

i) se $\underline{p(1)}$ è vera

ii) se $p(n) \Rightarrow p(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\Longrightarrow \quad p(n) \text{ è vera } \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Attenzione: in ii) si suppone $p(n)$ vera (IPOTESI INDUTTIVA) e si dimostra l'implicazione $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$$p(1) \Rightarrow p(2) \Rightarrow p(3) \Rightarrow p(4) \ldots - \; -$$

Esempio 1 (Formula di Gauss)

$$\text{"}\underbrace{1+2+\dots+n}_{\text{Somma dei primi } n \text{ numeri naturali positivi}} = \frac{n(n+1)}{2}\text{"} \qquad P(n)$$

i) per $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow P(1) \text{ e' vera}$$

ii) Supponiamo $p(n)$ vera e dimostriamo che allora vale $p(n+1)$

$$(1+\dots+n) + (n+1) \underset{\substack{\uparrow \\ p(n)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\Rightarrow p(n+1)$ e' vera

Es 2. Disuguaglianza di Bernoulli

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}^+$

"$(1+x)^n \geq 1 + nx$" $p(n)$

i) $(1+x)^1 = 1 + x$ $\Rightarrow$ $p(1)$ e' vera

ii) Ipotesi induttiva $p(n)$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \underset{p(n)}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Abbiamo dim l'implicazione

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$\Rightarrow$ $p(n)$ e' vera $\forall n \in \mathbb{N}^+$

Es. 3 Somma geometrica di ragione $x \neq 1$

$p(n)$ "$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$", $\forall n \in \mathbb{N}^+$

i) $p(1)$ $\quad 1 + x = \dfrac{1 - x^2}{1-x} = \dfrac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{1-x}}$ vera $\forall x \neq 1$

ii) Supponiamo vera $p(n)$ e dimostriamo $p(n+1)$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} \underset{\uparrow\, p(n)}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} =$$

$$= \frac{1 - \cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}} - x^{n+2}}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1-x}$$

$\Rightarrow$ $p(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}^+$

Definizione

f si dice <u>iniettiva</u> (in breve 1-1) se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f si dice <u>suriettiva</u> (in breve su) se

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad t.c. \quad f(x) = y$$

f si dice <u>biettiva</u> se è 1-1 e su

Funzioni invertibili sono le funzioni biettive

$$\forall y \in B \quad \exists ! \, x \in A \quad t.c. \quad f(x) = y$$

esiste ed è unico

In tal caso si pone

$$f^{-1} : B \longrightarrow A \quad t.c. \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

$$e \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$$

Funzioni

Sia $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed uno solo elemento di B

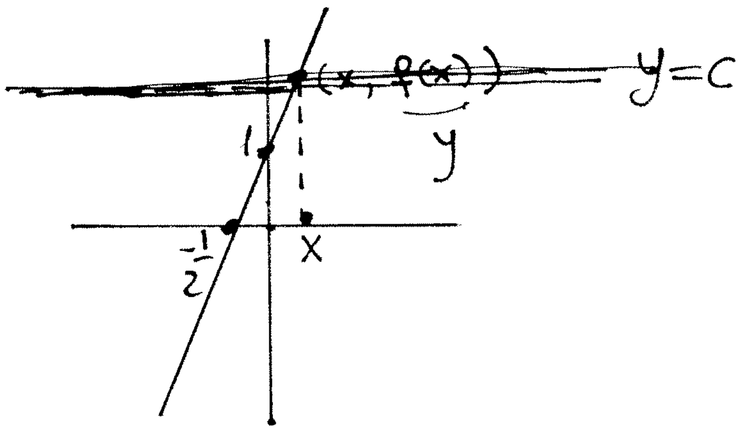
$A =$ dominio di f $\qquad$ $B =$ codominio di f

$x =$ argomento $\qquad$ $f(x)$.

Rappresentazione cartesiana

ad ogni $x \in A$ si fa corrispondere un punto $(x, f(x))$ nel sistema di riferimento cartesiano

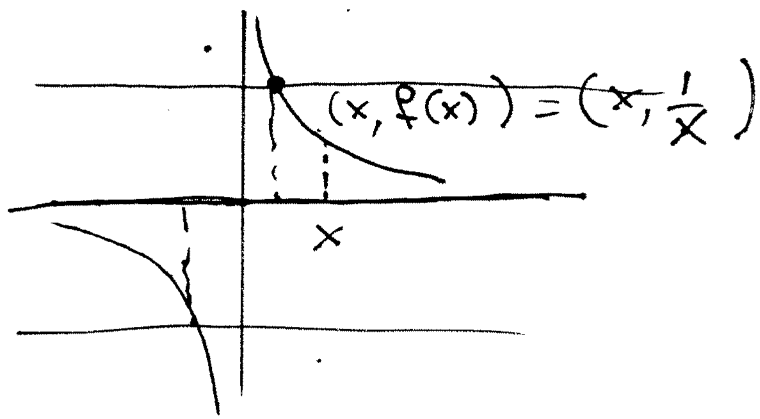
ES 1 $\quad f(x) = 2x + 1 \quad , \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



$y = f(x)$

ES 2 $\quad f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = \frac{1}{x}$.



ES1. $f(x) = 2x+1$, $f : \mathbb{R} \xrightarrow[su]{1-1} \mathbb{R}$

per trovare f^{-1} procedo così

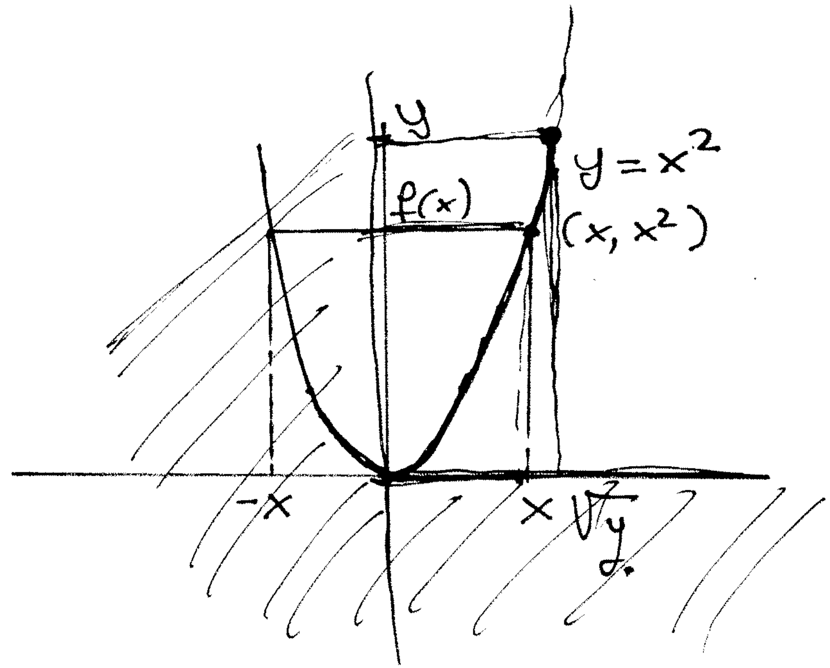
$$y = f(x) = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} = f^{-1}(y)$$

ES2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow[su]{1-1} \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} = f^{-1}(y)$$

ES3. $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

su $\mathbb{R}$ non è 1-1



$f : \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \xrightarrow[su]{1-1} \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$

Funzioni Monotòne

$f : A \to B$ è monotona se $\forall x_1, x_2 \in A$ vale almeno una delle seguenti condizioni

i) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ monot. crescente $f\uparrow$

ii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ monot. strettamente cresc. $f\uparrow$

iii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ monot. decrescente $f\downarrow$

iv) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ monot. strett. decr. $f\downarrow$

Prop. Se $f : A \underset{su}{\to} B$ è monotona strettamente

$\Rightarrow f$ è invertibile

Dim Se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ per la stretta monotonia
non può essere $x_1 < x_2$
e non può essere $x_2 < x_1$
$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ è 1-1.

Funzioni affini

$$f(x) = mx + q \quad , \quad m, q \in \mathbb{R}$$

è l'equazione di una retta

Se $m \neq 0$ è strett. monotona

se $m > 0$ $f \uparrow$

Se $m < 0$ $f \downarrow$