Limiti notevoli

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Più in generale se $a_n \longrightarrow \pm\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Esempi

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1}$$

$$a_n = (n^b)^{1/n} = \sqrt[n]{n^b} \quad , 0<b<1$$

Tesi $\boxed{\sqrt[n]{n^b} \longrightarrow 1}$, $0<b<1$

<u>DIM</u>

Sia $b_n = \sqrt[n]{n^b} - 1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\Rightarrow \quad n^b = (b_n + 1)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\, b_n$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq b_n \leq \frac{n^b - 1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow b_n \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \sqrt[n]{n^b} \longrightarrow 1$$

Conseguenze

$$\lg_e \sqrt[n]{n^b} = \frac{b}{n} \lg n \longrightarrow \lg 1 = 0$$

$\forall b \in \,]0,1[$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\lg n}{n} \longrightarrow 0}$$

Più in generale, per $\beta > 0$

$$\frac{\lg n}{n^\beta} = \frac{1}{\beta} \underbrace{\frac{\lg n^\beta}{n^\beta}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

ordiniamo gli infiniti
dal più piccolo al più grande
$\lg n$, n^b con $b>0$, a^n per $a>1$,

$n!$, n^n

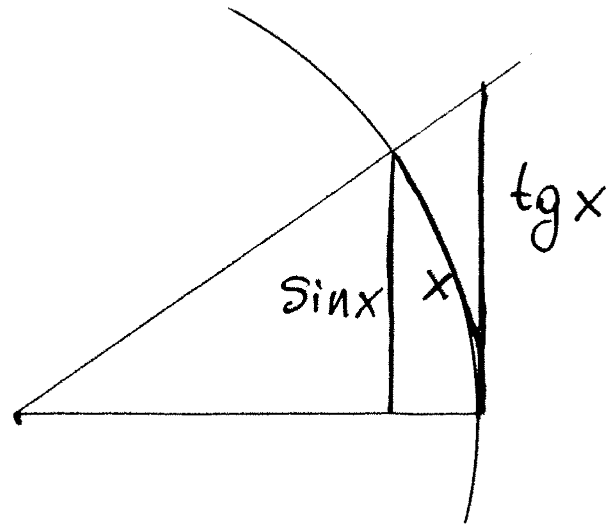
Si avrà

$$\frac{\lg n}{a^n} \longrightarrow 0 \qquad \text{per } a>1$$

$$\frac{\lg n}{n!} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\lg n}{n^n} \longrightarrow 0$$

Funzioni Trigonometriche



per $0 < |x| < \pi/2$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad x \cos x < \sin x < x$$

$$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Sia $\boxed{a_n \longrightarrow 0}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos a_n} < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\sin a_n}{a_n} \longrightarrow 1}$$

Esempi

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

$$n \sin\left(-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= -\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\sin\left(-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot n \longrightarrow -\infty$$

Definizione

Sia a_n una succ di numeri reali

e sia n_k una succ. di $\mathbb{N}^+$

monotona strettamente crescente

La succ. $\underline{a_{n_k}}$ si dice

$\underline{\text{sottosuccessione}}$ $\underline{\text{di } a_n}$

Risulta $n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$

Dim per induzione

$n_1 \geq 1$ è vera perchè $n_1 \in \mathbb{N}^+$

Se $n_k \geq k$ allora

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{per la monotonia}}}{n_{k+1} > n_k} \geq k$$

siccome $n_{k+1} \in \mathbb{N}^+$ deve essere

$$n_{k+1} \geq k+1$$

Esempio

Data a_n

a_{2k} e a_{2k-1}

sono sottosuccessioni di a_n

Proposizione

$$a_n \longrightarrow a \Rightarrow a_{n_k} \longrightarrow a$$

Dim

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ t.c.

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

$\Rightarrow \forall k > n_\varepsilon$ si ha

$$n_k \geq k > n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Esempio

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_{2k} = 1$$

$$a_{2k-1} = -1$$

$\Rightarrow a_n$ non è regolare

Criterio in negativo

Se esistono due sottosucces. di a_n con limite diverso

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$$

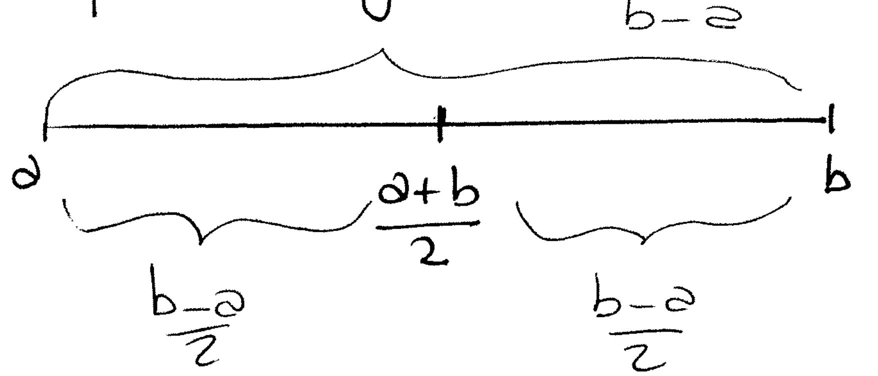
Teorema di Bolzano Weierstrass

Da ogni succ limitata di $\mathbb{R}$ si può estrarre una sottosucc. convergente (in $\mathbb{R}$)

<u>Dim</u> Metodo di dicotomia

x_n è limitata $\Rightarrow$ $x_n \in [a,b]$ per qualche $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$

Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in due parti uguali



Rinomino $[a_1, b_1]$ l'intervallo che contiene i punti x_n per ∞ indici

Sia $n_1 \in \mathbb{N}^+$ t.c. $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$

Divido l'intervallo $[a_1, b_1]$ in 2 parti di lunghezza $\frac{b-a}{2^2}$

Rinomino $[a_2, b_2]$ l'intervallo che contiene punti x_n per infiniti indici e scelgo $n_2 \in \mathbb{N}^+$ t.c.

1. $n_1 \leq n_2$
2. $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$

Iterando questo argomento k volte ottengo una sottosucc. x_{n_k} t.c.

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

Osservo che $b_k \downarrow$ inferiormente limitata da a

$a_k \uparrow$ super. limitata da b

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{k \to +\infty} a_k = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{k \to +\infty} b_k = \beta \in \mathbb{R}$$

e $\quad b_k - a_k = \dfrac{(b-a)}{2^k}$

pertanto

$$
\begin{array}{ccccc}
b_k & = & a_k & + & \dfrac{b-a}{2^k} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\beta & & \alpha & & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad \beta = \alpha$

Inoltre

$$
\begin{array}{ccccc}
a_k & \leq & x_{n_k} & \leq & b_k \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\alpha & & & & \alpha
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \alpha$$

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ è un <u>punto</u> di <u>accumulazione</u> per A se

$$\forall r > 0 \quad]x_0 - r, x_0 + r[\cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

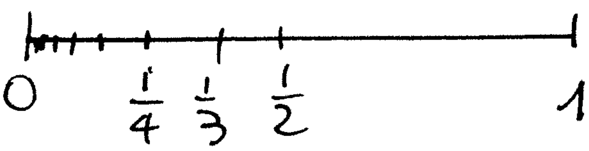
Notazione

$$\mathcal{D}(A) = \{ x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \text{ punto di accumulazione per } A \}$$

Esempio $\quad A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

$$\Rightarrow 0 \in \mathcal{D}(A)$$

$$1 \notin \mathcal{D}(A)$$



Proposizione

$x_0 \in \mathcal{D}(A)$ se e solo se

$\forall r > 0 \quad]x_0 - r, x_0 + r[\cap (A \setminus \{x_0\})$
contiene ∞ punti

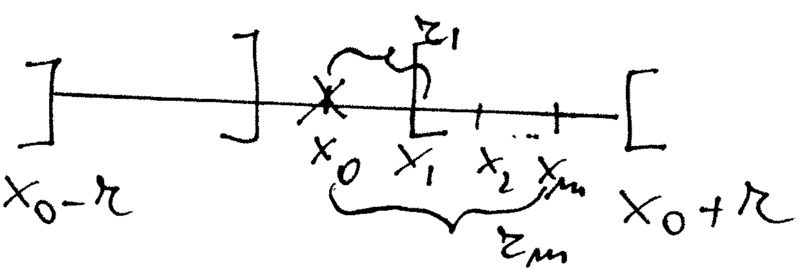
<u>Dim</u>

Se $\forall r>0 \quad]x_0 - r, x_0 + r[\cap (A \setminus \{x_0\})$
contiene ∞ punti $\Rightarrow x_0 \in \mathcal{D}(A)$

Viceversa. Se $x_0 \in \mathcal{D}(A)$

supponiamo per assurdo

$\exists r > 0$ t.c. $]x_0 - r, x_0 + r[\cap (A \setminus \{x_0\}) =$
$= \{x_1, \dots, x_m\}$
numero finito di punti



chiamo $\quad r_1 = |x_1 - x_0|$

$r_2 = |x_2 - x_0|$

$\dots$

$r_m = |x_m - x_0|$

Chiamo

$$\rho = \min\{r, r_1, \dots, r_m\}$$

$$\Rightarrow \quad]x_0-\rho, x_0+\rho[\cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

e questo è assurdo perché $x_0 \in \mathcal{D}(A)$

Limiti di funzioni

$f : A \to \mathbb{R}, \qquad A \subseteq \mathbb{R}, \; x_0 \in \mathcal{D}(A)$

Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

(in breve $\quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$)

se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad$ t.c.

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in]x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon[\cap (A \setminus \{x_0\})$$

Definizione equivalente

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ se e solo se

$\forall x_n \in A \quad x_n \to x_0 \quad x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

Limiti Notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$

Diciamo che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$ se

$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+$ t.c. $f(x) > M$

$$\forall x \in \,]x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M[\, \cap (A \setminus \{x_0\})$$

o anche

$\forall x_n \in A \quad x_n \to x_0 \quad x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$f(x_n) \longrightarrow +\infty$$

Diciamo che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$ se

$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+$ t.c. $f(x) < -M$

$$\forall x \in \,]x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M[\, \cap (A \setminus \{x_0\})$$

o anche

$\forall x_n \in A \quad x_n \to x_0 \quad x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$f(x_n) \longrightarrow -\infty$$

Se A non è superiormente limitato diciamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.c.}$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in \,]\delta_\varepsilon, +\infty[\, \cap A$$

Diciamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.c.} \quad f(x) > M$$

$$\forall x \in \,]\delta_M, +\infty[\, \cap A$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{se}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.c.}$$

$$f(x) < -M \quad \forall x \in \,]\delta_M, +\infty[\, \cap A$$

Se A non è inferiormente limitato diciamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{se}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\forall x \in \,]-\infty, -\delta_\varepsilon[\, \cap A$$

Diciamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$

$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+$ t.c. $f(x) > M$

$$\forall x \in \,]-\infty, -\delta_M[\, \cap A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{se}$$

$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+$ t.c. $f(x) < -M$

$$\forall x \in \,]-\infty, -\delta_M[\, \cap A$$