Richiami di Algebra Lineare

Sia n un numero intero positivo. Sia R^n l'insieme delle n-uple di numeri reali $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Esiste una corrispondenza biunivoca fra le n-uple di numeri reali e i vettori a n componenti reali, cioè

$$\text{(n-uple)} \Leftrightarrow \text{vettori}$$

Si suole indicare con R^n l'insieme dei vettori ad n componenti reali.

$$x \in R^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si definiscano in R^n le operazioni di addizione tra due vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

$$x \in R^n, \; y \in R^n \qquad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y \\ x_2 + y_2 \\ .. \\ \dots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ .. \\ \dots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in R$$

Si dimostra facilmente che esse godono delle seguenti proprietà.

1. L'addizione tra vettori è commutativa ed associativa.

2. L'elemento $0 \in R^n$, cioè il vettore che ha tutte componenti nulle, detto vettore zero o vettore nullo è tale che $v+0=v \quad \forall \quad v \in R^n$;

3. $0 \cdot v=0,\ 1 \cdot v=v$, essendo rispettivamente 0 ed 1 rispettivamente lo zero e l'unità di *R*..

4. Per ogni elemento $v \in R^n$ esiste il suo opposto $-v$ in R^n tale che $v+(-v)=0$;

5. valgono le seguenti proprietà distributive:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x, y \in R^n, \ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$
$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in R^n, \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta$$

6. vale la seguente proprietà associativa:

$$\forall \ \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in R^n \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

L' insieme R^n in cui sono definite queste due operazioni è munito di una struttura di spazio vettoriale sul campo R.

R^n è solo un esempio di spazio vettoriale. Un altro importante esempio di spazio vettoriale è Π_n, l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad *n* sull'intervallo [a,b] su cui sono definite le analoghe operazioni di somma tra due polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per uno scalare.

Ritorniamo per semplicità a parlare di R^n.

Dati k vettori, $v_1, v_2, ..., v_k \in R^n$ e k scalari $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_k \in R$, la quantità

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... \lambda_k v_k$$

si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_k$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_k$

Esempio:

Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ e sia $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 2$.

La combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 con i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sarà:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 =$

$$-3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Definizione di lineare indipendenza: *I vettori* $v_1, v_2, ..., v_k$ *si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... \lambda_k v_k = 0$$

solo per $\lambda_i = 0$ *i=1,2,..,k*, cioè se nessuno di essi può essere ottenuto come combinazione lineare degli altri.

In R^n il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è n, cioè la dimensione dello spazio.

Una n-upla di vettori linearmente indipendenti costituisce una base per R^n , cioè un sistema di vettori generatori di R^n,

Un esempio di base di R^n è la base canonica. Essa è formata dai vettori:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} \leftarrow i \qquad\qquad i=1,\dots n$$

Quando scriviamo un vettore in genere lo pensiamo rappresentato nella base canonica

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots x_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori della base canonica, oltre a essere linearmente indipendenti, possiedono un'ulteriore proprietà: l'ortogonalità. Per definirla è necessario introdurre il concetto di prodotto scalare.

Definiamo il prodotto scalare canonico su R^n, (che è stato munito di struttura di spazio vettoriale)

Definizione: Siano $x, y \in R^n$, il loro prodotto scalare canonico è definito come:

$$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Per indicare il prodotto scalare canonico tra due vettori si può utilizzare anche la notazione equivalente $< x, y >$.

Esempio:

Siano $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, il loro prodotto scalare canonico è dato da:

$$x \cdot y := 3 \cdot (-2) + 0 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = -6 + 2 - 3 = -7$$

In generale, un prodotto scalare sullo spazio vettoriale R^n è un'applicazione da $R^n \times R^n$ a R che gode delle seguenti proprietà:

<u>**Proprietà**</u>

1) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R^n$

2) $x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x \cdot y + \lambda_2 x \cdot y \quad \forall x, y \in R^n, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$

3) $x \cdot x > 0 \quad se \quad x \neq 0$

Definizione di vettori ortogonali. *Due vettori* $x, y \in R^n$ *si dicono* <u>*ortogonali*</u> *rispetto al prodotto scalare introdotto se* $x \cdot y = 0$, *o equivalentemente se* $< x, y >= 0$.

Esempio:

I vettori $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico.

Infatti

$$x \cdot y = 3 + 0 - 3 + 0 = 0$$

Spesso per quantificare gli errori che si commettono nel calcolare un vettore o per misurare delle distanze è necessario misurare la grandezza dei vettori. Introduciamo perciò il concetto di norma di vettori.

Definizione di norma di un vettore

Ogni applicazione da R^n a R si chiama norma su R^n e si indica con $\| \cdot \|$, se gode delle seguenti proprietà:

1) $\|x\| > 0 \quad \forall x \in R^n$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se x=0*

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \qquad \forall \lambda \in R, \forall x \in R^n$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in R^n$

Esempi di norme di vettori sono:

1) Norma 1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2) Norma 2

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Essendo il prodotto scalare canonico tra due vettori di R^n definito come la somma dei prodotti delle loro componenti, la norma due di un vettore può essere definita come la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore, cioè $\| x \|_2 = (< x, x >)^{\frac{1}{2}}$.

In generale si definisce

Norma p

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ p} \right]^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$

e per $p \to \infty$ si ha

Norma infinito

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Si dimostra facilmente che le norme definite soddisfano le proprietà 1), 2), 3).

Le norme definite, nonostante producano risultati diversi, hanno la proprietà di produrre risultati "confrontabili". Questo è garantito dal seguente Teorema.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di vettori, ad esempio* $\|x\|$ *e* $\|x\|_+$, *esistono costanti positive m ed M tali che ogni* $x \in R^n$

$$m \cdot \|x\|_+ \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|_+$$

Si dice che le norme $\|x\|$ *e* $\|x\|_+$ *sono equivalenti.*

Quindi tutte le norme su R^n sono equivalenti.

Si può fare vedere che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x_1\| \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

$$\frac{1}{n}\|x_1\| \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1$$

Matrici

Siano *m* ed *n* due interi positivi. Si definisce matrice (*m*x*n*) una tabella di *m* righe e *n* colonne di elementi reali o complessi del tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Poiché la tabella è costituita da m righe ed n colonne si dice che la matrice ha dimensioni *m* ed *n*, cioè è una matrice $m\times n$. Possiamo pensarla come *n vettori,* detti vettori colonna, di dimensione *m* ciascuno.

Una matrice $m\times 1$ coincide con un vettore colonna appartenente ad R^m; una matrice *1*x*m* coincide con un vettore riga (o trasposto di un vettore colonna) di dimensione *m.*

Se $m=n$ la matrice è quadrata di dimensione n.

L'insieme delle matrici $m\times n$, in genere si indica con $M(m\times n)$

Operazioni tra matrici:

Somma tra matrici

Siano $A, B \in M(m\times n)$ *si definisce matrice somma la matrice* $C \in M(mxn)$ *definita come segue:*

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \quad i = 1,\ldots m, \;\; j = 1,\ldots,n$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Prodotto di uno scalare per una matrice</u>

Siano $A \in M(m \times n)$, $\lambda \in R$ *si definisce*

$$\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}] \quad i = 1,\ldots m \qquad j = 1,\ldots,n$$

$M(m \times n)$ è così munito della <u>struttura di spazio vettoriale.</u>

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3 \quad \lambda A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 6 \\ 9 & 3 & -12 & 3 \\ 0 & 6 & 15 & -3 \end{bmatrix}$$

<u>Prodotto tra matrici</u>

Siano $A \in M(m \times r)$ *e* $B \in M(r \times n)$, *si definisce matrice prodotto la matrice* $C \in M(m \times n)$ *definita come segue:*

$$C = A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \right] \quad i = 1,...m, \quad j = 1,...,n$$

Cioè la matrice C= A·B ha come elemento [i j] il prodotto scalare della riga i-esima di A per la j-esima colonna di B.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Nota bene:</u>

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Non vale in generale la proprietà commutativa.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

L'elemento neutro dell'operazione prodotto tra matrice è la matrice identità:

$$I_{nxn} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & ... & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se $A \in M(n \times n)$ $\qquad$ $I \cdot A = A \cdot I$

Definizione di prodotto matrice vettore*: Data la matrice* $A \in M(m \times n)$ *ed il vettore* $x \in R^n$ *, si definisce prodotto matrice vettore*

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

il vettore di R^m *che ha come i-esima componente* il prodotto scalare tra la riga i-esima della matrice A ed il vettore x

Osservazione:

Dati due vettori $x, y \in R^n$ il prodotto scalare canonico può essere visto anche come:

$$x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = y^T x$$

(matrice riga per matrice colonna)

Attenzione: Il prodotto $x \ y^T$ dà come risultato una matrice *n*×*n*, che prende il nome di *matrice diade.*

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & \dots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

Definizione di matrice inversa: *Si definisce matrice inversa di una matrice* $A \in M(nxn)$*, una matrice* $A^{-1} \in M(nxn)$ *tale che:*

$$A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

Definizione di rango di una matrice: *Si definisce rango di una matrice il numero di vettori colonna linearmente indipendenti di A.*

Esempio: Una matrice diade ha rango 1.

Teorema: *Una matrice* $A \in M(n \times n)$ *si dice invertibile, cioè ammette inversa* $A^{-1} \in M(n \times n)$*, se e solo se è a rango massimo, cioè se ha n colonne tutte linearmente indipendenti.*

Definizione di Matrice Trasposta:

Sia $A \in M(m \times n)$*, si definisce matrice trasposta di A e si indica con* $A^T \in M(n \times m)$*, la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A, cioè*

$$A^T = [a_{ji}] \quad i = 1,..n \quad j = 1,..,m$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Proprietà della trasposizione di matrici.

Se $A, B \in M(m \times n)$, *si ha*

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Se $A \in M(m \times r)$ *e* $B \in M(r \times n)$ *si ha che*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Se $A \in M(n \times n)$ *si ha che*

$$(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$$

cioè l'operazione di trasposizione può essere scambiata con quella di inversione.

Definizione di matrice simmetrica $A \in M(m \times n)$ *si dice simmetrica se* $A^T = A$, *cioè se coincide con la sua trasposta.*

Esempio:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 2 & 6\end{bmatrix} \quad \text{è} \quad \text{simmetrica}$$

Definizione di matrice diagonale. *Una matrice* $A \in M(n\times n)$ *si dice diagonale se*

$$a_{ij} = 0 \quad per\ i \neq j$$

Si può esprimere nel seguente modo:

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

Si definisce matrice inversa di una matrice diagonale, la matrice

$$A^{-1} = diag\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right) \qquad \lambda_i \neq 0 \quad i = 1,...n$$

Definizione di matrice triangolare superiore.

Una matrice $A \in M(m\times n)$ *si dice triangolare superiore se* $a_{ij} = 0 \quad per\ i > j$ **.**

Definizione di matrice triangolare inferiore.

Una matrice $A \in M(m\times n)$ *si dice triangolare inferiore se* $a_{ij} = 0 \quad per\ i < j$ **.**

Osservazione:

Il prodotto di due matrici triangolari superiore dello stesso ordine è ancora una matrice triangolare superiore dello stesso ordine. Analogamente per le matrici triangolari inferiori.

Definizione di sottomatrice:

Sia $A \in M(m \times n)$*, una matrice* $B \in M(p \times q)$ $0 \leq p < m,$ $0 \leq q < n$ *è detta sottomatrice di A se è ottenuta da A eliminando m-p righe ed n-q colonne.*

Definizione di matrice a diagonale dominante

Una matrice $A \in M(nxn)$ *si dice a diagonale dominante se*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots n$$

Definizione di matrice a diagonale strettamente dominante

Una matrice $A \in M(nxn)$ *si dice a diagonale dominante se*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots n$$

Definizione di matrice ortogonale.

Una matrice $A \in M(nxn)$ *è ortogonale se è invertibile e la sua inversa coincide con la sua trasposta:*

$$A^{-1} = A^{T}$$

Proprietà delle matrici ortogonali:

Il prodotto di matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.

Le matrici ortogonali preservano il prodotto scalare canonico e quindi la norma 2 di vettori.

Definizione di matrice simmetrica definita positiva.

Una matrice $A \in M(n \times n)$ *simmetrica è* *definita positiva* *se*

$$A = A^T \ e \quad x^T Ax > 0 \qquad \forall \ x \neq 0$$

Proprietà delle matrici definite positive:

Il prodotto di matrici definite positive è ancora definita positiva.

Se una matrice simmetrica ha elementi diagonali positivi ed è a diagonale strettamente dominante, allora è definita positiva.

Norme di matrici

Definizione: *Sia* $M(m \times n)$ *lo spazio vettoriale delle matrici m×n su R, si dice che l'applicazione* $\|A\|$ *da* $M(m \times n)$ *a R è norma della matrice A se gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|A\| > 0$ *per tutte* $A \neq 0$ *e* $\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \qquad \forall \quad A \in M(m \times n), \ \forall \quad \alpha \in R$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \forall \quad A, B \in M(m \times n)$

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \forall \quad A, B \in M(m \times n)$

Norme compatibili:

Si dice che la norma di una matrice è compatibile con una data norma di vettori se $\forall \quad A \in M(n \times n)$ *e* $\forall \quad x \in R^n$ *si ha:*

$$\|Ax\|_p \leq \|A\| \cdot \|x\|_p$$

Poiché si conoscono le norme di vettori è interessante definire norme di matrici indotte dalle corrispondenti norme di vettori.

Un modo per definire una norma indotta è il seguente:

Sia $A \in M(n \times n)$ *e* $x \in R^n, x \neq 0$, *si consideri ad esempio* $\|x\|_p$. *Poiché* $Ax \in R^n$, *si consideri poi* $\|Ax\|_p$. *Si definisce* <u>norma indotta</u> (o norma naturale), *la più piccola costante C per cui vale la maggiorazione*

$$\|Ax\|_p \leq C \cdot \|x\|_p \qquad (1)$$

da cui

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p$$

$\|A\|_p = C$ *è la più piccola fra le norme compatibili.*

Poiché $\|A\|_p$ *è la più piccola delle costanti per cui vale la maggiorazione (1), significa che:*

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|u\|_p = 1} \|Au\|_p$$

Poiché l'insieme $S = \{u : \|u\|_p = 1\}$ *è un insieme chiuso e limitato ed Au è una funzione continua di u, si ha che:*

$$\|A\|_p = \max_{\|u\|_p = 1} \|Au\|_p$$

Norme indotte dalle norme più comuni su R^n

1) p=1 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\Rightarrow$ $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (viene scelta la colonna di norma 1 maggiore, per cui si ha la massima somma dei moduli degli elementi delle colonne)

2) p=∞ $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$

$\Rightarrow$ $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (viene scelta la riga di norma 1 maggiore, per cui si ha la massima somma dei moduli degli elementi delle righe)

Anche per le matrici vale il concetto di norme equivalenti.

Teorema: *Per ogni coppia di norme di matrici, ad esempio* $\|A\|$ *e* $\|A\|_+$ *esistono sempre due costanti m ed M tali che* $\forall \quad A \in M(nxn)$ *si ha:*

$$m\|A\|_+ \leq \|A\| \leq M\|A\|_+$$

Si dice che $\|A\|$ *e* $\|A\|_+$ *sono norme* *<u>equivalenti.</u>*

<u>Esempio:</u>

Vale la seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{n}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

Esempio:

Pre-moltiplicazione e post-moltiplicazione di una matrice $A \in M(n \times n)$ ***per particolari matrici che eseguono trasformazioni elementari***

1) *Permutazione di 2 righe di A:*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalla matrice identità scambiando due righe tra di loro (in questo esempio la prima riga con la terza riga). P prende il nome di matrice di permutazione.

Effettuare il prodotto $P \cdot A$ equivale a scambiare le stesse due righe della matrice A (in questo caso la prima riga con la terza riga).

Effettuare il prodotto $A \cdot P$ equivale a scambiare la prima colonna della matrice A con la terza colonna.

Il prodotto di matrici di permutazione è ancora una matrice di permutazione.

2) Somma di due righe di A.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenuta inserendo una costante $s \neq 0$ al posto di uno zero nella matrice identità, ha la proprietà che $S \cdot A$ equivale a <u>sommare agli elementi di una riga</u> (individuata dalla riga in cui si trova s) i <u>corrispondenti elementi di un'altra riga</u> (individuata dalla colonna in cui si trova s) <u>moltiplicati per lo scalare s.</u>

$A \cdot S$ equivale ad effettuare la stessa operazione sulle colonne.

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ s \cdot 2 + 3 & s \cdot 1 + 4 & s \cdot 1 + 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + s & 1 & 1 \\ 3 + s \cdot 4 & 4 & 1 \\ 1 + s \cdot 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$