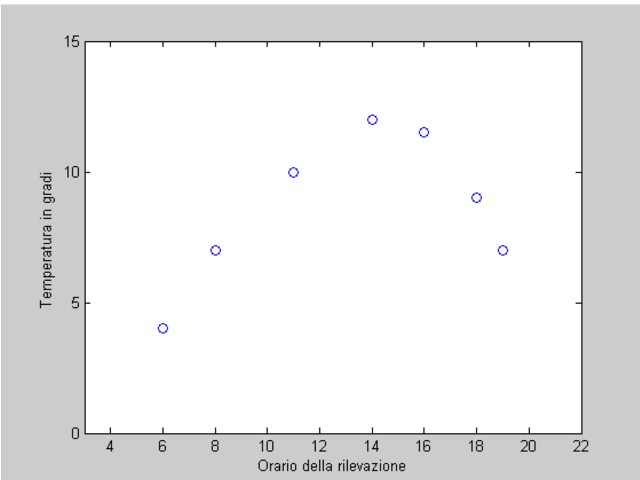
Interpolazione polinomiale di dati sperimentali

Il problema dell'interpolazione di dati sperimentali nasce dall'esigenza di rappresentare in maniera continua un fenomeno reale di cui abbiamo solo una valutazione discreta.

Esempio 1:

Rileviamo la temperatura in alcune ore della giornata e vogliamo sapere l'andamento della temperatura anche in istanti della giornata in cui non l' abbiamo rilevata, ma che siano compresi tra l'istante iniziale e l'istante finale in cui sono avvenute le nostre rilevazioni.

Orario della rilevazione (tempo)	Temperatura
x(0) =6.00	y(0)=4
x(1)= 8.00	y(1)=7
x(2) 11.00	y(2)=10
x(3)=14.00	y(3)=12
x(4)=16.00	y(4)=11.5
x(5)=18.00	y(5)=9
x(6)=19.00	y(6)=7



In pratica, note le temperature y_i , rilevate negli istanti di tempo x_i vogliamo avere un'idea dell'andamento della temperatura ad esempio alle ore 12, alle ore 15, cioè in orari in cui non l'abbiamo effettivamente rilevata.

Un possibile modo per risolvere questo problema consiste nell'individuare in un polinomio di grado n quella forma continua che ci permetta di valutare poi il fenomeno anche in istanti diversi da quelli rappresentati da y_i..

In generale, quindi, note le coppie (x_i,y_i) i=0,..n, $x_i \neq x_k$ $i \neq k$, dove y_i i=$0,\ldots,n$ rappresentano le valutazioni di un fenomeno nelle posizioni x_i,, il problema dell'interpolazione polinomiale si pone nei seguenti termini:
cercare quel polinomio di grado n,

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$$

tale che

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i=0,..n$$

cioè tale che nelle posizioni x_i, (che possono essere sia spaziali che temporali) coincida esattamente con i valori rilevati y_i.
Questo equivale ad individuare quali valori debbano assumere i coefficienti α_i $i=0,..,n$ del polinomio $P_n(x)$, affinchè esso soddisfi le nostre condizioni. Tale polinomio prende il nome di **polinomio interpolatore**.
Una volta individuati tali coefficienti, avremo a disposizione la formula analitica del polinomio interpolatore che potremo valutare anche in altre posizioni z_i che non fanno parte del nostro insieme di punti di valutazione.

Imporre $P_n(x_i)= y_i$, i=0,..n, significa

$$P_n(x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \ldots + \alpha_n x_i^n = y_i \quad \text{per ogni } i=0,\ldots,n$$

Se scriviamo questa relazione per ogni i, ricaveremo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \ldots + \alpha_n x_0^n = y_0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \ldots + \alpha_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Quindi i coefficienti α_i $i=0,..,n$ del polinomio $p(x)$, che soddisfa le condizioni $p(x_i)= y_i$, i=0,..n, sono la soluzione del precedente sistema lineare.
In termini matriciali, questo sistema lineare si può scrivere nel seguente modo:

$$A\,\alpha=y \qquad (1)$$

dove la matrice dei coefficienti A di questo sistema lineare è la matrice di dimensione $(n+1)\times(n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

che è la matrice di Vandermonde , $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ è il vettore di ordine $n+1$, la cui i-esima componente è rappresentata dalla i-esima valutazione y_i, ed $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ è il vettore delle incognite di ordine $n+1$.

Il sistema lineare (1) ammette una ed una soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti è quadrata ed ha rango massimo.
La matrice dei coefficienti è quadrata perché il numero delle condizioni che imponiamo è uguale al numero delle incognite. E' sempre a rango massimo purchè $x_i \neq x_k \;\; i \neq k$. Vale infatti il seguente risultato.

La matrice di Vandermonde ha sempre rango massimo purchè $x_i \neq x_k \;\; i \neq k$.

Quindi siamo sicuri che, dal punto di vista teorico, il problema dell'interpolazione polinomiale ammette sempre soluzione e questa è unica.
Il polinomio interpolatore esiste sempre ed è unico.

Esempio 2:

Supponiamo di voler costruire il polinomio di grado 2, cioè la parabola, che interpola le coppie di dati:

(-1,2), (1,1), (2,1)

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \ + \alpha_2 x^2$$

tale che:

$$p(x_i) = y_i, \quad i=0,..2.$$

Imponendo queste condizioni di interpolazione nasce il sistema lineare

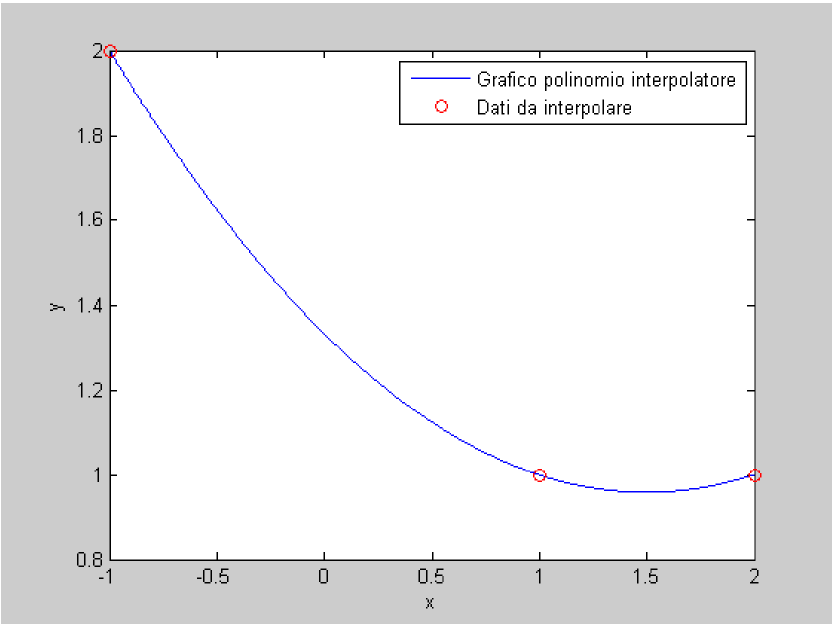
$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 = 2 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 = 1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 4 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione ci fornisce il coefficienti del polinomio cercato:

$$\alpha_0 = \frac{4}{3}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{6}$$

Quindi

$$p(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x \ + \frac{1}{6}x^2$$



Osservazione: La matrice dei coefficienti di Vandermonde, come abbiamo visto nelle lezioni precedenti, è una matrice molto mal condizionata , per cui la soluzione del sistema lineare (1) è un problema mal posto e quindi molto sensibile alle piccole inevitabili perturbazioni sui dati.
Occorre quindi cambiare approccio al problema.

Una strada alternativa per calcolare il polinomio interpolatore $p(x_i)= y_i$, è di esprimere il polinomio interpolatore nella forma di Lagrange.

Polinomio interpolatore nella forma di Lagrange

Dati le coppie (x_i,y_i) i=0,..n, $x_i \neq x_k$ $i \neq k$, il polinomio di grado n che le interpola può essere espresso nella seguente forma di Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) \quad (2)$$

dove

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} =$$

$$= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}$$

è il j-esimo polinomio di base di Lagrange relativo ai punti $x_0, x_1,\dots x_n$.

$L_j(x)$ è un polinomio di grado n che gode della seguente proprietà:

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & se \quad k = j \\ 0 & se \quad k \neq j \end{cases}$$

Infatti se valutiamo $L_j(x)$ in $x = x_j$, si ha:

$$L_j(x_j) = \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1)....(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})....(x_j - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)....(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})....(x_j - x_n)}$$

Si nota che numeratore e denominatore sono uguali ed quindi il loro rapporto vale 1.

Se valutiamo $L_j(x)$ in $x = x_k$, con $i \neq k$, si ha:

$$L_j(x_k) = \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1)....(x_k - x_k)...(x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1})....(x_k - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)....(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})....(x_j - x_n)}$$

Si nota che al numeratore si annulla un fattore, che porta ad annullare tutto il numeratore, quindi il rapporto vale 0.

Complessità computazionale del Polinomio interpolatore nella forma di Lagrange.

Abbiamo visto che la formula del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange è:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$$

con

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})....(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)....(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})....(x_j-x_n)}$$

Per il calcolo del polinomio di Lagrange $L_j(x)$ di grado n sono necessarie n-*1* moltiplicazioni per determinare il numeratore ed n-*1* moltiplicazioni per determinare il denominatore, quindi 2(n-*1*) moltiplicazioni in totale.

Di questi polinomi ne dobbiamo calcolare n+1 e quindi in totale il numero di moltiplicazioni da effettuare è 2(n-*1*)(n+1). A queste bisogna aggiungere (n+1) moltiplicazioni per calcolare la sommatoria. Quindi la valutazione del polinomio interpolatore di Lagrange in un punto è dell'ordine $O(2n^2)$.

Se dobbiamo effettuare la valutazione del polinomio interpolatore di Lagrange in $M>n$ punti avremo una complessità computazionale dell'ordine di $O(2n^2 \cdot M)$.

In genere M è molto maggiore di n. Questa complessità è molto elevata.

Nasce l'esigenza di trovare un'altra formulazione del polinomio interpolatore, che abbia una complessità computazionale più bassa e che sia stabile.

Questa è data dal Polinomio interpolatore di Newton.

Esempio 3:

Costruiamo i polinomi di base di Lagrange con n=2.

Siano $x_0 = 0$ $x_1=1$ $x_2=2$.

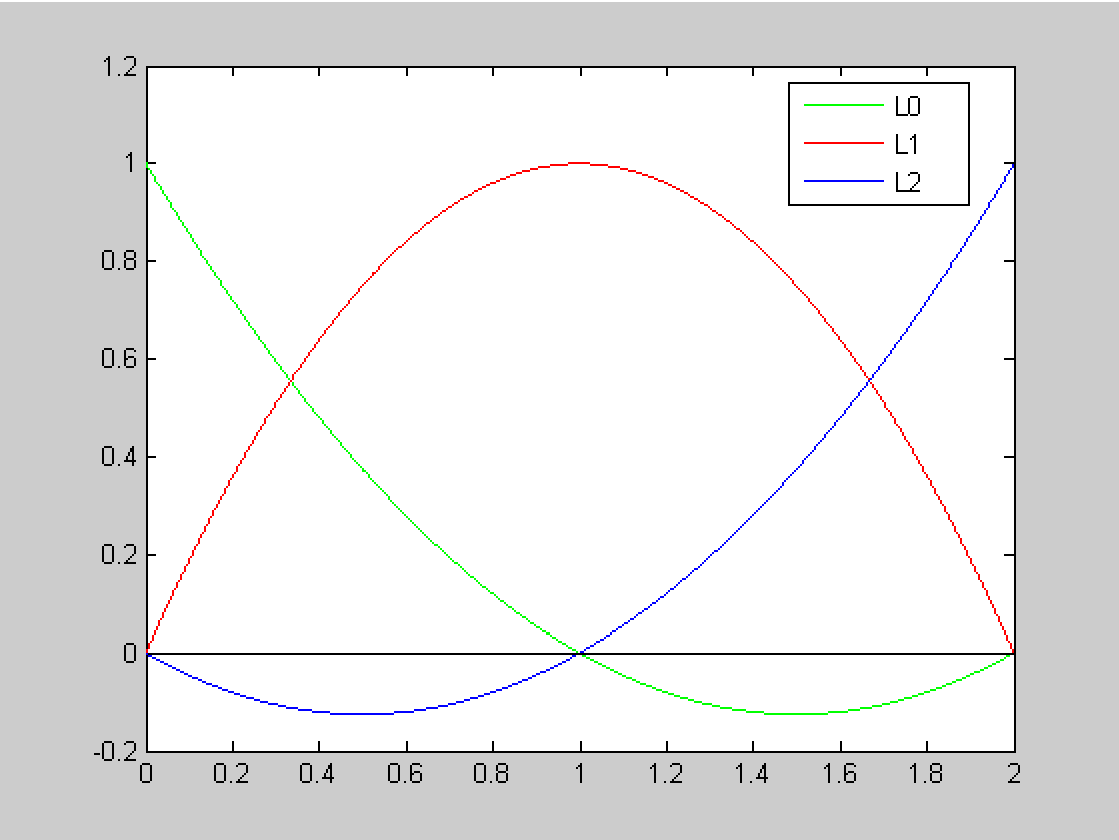
$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{2} \frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1).(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0).(x-2)}{(1-0)(1-2)}=-x^2+2x$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0).(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

Nella figura successiva sono visualizzati i grafici di questi tre polinomi:



Adesso verifichiamo che il polinomio (2) espresso come combinazione lineare di polinomi di base di Lagrange è interpolante.

Cioè vogliamo verificare che

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_i) = y_i \qquad i = 0,\dots,n$$

Infatti, calcoliamo $P_n(x_i)$ e verifichiamo che vale esattamente y_i

$$P_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_i L_i(x_i) + \dots . y_n L_n(x_i)$$

Nella relazione precedente, per le proprietà dei polinomi di base di Lagrange, l'unico polinomio di base di Lagrange diverso da zero nel punto x_i è $L_i(x)$ che nel punto x_i vale 1.

Quindi segue che :

$$P_n(x_i) = y_i$$

Esempio 4.

Supponiamo di voler costruire il polinomio nella forma di Lagrange che interpola le coppie di dati:

(-1,2), (1,1), (2,1)

Dobbiamo quindi individuare il polinomio di grado 2 che interpola i dati assegnati:

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j L_j(x)$$

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \qquad (3)$$

Calcoliamo i polinomi di base di Lagrange:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1).(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{1}{6}(x-1)\cdot(x-2)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1).(x-1)}{(1+1)(1-2)}=-\frac{1}{2}(x+1)\cdot(x-2)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x+1).(x-1)}{(2+1)(2-1)}=\frac{1}{3}(x+1)\cdot(x-1)$$

Sostituendo in (3) queste espressioni per gli $L_j(x)$ j=0,1,2 e y_0= 2 y_1=1 y_2=1, si ha

$$P_2(x)=2\cdot\frac{1}{6}(x-1)(x-2)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\right)+1\left(\frac{1}{3}(x+1)(x-1)\right)$$

Effettuando le opportune moltiplicazioni e raccogliendo si ottiene

$$P_2(x)=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2$$

Osservazione : Abbiamo trovato la stessa espressione del polinomio interpolatore che avevamo trovato imponendo le condizioni di interpolazione e risolvendo il sistema lineare. Il polinomio interpolatore è unico.

Polinomio interpolatore nella forma di Newton

Un altro modo per rappresentare il polinomio di interpolazione è quello fornito dalla forma di Newton che consente di calcolare il valore di $P_n(x)$ in un punto $\overline{x}$ con un numero di operazioni inferiore a quello richiesto dal polinomio di Lagrange.

Per rappresentare il polinomio interpolatore nella forma di Newton è necessario introdurre le differenze divise.

Differenze divise

Siano $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ n+1 punti assegnati e distinti, ($x_i \neq x_k \quad i \neq k$) dell'intervallo [a,b] e siano $y_i=f(x_i)$ i valori assunti in questi punti da una funzione f(x) definita in [a,b].

Si definisce differenze divisa di ordine 0 di $f(x)$

$$f[x_0]=f(x_0)$$

Si definisce differenza divisa di ordine 1

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1}$$

Si definisce differenza divisa di ordine 2

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

ed in generale quella di ordine n

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\ldots,x_n]}{x_0-x_n}$$

Proprietà delle differenze divise

1) Le differenze divise sono invarianti per permutazioni dei loro argomenti, cioè data una qualsiasi permutazione $(i_0, i_1, ..., i_n)$ degli indici (0,1,…,*n*), risulta che

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_n}]$$

2) Sia *f*(*x*) una funzione definita in [a,b] e di classe C^n in [a,b]. Allora la derivata *n*-esima di *f*(*x*) e la differenza divisa di ordine *n* sono legati dalla seguente relazione:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

dove $\xi \in (x_0, x_n)$.

Nel caso di *n*=1 (differenze divise del primo ordine), questo risultato coincide con il

Teorema del valor medio di Lagrange

Sia $f:[a,b] \to R$ *una funzione continua e derivabile in [a,b], allora*

$$\exists \quad \xi \in (a,b) \quad : \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si ricava, quindi, che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi_1) \quad \xi_1 \in (x_0, x_1)$$

Costruzione delle differenze divise

La costruzione delle differenze divise può essere schematizzata nel seguente modo:

$$\begin{array}{lllll}
f[x_0] & & & & \\
f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & \\
f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
f[x_n] & f[x_{n-1}, x_n] & & & f[x_0, x_1, \ldots x_n]
\end{array}$$

Un algoritmo efficiente per il calcolo della tabella delle differenze divise è:

```
per k = 0,…,n
        d (k) = y(k)
end

per i = 1, 2, …, n
        per k = n, n-1 ,…, i
                d (k) = ( d (k) - d (k-1) ) / ( x(k)-x(k-i) )
          end
 end
```

Al termine di questo algoritmo, nel vettore d è conservata solo la diagonale della tabelle delle differenze divise, cioè

$$d_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \; k=0,1,..,n.$$

Per il calcolo della complessità computazionale della costruzione della tabella delle differenze divise, bisogna tenere conto che essa viene costruita colonna per colonna, le colonne da calcolare sono n e nella colonna i-esima vi sono n-i elementi da costruire, per ognuno dei quali è necessaria una divisione. Quindi la complessità sarà data da:

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)=\frac{n(n+1)}{2}=O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

Una volta definite le differenze divise, il polinomio interpolatore si esprime nella seguente forma di Newton

$$P_n(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\dots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

Osservazione:

Valutare un polinomio di grado n

$$P_n(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots+\alpha_n x^n$$

in un punto ha una complessità di $O(n^2)$.

Uno schema efficiente per valutare il un polinomio di grado n in un punto è lo schema di Horner.

Il polinomio $P_n(x)$ può essere espresso in maniera algebricamente equivalente nel seguente modo:

$$p(x)=\alpha_0+x(\alpha_1+\alpha_2 x+\dots+\alpha_n x^{n-1})=$$
$$\alpha_0+x(\alpha_1+x(\alpha_2+\dots+\alpha_n x^{n-2}))$$

E continuando a raccogliere x, si ottiene il seguente schema annidato:

$$p(x)=\alpha_0+x(\alpha_1+x(\alpha_2+\dots+x(a_{n-1}+\alpha_n x)))$$

Questo schema ha una complessità di solo n operazioni moltiplicative.

Vediamo adesso lo schema di Horner per valutare il polinomio nella forma di Newton in un punto:

Posto

$$d_k = f[x_0, x_1, ..., x_k], \; k=0,1,..,n.$$

scriviamo il polinomio nella forma di Newton di grado n nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P_n(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + ... \\ + d_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Il polinomio espresso nello schema di Horner avrà la seguente forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) = d_0 + (x-x_0)(d_1 + d_2(x-x_1) + ... \\ + d_n(x-x_1)...(x-x_{n-1})) \end{aligned}$$

da cui continuando a raccogliere i fattori $(x-x_i)$ $i=1,..,n$ si ha

$$\begin{aligned} P_n(x) = d_0 + (x-x_0)(d_1 + (x-x_1)(d_2 + ... \\ + (d_{n-1} + (x-x_{n-1})d_n))) \end{aligned}$$

La valutazione del polinomio interpolatore nella forma di Newton può avvenire, quindi, mediante il seguente algoritmo:

Pn= d(n)

for i = n-1,n-2,…,0

Pn = d(i) + (x-x(i)) Pn*

end

che ha una complessità computazionale in termini di operazioni moltiplicative dell'ordine di *O(n)*.

Complessità computazionale per il calcolo del Polinomio interpolatore nella forma di Newton.

Per calcolare il polinomio interpolatore di Newton in un punto usando lo schema di Horner:

$$P_n(x) = d_0 + (x - x_0)(d_1 + (x - x_1)(d_2 + \dots + (d_{n-1} + (x - x_{n-1})d_n)))$$

Sono necessarie $O\left(\frac{n^2}{2}\right)$ operazioni moltiplicative per il calcolo della tabella delle differenze divise, la cui diagonale rappresenta i coefficienti del polinomio, ed *O(n)* operazioni moltiplicative per valutarlo in un punto.

Quindi la complessità è

$$O\left(\frac{n^2}{2}\right) + O(n)$$

per valutarlo in *M* punti di valutazione con *M>n* la complessità è:

$$O\left(\frac{n^2}{2}\right) + O(M \cdot n)$$

che è inferiore alla complessità della valutazione in un punto del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange.

Un ulteriore vantaggio della forma di Newton del polinomio interpolatore è che nel caso in cui all' insieme delle n+1 coppie di dati del problema di interpolazione si aggiunge un'altra coppia di dati, non è necessario ricalcolare il polinomio interpolatore dall'inizio, come avverrebbe nel caso polinomio interpolatore espresso nella forma di Lagrange, ma si può sfruttare il polinomio appena calcolato aggiungendogli soltanto un contributo.
Vale, infatti, il seguente

Teorema

Assegnate le coppie (x_i,y_i) $i=0,\ldots,n$ ($x_i \neq x_k$ $i \neq k$) *sia* $P_n(x)$ *polinomio nella forma di Newton di grado* n *che interpola tali coppie di dati. Sia* $P_{n+1}(x)$ *il polinomio di Newton di grado* $n+1$ *che interpola* (x_i,y_i) $i=0,\ldots,n+1$. *Si ha che:*

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\, f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]$$

Esempio 5:
Supponiamo di voler costruire il polinomio di Newton che interpola le coppie di dati:

(-1,2), (1,1), (2,1)

L'espressione del polinomio interpolatore di Newton di grado 2 che interpola tali punti è data da:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0,x_1,x_2]$$

$$
\begin{array}{lll}
f[x_0]=2 & & \\
f[x_1]=1 & f[x_0,x_1]=\dfrac{2-1}{-1-1}=-\dfrac{1}{2} & \\
f[x_2]=1 & f[x_1,x_2]=\dfrac{1-1}{1-2}=0 & f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{-\frac{1}{2}-0}{-1-2}=\dfrac{1}{6} \\
& \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Il polinomio di Newton di grado 2 che interpola le coppie date ha la seguente espressione:

$$P_2(x)=2+(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(x+1)(x-1)\cdot\frac{1}{6}$$

$$P_2(x)=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2$$

Osservazione: Abbiamo trovato la stessa espressione del polinomio interpolatore che avevamo trovato sia imponendo le condizioni di interpolazione e risolvendo il sistema lineare, che utilizzando la forma del polinomio interpolatore espresso nella forma di Lagrange.

Errore nell'interpolazione polinomiale

Stimiamo adesso l'errore che si compie quando al posto della funzione che ha generato i dati si sostituisce la formula del polinomio interpolatore.

Teorema dell'errore

Siano assegnate le coppie (x_i, y_i) $i=0,\dots,n$

$$a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$$

e $y_i=f(x_i)$ *sono i valori assunti in questi punti da una funzione f(x) definita in [a,b] e continua insieme alle sue derivate fino a quella di ordine n+1,* $(f(x) \in C^{n+1}[a,b])$*. Sia* $P_n(x)$ *il polinomio di grado n che interpola tali coppie di dati.*

Sia $\bar{x} \in [a,b]$, *indichiamo con*

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}),$$

risulta allora che

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!}\omega(\bar{x}) f^{(n+1)}(\xi)$$

dove $\zeta \in [a,b]$ *e* $\omega(\bar{x}) = (\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\dots(\bar{x}-x_n)$

Se $\bar{x} = x_i$ allora l'errore è nullo perche si annulla il fattore $\omega(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)..,(x_i - x_i).....(x_i - x_n)$ =0.

Inoltre, l'errore risulta nullo anche nel caso di dati provenienti da funzioni che hanno la derivata n+1 nulla, cioè per funzioni che sono polinomi di grado n.

Tenendo conto della relazione che intercorre tra la derivata n+1-esima di una funzione la differenza divisa di ordine n+1, si ricava una formula equivalente per esprimere l'errore

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \omega(\bar{x})\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$$

Osservazione : La differenza divisa di ordine n+1 di $P_n(x)$ è nulla.

Convergenza del Polinomio interpolatore.

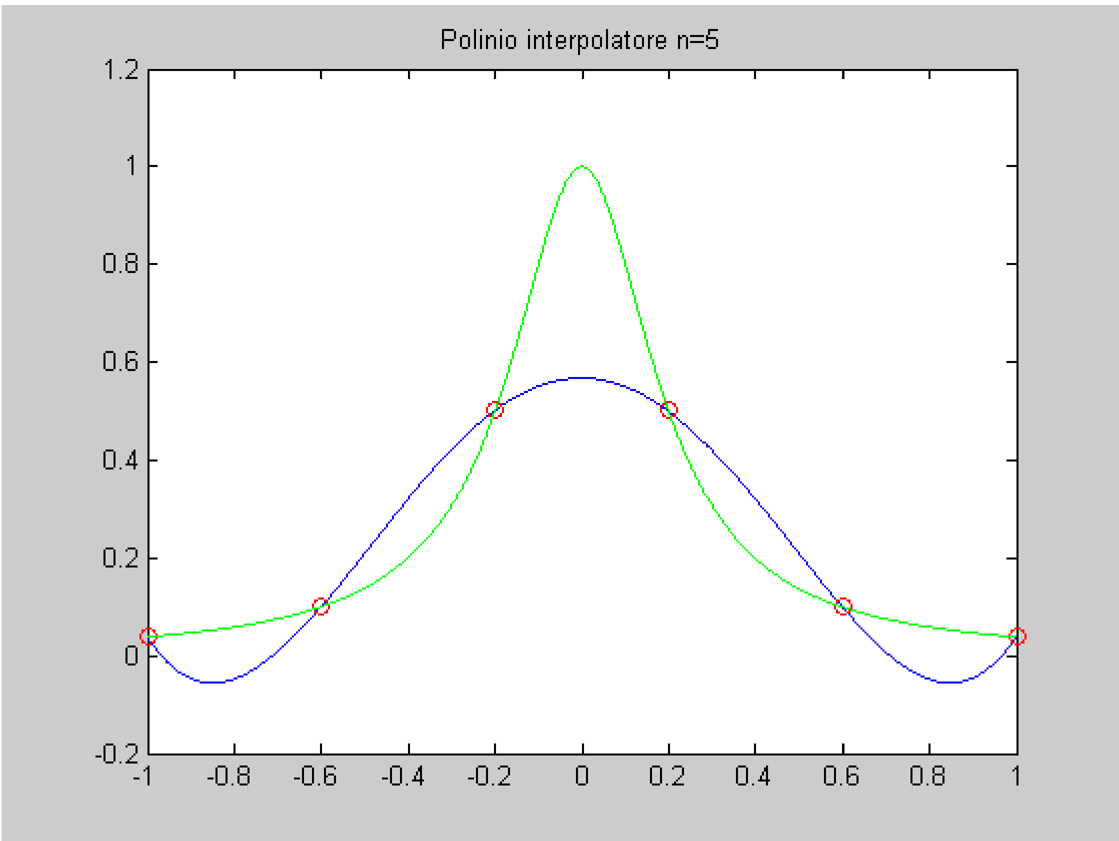
Al crescere del numero dei punti di interpolazione, e quindi del grado del polinomio interpolatore, nel caso in cui i punti x_i siano scelti equidistanti nell'intervallo [a,b] non si ha la convergenza del polinomio interpolatore alla funzione che ha generato i dati: in particolare si ha al centro dell'intervallo una buona approssimazione e delle fitte oscillazioni agli estremi, tipiche dei polinomi di grado elevato.

Esempio 6:

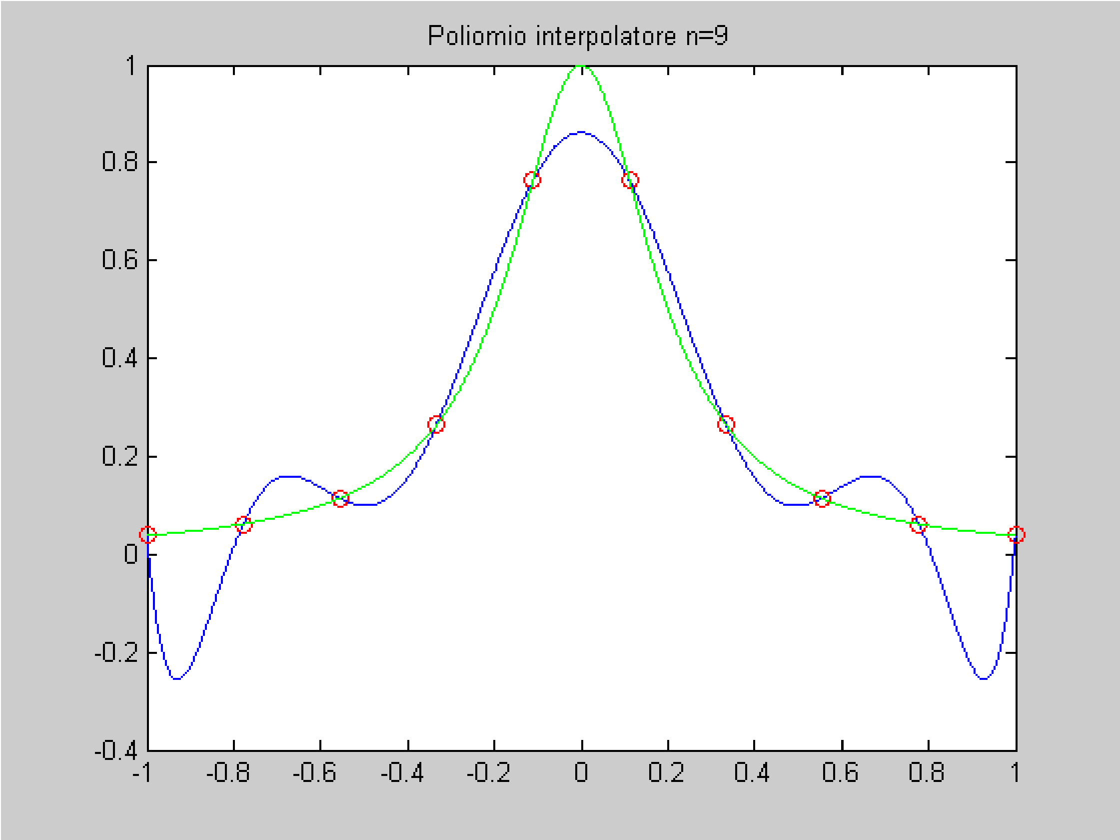
Consideriamo la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

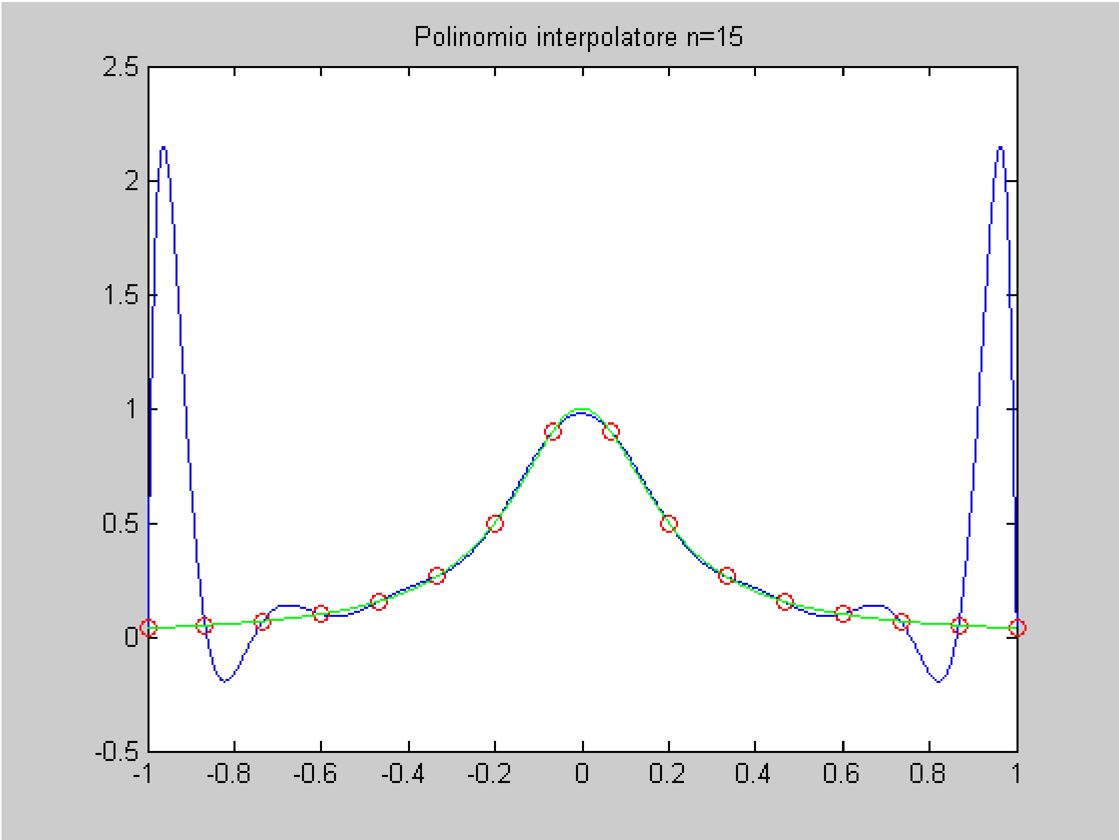
Costruiamo il polinomio di grado *5* che interpola le coppie (x_i, y_i) i=0,..,5 con x_i equidistanti in [-1,1] ed $y_i = f(x_i)$



Costruiamo il polinomio di grado *9* che interpola le coppie (x_i,y_i) i=0,..,9 con x_i equidistanti in [-1,1] ed $y_i = f(x_i)$



Aumentiamo le coppie di osservazioni e consideriamo (x_i,y_i) i=0,..,15



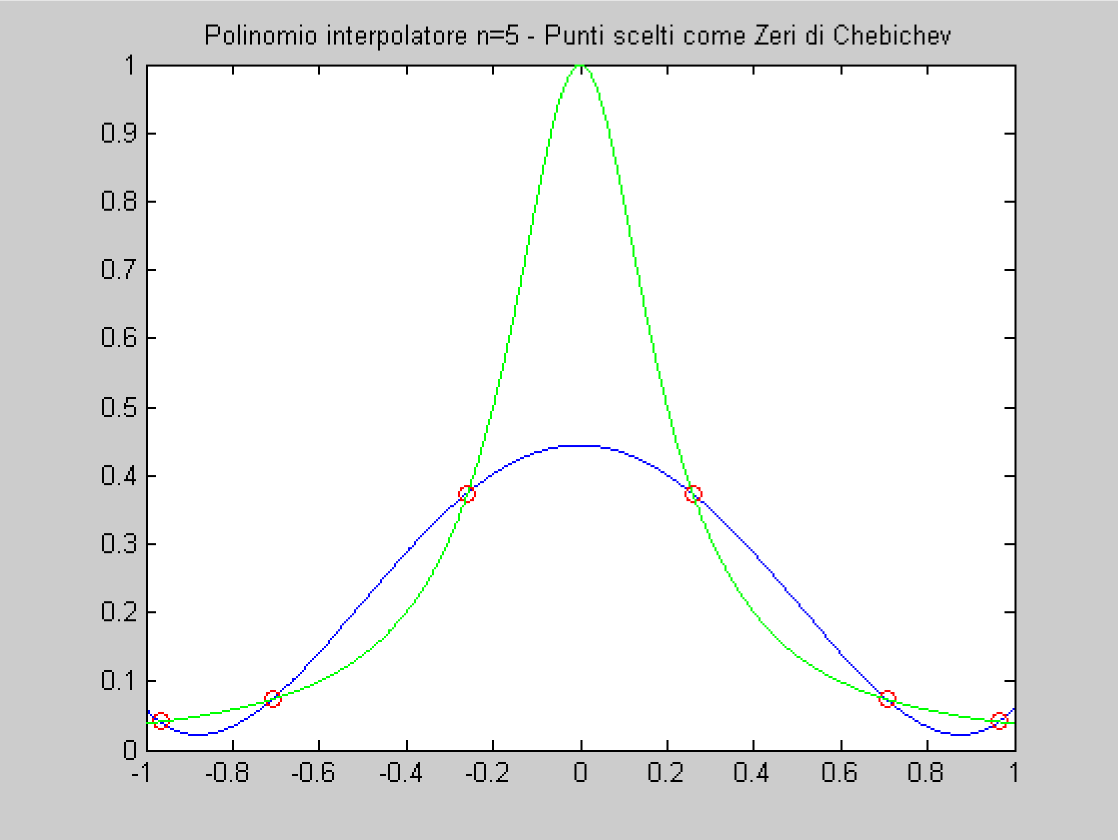
Come si può osservare al crescere del numero delle osservazioni si ha un miglioramento della approssimazione al centro dell'intervallo e delle fitte oscillazioni ai bordi.

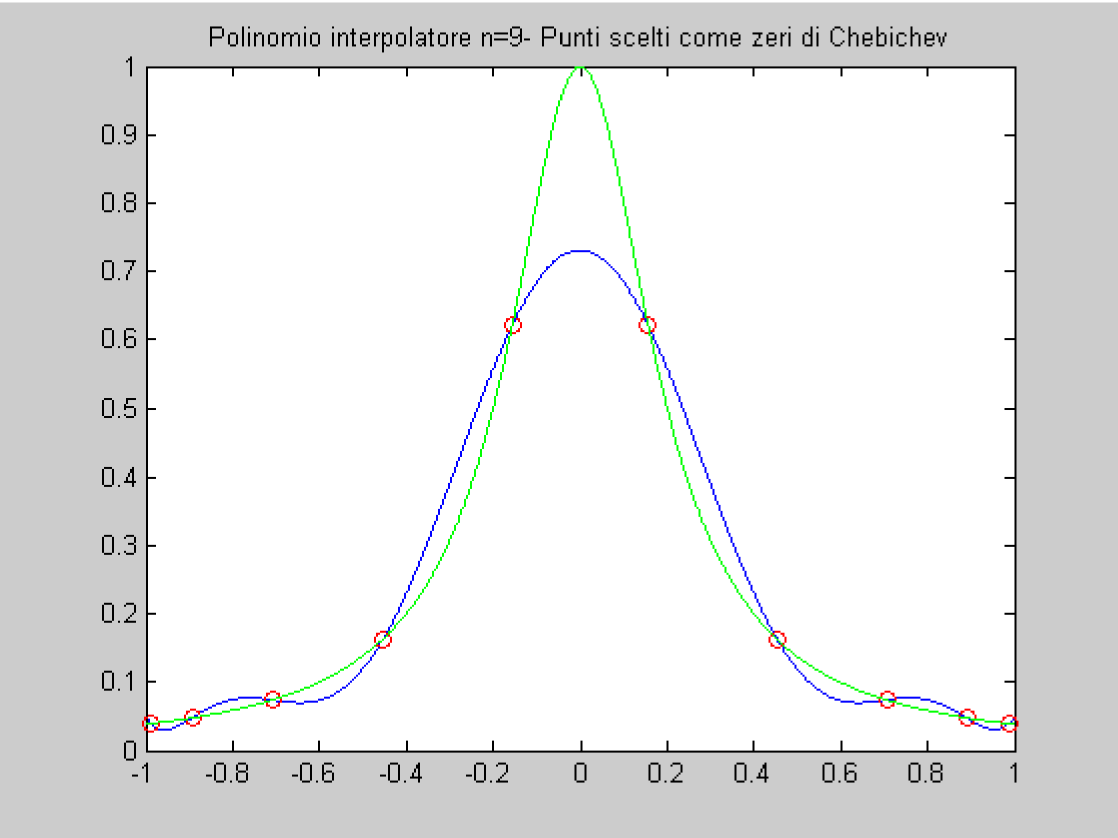
Il polinomio interpolatore al crescere del numero delle osservazioni non converge alla funzione che ha generato i dati.

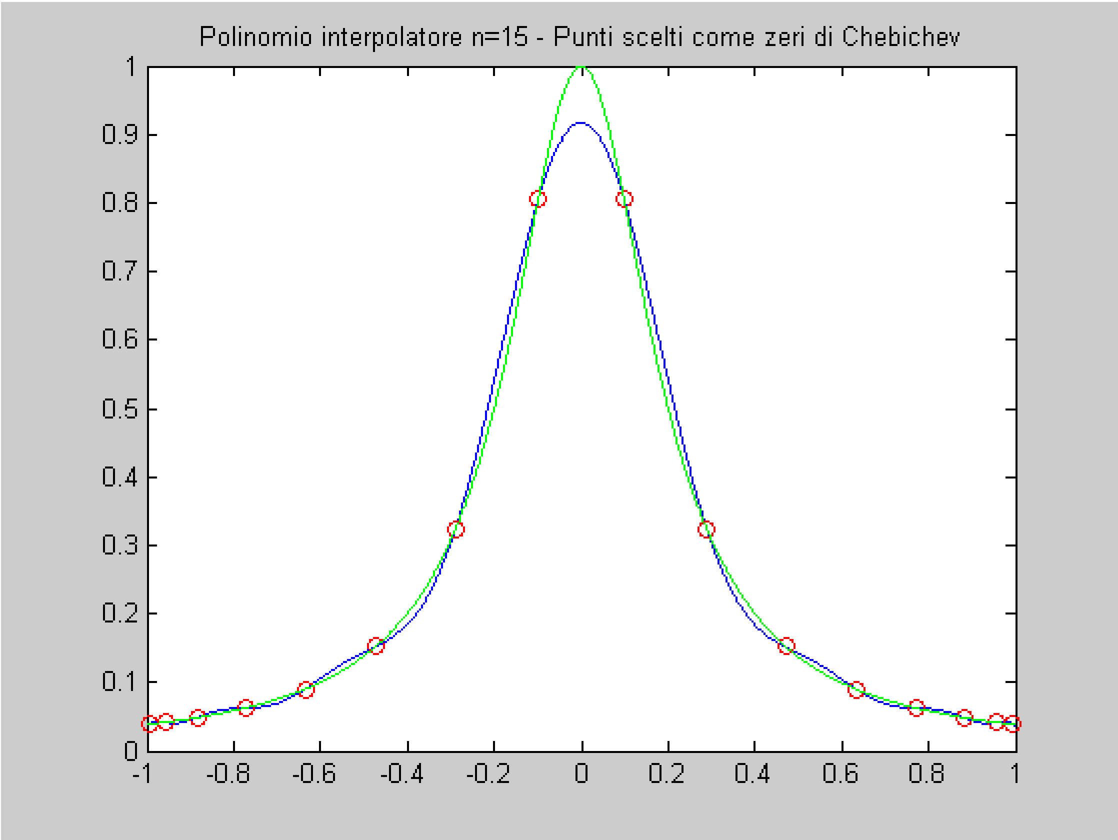
Osservazione: Se i punti x_i vengono scelti come zeri dei polinomi di Chebichev

$$x_i = \cos\left(\frac{1+2\cdot i}{2\cdot(n+1)}\pi\right), \qquad i = 0,\ldots,n$$

allora all'aumentare del numero dei punti di interpolazione si ha la convergenza del polinomio interpolatore alla funzione che ha generato di dati, come mostrato nei seguenti grafici.


Polinomio interpolatore n=5 - Punti scelti come Zeri di Chebichev
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Polinomio interpolatore n=9- Punti scelti come zeri di Chebichev
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Polinomio interpolatore n=15 - Punti scelti come zeri di Chebichev
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1