17 Ottimizzazione vincolata. Condizioni del secondo ordine

Lavoriamo in dimensione $n = 2$. Siano date $f : A \to \mathbb{R}$, $h : A \to \mathbb{R}$, funzioni di classe C^1 su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Fissiamo un livello b e consideriamo il problema vincolato

$$\begin{cases} \max / \min f(x) \\ h(x) = b \end{cases}, \quad x = (x_1, x_2) \in A \tag{30}$$

Assumiamo che le funzioni f, h siano di classe C^2 e che l'insieme di livello $h^{-1}(b) := \{x \in A : h(x) = b\}$ sia regolare. Ricordiamo che cio' significa che $\nabla h(x) \neq 0$ per ogni $x \in h^{-1}(b)$.

Ricordiamo che la Lagrangiana $L : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associata al problema:

$$L(x, \mu) = f(x) - \mu[h(x) - b].$$

Introduciamo l'*hessiamo orlato* $H : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$H(x, \mu) := \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 h(x) & \partial_2 h(x) \\ \partial_1 h(x) & \partial_{11} L(x, \mu) & \partial_{12} L(x, \mu) \\ \partial_2 h(x) & \partial_{21} L(x, \mu) & \partial_{22} L(x, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Dh(x) \\ (Dh(x))^T & D_x^2 H(x, \mu) \end{pmatrix} \tag{31}$$

Teorema 17.1 (condizioni sufficienti del secondo ordine) *Siano date $f, g : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 au un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Assumiamo che l'insieme $h^{-1}(b)$ sia regolare. Sia $(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \in A \times \mathbb{R}$ un punto critico libero per $L(x, \mu) = f(x) - \mu[h(x) - b]$, cioe' valga*

$$(D_x L(\tilde{x}, \tilde{\mu}), \partial_\mu L(\tilde{x}, \tilde{\mu})) = 0 \in \mathbb{R}^3. \tag{32}$$

Allora, se

$$\det H(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) < 0, \tag{33}$$

il punto $\widetilde{x}$ è di minimo vincolato. Se invece $\det H(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) > 0$, *allora $\widetilde{x}$ è di massimo vincolato.* [16]

Esempio 17.2 *Calcolare i punti critici vincolati per $f(x, y) = x^2 + y^2$ con il vincolo $y - x^2 = 0$ e verificare usando il Teorema 17.1 se sono di massimo o di minimo. Questo esercizio ha solo scopo didattico, perche' sarebbe risolubile facilmente senza moltiplicatori di Lagrange. Perché?*

Dimostrazione del Teorema 17.1. Poiche' l'insieme $h^{-1}(b)$ e' regolare, in $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ almeno una delle due derivate di h e' non nulla. Assumiamo che sia $\frac{\partial h}{\partial x_2}(\widetilde{x}) \neq 0$. Allora per il teorema della funzione implicita esiste $I \times J$ intorno rettangolare di $\widetilde{x}$ ed esiste $\phi : I \to J$ di classe C^2, tale che

$$\{x = (x_1, x_2) \in I \times J : h(x) = b\} = \{(x_1, \phi(x_1)) : x_1 \in I\} \tag{34}$$

In particolare sarà $h(x_1, \phi(x_1)) \equiv 0$ identicamente nell'intervallo I che contiene $\widetilde{x}_1$. Differenziando, $\frac{d}{dx_1} h(x_1, \phi(x_1)) = 0$ identicamente in I. Quindi

$$0 = \partial_1 h(x_1, \phi(x_1)) + \partial_2 h(x_1, \phi(x_1))\phi'(x_1) \quad \forall\, x_1 \in I. \tag{35}$$

Dalla (35) si ricava

$$\phi'(\widetilde{x}_1) = -\frac{\partial_1 h(\widetilde{x}_1, \phi(\widetilde{x}_1))}{\partial_2 h(\widetilde{x}_1, \phi(\widetilde{x}_1))} = -\frac{\partial_1 h(\widetilde{x})}{\partial_2 h(\widetilde{x})}. \tag{36}$$

[16] Se, per finire $\det H(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) = 0$, allora questo criterio non si può applicare e occorre analizzare condizioni su derivate successive.

Qui abbiamo usato il fatto che $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \phi(\widetilde{x}_1)) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$. Osserviamo anche che la (36) corrisponde alla (15) ottenuta a pagina 10).

Da ora in poi introduciamo la notazione abbreviata: (x_1, ϕ) invece di $(x_1, \phi(x_1))$ e ϕ, o ϕ' invece di $\phi(x_1)$ o $\phi'(x_1)$.

Consideriamo la funzione $U : I \to \mathbb{R}$, $U(x_1) = f(x_1, \phi(x_1)) = f(x_1, \phi)$. Ci proponiamo di dimostrare che la funzione U ha un punto di minimo locale in $\widetilde{x}_1$. Questo dimostra immediatamente che $\widetilde{x}$ e' di minimo vincolato per il problema. Per provare ciò, calcoliamo le derivate di U e proveremo che

$$U'(\widetilde{x}_1) = 0 \tag{37a}$$

$$U''(\widetilde{x}_1) > 0 \tag{37b}$$

Iniziamo provando (37a). Ci serve U'.

$$U'(x_1) = \frac{d}{dx_1} f(x_1, \phi) = \partial_1 f(x_1, \phi) + \partial_2 f(x_1, \phi)\phi' \tag{38}$$

Ora moltiplicando la (35) per $-\widetilde{\mu}$ e sommando con (38), otteniamo

$$U'(x_1) = \partial_1 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu}) + \partial_2 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi'$$

Calcolando in $(\widetilde{x}_1, \phi(\widetilde{x}_1)) = \widetilde{x}$ e ricordando l'ipotesi (32), si ottiene $U'(\widetilde{x}_1) = 0$, che e' la (37a), come richiesto.

Ora differenziamo ulteriormente

$$\begin{aligned}
U''(x_1) &= \frac{d^2}{dx_1^2} U'(x_1) = \frac{d}{dx_1}\Big(\partial_1 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu}) + \partial_2 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi'\Big) \\
&= \frac{d}{dx_1}\partial_1 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu}) + \Big\{\frac{d}{dx_1}\partial_2 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\Big\}\phi' + \partial_2 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi'' \\
&= \partial_{11} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu}) + \partial_{12} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi' + \\
&\qquad + \big\{\partial_{12} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu}) + \partial_{22} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi'\big\}\phi' + \partial_2 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi''. \\
&= \partial_{11} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu}) + 2\partial_{12} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi' + \partial_{22} L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})(\phi')^2 + \partial_2 L(x_1, \phi, \widetilde{\mu})\phi''
\end{aligned}$$

Questa uguaglianza vale per ogni punto $x_1 \in I$. Se calcoliamo in $\widetilde{x}_1$, sara' $(x_1, \phi) = (\widetilde{x}_1, \phi(\widetilde{x}_1)) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \widetilde{x}$. In particolare l'ultimo termine diviene $\partial_2 L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})$ che si annulla grazie ad (32). In definitiva:

$$U''(\widetilde{x}_1) = \partial_{11} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) + 2\partial_{12} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})\phi'(\widetilde{x}_1) + \partial_{22} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})(\phi'(\widetilde{x}_1))^2.$$

Ora usiamo (36) e otteniamo immediatamente

$$U''(\widetilde{x}_1) = \frac{1}{(\partial_2 h(\widetilde{x}))^2}\Big\{\partial_{11} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})(\partial_2 h(\widetilde{x}))^2 - 2\partial_{12} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})\partial_1 h(\widetilde{x})\partial_2 h(\widetilde{x}) + \partial_{22} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})(\partial_1 h(\widetilde{x}))^2\Big\} \tag{39}$$

Un rapido calcolo del determinante in (33) mostra che

$$\begin{aligned}
\det H(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) &= -\partial_{11} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})(\partial_2 h(\widetilde{x}))^2 + 2\partial_{12} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})\partial_1 h(\widetilde{x})\partial_2 h(\widetilde{x}) - \partial_{22} L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})(\partial_1 h(\widetilde{x}))^2 \\
&= -U''(\widetilde{x}_1)(\partial_2 h(\widetilde{x}))^2.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo verificato (37b) e la prova e' conclusa.

18 Condizioni del secondo ordine per ottimizzazione vincolata II. Varietà regolari e spazi tangenti

Ora discutiamo brevemente il caso di p vincoli in n variabili. Consideriamo una famiglia $h_1, \ldots, h_p$ di funzioni da Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$. Assumiamo cha le funzioni siano di classe C^1 e che l'insieme

$$M := \{x \in \Omega : h_1(x) = c_1, \ldots, h_p(x) = c_p\}$$

sia regolare, cioe' che $\nabla h_1, \ldots, \nabla h_p$ siano linearmente indipendenti per ogni $x \in M$. [17] Un insieme regolare di questo tipo si chiama in matematica *varietà regolare*. La definizione (non la più generale possibile) e' la seguente:

Definizione 18.1 (Varietà di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$) *Sono dati dei numeri $p, n \in \mathbb{N}$, con $1 \leq p < n$ e sono assgnate le funzioni $h_1, \ldots, h_p : \Omega \to \mathbb{R}^n$, di classe C^1 su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Siano $c_1, \ldots, c_p$ numeri assegnati. L'insieme*

$$M := \{x \in \Omega : h_1(x) = c_1, \ldots, h_p(x) = c_p\} \tag{40}$$

(qualora sia non vuoto) si chiama varieta' regolare di classe C^1 e di dimensione $n-p$, se $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_p(x)$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in M$.

Osserviamo che il "conteggio" della dimensione avvient cosí: partiamo da n variabili libere, aggiungiamo p vincoli. Cio' che rimane sono $n - p$ "gradi di libertà".

Definiamo lo *spazio tangente* T_xM ad un punto $x \in M$ come segue (vedere [SB, righe precedenti il Teorema 9.6]:

Definizione 18.2 (Spazio tangente) *Data una varieta' M come in* (40)*, definiamo lo spazio tangente T_xM a un punto $x \in M$ come segue:*

$$T_xM := \{v \in \mathbb{R}^n : \nabla h_1(x) \cdot v = \cdots \nabla h_p(x) \cdot v = 0\}, \tag{41}$$

Osserviamo che lo spazio tangente T_xM e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, di dimensione $n - p$. Infatti esso e' definito come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} Dh_1(x) \\ \vdots \\ Dh_p(x) \end{pmatrix} v = 0 \tag{42}$$

Essendo i p vettori $Dh_1(x), \ldots, Dh_p(x)$ linearmente indipendenti, le soluzioni sono una famiglia dipendente da $n - p$ parametri (algebra lineare).

Esercizio 18.3 *Descrivere lo spazio tangente $T_{\widetilde{x}}M$ alla varieta'*

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\},$$

nel punto $\widetilde{x} = (1, 1, \sqrt{2})$. Osservare che qui $n = 3$ e $p = 1$. Quindi lo spazio $T_{\widetilde{x}}M$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $n - p = 3 - 1 = 1$. (Due vincoli in tre variabili $\Rightarrow$ resta un grado di libertà.)

[17] Abbioamo visto che nel caso $p = 1$, questo significa che l'insieme M si puo' scrivere localemtne cone grafico di classe C^1

Osservazione 18.4 *Sia M una varieta' regolare come in* (40)*, Sia $]a,b[$ un intervallo contenente l'origine e $x :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Assumiamo che la curva giaccia interamente in M, cioe'*

$$h_1(x(t)) = c_1, \quad \dots \quad h_p(x(t)) = c_p \qquad \textit{per ogni } t \in]a,b[\,.$$

Indichiamo con $\widetilde{x} = x(0) \in M$. Allora il vettore velocita' della curva nel punto $t = 0$, cioè $\dot{x}(0)$, giace sullo spazio tangente $T_{\widetilde{x}}M$.

Verifica: fissiamo $j \in \{1,\dots,p\}$ e partiamo dall'equazione $h_j(x(t)) = c_j$ che vale per ogni $t \in]a,b[$. Allora, derivando rispetto a t abbiamo, per ogni $t \in]a,b[$,

$$0 = \frac{d}{dt}c_j = \frac{d}{dt}h_j(x(t)) = \nabla h_j(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Scegliendo $t = 0$ otteniamo $\nabla h_j(\widetilde{x}) \cdot \dot{x}(0) = 0$. Questa e' la j-esima equazione del sistema (42). Ripetendo questo calcolo per ogni $j = 1,\dots,p$ si conclude che $\dot{x}(0) \in T_{\widetilde{x}}M$.

Esercizio 18.5 *Data*

$$M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 = 1/2\},$$

verificare che M è una varieta' di classe C^1 e descriverne lo spazio tangente nel punto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

18.1 Condizioni del secondo ordine per ottimizzazione vincolata

Siano $f, h_1, \dots, h_p : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e $p < n$. Consideriamo il problema a p vincoli in $\mathbb{R}^n$,

$$(*) \qquad \begin{cases} \min f \\ h_1 = c_1 \\ \vdots \\ h_p = c_p \end{cases}$$

Allora

Teorema 18.6 (condizioni del secondo ordine, caso generale, [SB, Teorema 9.6]) *Siano $p, n \in \mathbb{N}$ con $1 \le p < n$. Siano poi $f, h_1, \dots, h_p$ di classe C^2 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Assumiamo che la varieta' vincolo*

$$M = \{x \in \Omega : h_1(x) = c_1, \dots, h_p(x) = c_p\}$$

sia regolare. Se $(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})$ e' un punto critico libero per L e se

$$v^T D_x^2 L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) v > 0 \quad \textit{per ogni } v \neq 0, v \in T_{\widetilde{x}}M, \tag{43}$$

allora $\widetilde{x}$ e' un punto di minimo per il problema $(*)$.

Notazioni: Qui $D_x^2 L(\widetilde{x}, \widetilde{\mu}) := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})\right)_{j,k=1,\dots,n}$ indica la matrice $n \times n$ i cui elementi sono le derivate seconde rispetto alle variabili x della Lagrangiana, calcolate in $(\widetilde{x}, \widetilde{\mu})$. La condizione (43) significa che stiamo richiedendo che la forma quadratica associata a tale matrice, *ristretta però allo spazio tangente $T_{\widetilde{x}}M$ alla varietà vincolo M nel punto critico vincolato* $\widetilde{x}$, sia definita positiva.

19 Numeri complessi

Svolti i contenuti nel testo, Appendici A1, A2, A3. (Non discussa l'appendice A4 e A5). In particolare ricordiamo la definizione di esponenziale complesso

$$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{44}$$

e la formula per la derivata della curva $t \mapsto e^{zt}$, con $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, che ci servirà tra poco.

$$\frac{d}{dt} e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t}. \tag{45}$$

Esercizio: verificare la (45) usando la definizione di esponenziale complesso (44).

20 Equazioni differenziali ordinarie

Sia $f : I \times A \to \mathbb{R}$, I, A sono intervalli aperti di $\mathbb{R}$. Indichiamo con $(t, y) \in I \times A$ le variabili. Supponiamo sempre $f = f(t, y)$ continua. Una *equazione differenziale ordinaria del primo ordine* è una scrittura del tipo

$$\dot{y} = f(t, y). \tag{46}$$

Una funzione derivabile $y : J \to \mathbb{R}$ con $J \subset I$ si chiama *soluzione* di (46) se soddisfa

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J.$$

Qui e nel seguito scriviamo $\dot{y}(t)$ invece di $\frac{d}{dt}y(t)$.

Esempio. L'equazione $\dot{y} = \alpha y$, con $\alpha > 0$, e sua interpretazione in relazione al modello "rozzo" di crescita di una popolazione.

20.1 Equazioni del primo ordine lineari omogenee.

Sono le equazioni del tipo:

$$\dot{y} = a(t)y, \tag{47}$$

dove $y : I \to \mathbb{R}$ e' la funzione incognita e si indica $y = y(t)$ e $\dot{y} = \frac{d}{dt}y(t)$.

Mostriamo la procedura per risolvere l'equazione (47). Introduciamo una funzione $A : I \to \mathbb{R}$, che sia una primitiva di a su I. Per fissare le idee scegliamo $t_0 \in I$ e poniamo $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$. Riscriviamo l'equazione come

$$\dot{y} - a(t)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-A(t)}\big\{\dot{y} - a(t)y\big\} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big\{e^{-A(t)}y(t)\Big\} = 0$$

Ma allora, per qualche $c \in \mathbb{R}$ sarà $e^{-A(t)}y(t) = c$ che equivale a

$$y(t) = e^{A(t)}c. \tag{48}$$

Queste sono tutte e sole le soluzioni di (47). Sono infinite perché la c è arbitraria. Fissando una condizione iniziale, poniamo il **Problema di Cauchy (o Problema ai valori iniziali)**

$$\begin{cases} \dot{y} = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{49}$$

con $y_0 \in A$ dato assegnato. Il problema (49) ha quindi l'unica soluzione

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} = y_0 \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big).$$

Esercizio 20.1 *Risolvere i Problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = t^2 y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{1}{t} y \\ y(1) = 2 \quad e \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

20.2 Equazioni del primo ordine lineari non omogenee.

Sono le equazioni del tipo

$$\dot{y} = a(t)y + b(t), \tag{50}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue su un intervallo aperto I. Per risolvere questo tipo di equazioni ragioniamo come segue: prendiamo ancora $t_0 \in I$ e la primitiva $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$. Allora

$$\dot{y} - a(t)y = b(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-A(t)}(\dot{y} - a(t)y) = e^{-A(t)}b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big\{e^{-A(t)}y\Big\} = e^{-A(t)}b(t).$$

Integrando sull'intervallo di estremi t_0 e t, ricordando che $A(t_0) = 0$, otteniamo

$$e^{-A(t)}y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{A(t)}\Big\{y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\Big\}.$$

Ci sono infinite soluzioni perche' $y(t_0)$ è indeterminato. Se consideriamo il *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{51}$$

allora la soluzione e' individuata univocamente e precisamente ha la forma

$$y(t) = e^{A(t)}\Big\{y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\Big\}, \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

Esercizio 20.2 *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{y} = ty + t \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \dot{y} = y + 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

20.3 Esistenza e unicità per la soluzione del Problema di Cauchy.

Esempio 20.3 (di non unicità) *Consideriamo la funzione* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, y) = |y|^{1/2}$. *Verificare che le funzioni* $y(t) = 0$ *e* $y(t) = \frac{1}{4}t\,|t|$ *sono entrambe soluzioni del problema*

$$\begin{cases} \dot{y} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{52}$$

sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

Questo esempio prova che il Problema di Cauchy (52) ha piu' di una soluzione.

E' interessante avere delle condizioni sul dato $f(t, y)$ che assicurino l'unicità .

Teorema 20.4 (di esistenza e unicità per il problema di Cauchy. [SB], Teorema 14.5) [18] *Siano* I, A *intervalli di* $\mathbb{R}$ *e sia* $f : I \times A \to \mathbb{R}$ *una funzione. Assuiamo che* f *sia di classe* C^1. *Allora per ogni* $(t_0, y_0) \in I \times A$ *esiste una funzione* $y : J \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *sull' intervallo* $J \subset I$, J *contenente* t_0, *che e' soluzione di*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{53}$$

La soluzione e' unica nel senso seguente: se e' data una qualsiasi altra soluzione di (53) $z : \widetilde{J} \to \mathbb{R}$, *allora* $y(t) = z(t)$ *per ogni* $t \in \widetilde{J} \cap J$.

Osserviamo che la funzione $f(t, y) = |y|^{1/2}$ non è di classe C^1 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti $\frac{\partial f}{\partial y}(0, t)$ non esiste per nessun $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 20.5 (fenomeno di blow-up) *Verificare che il Problema di Cauchy*

$$\dot{y} = y^2, \qquad y(0) = 1$$

ammette la (unica) soluzione $y = \dfrac{1}{1-t}$. *Osserviamo che mentre la funzione* $f(t, y) = y^2$ *è definita per tutto* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *la soluzione* y *è definite su* $J = (-\infty, 1)$. *Risulta anche* $\lim_{t \to 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty$. *La soluzione tende all'infinito in un tempo finito. Questo esenpio prova che l'introduzione di un intervallo* $J \subset I$ *nel teorema sopra non è artificiosa, ma necessaria. In questo esempio* J *è un sottoinsieme* stretto *di* I.

20.4 Equazioni a variabili separabili ([SB, p. 410])

Sono le equazioni del tipo

$$\dot{y} = g(y)h(t), \tag{54}$$

con $g : A \to \mathbb{R}$ e $h : I \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1.

Il metodo di soluzione è il seguente. Consideriamo il problema

$$\dot{y} = g(y)h(t), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{55}$$

dove $(t_0, y_0) \in I \times A$. Allora :

[18] Questo enunciato e quello in [SB] contengono delle ipotesi largamente sovrabbondanti. Lo studente interessato ad approfondire può consultare un qualsiasi testo specialistico di Equazioni Ordinarie, ad esempio P. Hartman,: Ordinary differential equations. Classics in Applied Mathematics, 38. SIAM, Philadelphia, 2002.

(Caso A): Risulta $g(y_0) = 0$. Allora $y(t) = y_0$ costante e' la soluzione. Essa e' l'unica per il teorema di unicita' sopra enunciato.

(Caso B): Vale $g(y_0) \neq 0$. Allora facciamo i seguenti passaggi (parzialmente informali, ma giustificati a posteriori dalla formula risoluiva che otterremo in (56)). Partiamo da

$$\dot{y}(t) = g(y(t))h(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{y}(t)}{g(y(t))} = h(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{y}(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau$$

Passando alla variabile $s = y(\tau)$, $ds = \dot{y}(\tau)d\tau$ e sostituendo in modo appropriato gli estremi di integrazione si ottiene la formula risolutiva.

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau \tag{56}$$

Esercizio 20.6 *Risolvere per separazione delle variabili il problema*

$$\dot{y} = ty, \quad y(0) = 0 \quad e \qquad \dot{y} = ty, \quad y(0) = 1.$$

Esercizio 20.7 *Scrivere un esempio di equazione $\dot{y} = f(t, y)$ che* **non** sia a variabili separabili.

Esercizio 20.8 *Risolvere i problemi di Cauchy*

$$\dot{y} = \frac{\sin t}{y}, \quad y(0) = 1, \qquad \dot{y} = ty + t, \quad con \quad y(0) = y_0,$$

$$\dot{y} = ty + y, \quad y(1) = 1, \quad e \quad \dot{y} = y + 1, \quad con \quad y(1) = 2$$

20.5 Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti. [SB, Sez. 14.3]

Sono del tipo

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + c = 0, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ assegnati.} \tag{57}$$

Esercizio 20.9 (svolto in classe. Associazione tra equazioni differenziali e algebriche) *Verificare che se $r \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione*

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{58}$$

allora la funzione $y(t) = e^{tr}$ risolve l'equazione differenziale (57).

Osservazione 20.10 (Principio di sovrapposizione) *Se y_1 e y_2 sono soluzioni di* (57)*, allora per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, la funzione*

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

è ancora soluzione di (57).

Analizziamo l'equazione caratteristica. Possono occorrere tre casi:
Caso A. L'equazione (58) ha radici $r_1 \neq r_2$ reali.
Caso B. L'equazione (58) ha solo la radice $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.
Caso C. L'equazione (58) ha radici $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ complesse coniugate.

Discutiamo separatamente ciascuno dei tre casi e studiamo la risolubilità del problema di Cauchy

$$\begin{cases} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \\ y(t_0) \in y_0 \\ \dot{y}(t_0) = v_0, \end{cases} \tag{59}$$

dove y_0, v_0 e t_0 sono numeri reali assegnati.

Caso A. Per l'esercizio 20.9 abbiamo gia' due soluzioni

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}.$$

Osserviamo che infinite soluzioni possono ottenersi scrivendo

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

con c_1, c_2 parametri arbitrari. Vale allora il seguente

Teorema 20.11 ([SB], Teorema 14.1, dimostrato in classe) *Siano $r_1 \neq r_2$ radici reali e distinte di* (58)*. Allora per ogni $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ esistono unici $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che il problema di Cauchy* (59) *ha l'unica soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Esercizio 20.12 *(svolto) Riosolvere*

$$\ddot{y} - y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(o) = 1.$$

Caso B. Sia r_1 la radice di (58). Poiche' l'equazione caratteristica ha solo una radice doppia r_1, si puo' scrivere

$$ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2 = a(r^2 - 2rr_1 + r_1^2).$$

Cioè l'equazione (57) è in effetti

$$a(\ddot{y} - 2r_1\dot{y} + r_1^2 y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - 2r_1\dot{y} + r_1^2 y = 0. \tag{60}$$

Con un calcolo semplice (da fare almeno una volta!) si verifica che la funzione $y(t) = te^{r_1 t}$ è una soluzione di (57). Quindi abbiamo infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t} = (k_1 + k_2 t)e^{r_1 t}. \tag{61}$$

Vale allora il seguente Teorema

Teorema 20.13 ([SB], Teorema 14.2, dimostrato anche in classe) *Sia $r_1 \in \mathbb{R}$ radice doppia di* (58)*. Allora per ogni $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ esistono unici $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che il problema di Cauchy* (59) *ha l'unica soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$y(t) = (k_1 + tk_2)e^{r_1 t}.$$

Caso C. L'equazione (58) ha le radici $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta = \bar{r}_1$. Usando la formula (45) si verifica subito che la funzione $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $y_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}$ fornisce una soluzione di (57) (verificare!). Per la stessa ragione, anche la funzione $y(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}$ da' una soluzione. In generale per il principio di sovrapposizione abbiano una famiglia di soluzioni:

$$y(t) = k_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha - i\beta)t}. \tag{62}$$

A questo punto, pero' abbiamo delle soluzioni complesse. Per riottenere delle soluzioni reali, ricordiamo il fatto che, se $z, w \in \mathbb{C}$, allora $z + w$ è reale se e solo $z = \bar{w}$. Quindi, poiché $e^{(\alpha+i\beta)t} = \overline{e^{(\alpha-i\beta)t}}$, avremo che $y(t)$ è reale se e solo se $k_2 = \bar{k}_1$. Quindi, se scriviamo $k_1 = u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}$, la nostra soluzione sarà

$$\begin{aligned} y(t) &= (u+iv)e^{(\alpha+i\beta)t} + (u-iv)e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= \text{scrivendo l'esponanziale con la definizione (44)} \\ &= 2e^{\alpha t}(u\cos(\beta t) - v\sin(\beta t)) \\ &= C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \end{aligned}$$

se poniamo $C_1 = 2u$ e $C_2 = -2v$. Le due costanti reali C_1, C_2 sono arbitrarie e ora abbiamo delle soluzioni reali. Vale il seguente teorema.

Teorema 20.14 *Se l'equazione* (58) *ha soluzioni complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$, allora per ogni $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ esistono unici $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tali che l'unica soluzione di*

$$\begin{cases} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = v_0, \end{cases}$$

ha la forma $y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

Esempi discussi.

Esempio 20.15 (oscillatore armonico, [SB], pag. 421) *Discussione e commento dell'equazione differenziale*

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

con $\omega > 0$ assegnato. Risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

Esempio 20.16 (oscillatore smorzato [SB], pag. 421) *Discussione e commento dell'equazione*

$$\ddot{y} + \varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

con $0 < \varepsilon < 4\omega^2$. Risolto e commentato il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$. [19]

Esempio 20.17 (modello di crescita di popolazione) *Risolta, per separazione di variabili, l'equazione*

$$\begin{cases} \dot{y} = ay\Big(1 - \dfrac{y}{N}\Big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{63}$$

[19] Che succede se $\varepsilon^2 > 4\omega^2$? Che forma hanno le soluzioni?