1. Esercizi (25 novembre)

(1) Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x = 0$ per le funzioni

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad , f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine e punto iniziale $x = 1$ delle funzioni

$$f(x) = \log x, \quad f(x) = 1 + x + x^2, \quad f(x) = xe^x.$$

(2) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Si dica in quali $x \in \mathbb{R}$ vale $f(x) > 0$. Si risponda alla stessa domanda per la derivata f'. Infine si calcoli $\lim_{x\to=+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to=-\infty} f(x)$. Si tracci infine un grafico qualitativo della funzione f che sia compatibile con le informazioni acquisite.

(3) Si consideri la funzione $f(x) = xe^{-x^2}$. Si puo' dire che f e' pari? dispari? Ne' pari ne' dispari? Si svolga poi lo stesso esercizio del punto precedente, arrivando a un grafico qualitativo.

(4) Sia i un numero positivo fissato. Costruiamo la successione $(c_n)_n$, definita da

$$c_n = \Big(1 + \frac{i}{n}\Big)^n$$

(si veda gli appunti del corso (lezione 24 novembre 2005) per uno spunto sul suo significato). E' noto che vale $c_n < c_{n+1}$ per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si verifichi con un calcolo esplicito questa proprieta' per $n \leq 3$. Cioe' si verifichi ciascuna delle tre disuguaglianze

$$c_1 < c_2, \quad c_2 < c_3, \quad c_3 < c_4.$$