# Matematica e Probabilità. Prova scritta. 7 novembre 2007

1. Dire in queli intervalli è crescente/decrescente la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = xe^{-x^4}.$$

2. Calcolare gli integrali
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x dx, \qquad \int_1^2 (x \log x - x) dx$$

3. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 - \cos(2x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to +\infty} xe^{-x^2}.$$

4. Supponiamo che il titolo azionario Alfa, al termine di ciascuna giornata borsistica, sia in rialzo con la probabilità pari a 0,6 e in calo con una probabilità di $0,4$. Sia X il numero di giornate in cui il titolo risulta in rialzo in una settimana di 5 giornate (dal luned́ al venerdí). Per esempio, se il titolo risulta tre volte in rialzo e due in ribasso, si ha X = 3. Nell'ipotesi che i risultati delle giornate borsistiche siano tra loro indipendenti, determinare:

   a) La distribuzione di $X$ (modello e parametri).
   b) Il valore atteso $\mathbb{E}(X)$.
   c) La varianza $V(X)$.
   d) La probabilità di $X = 0$ (titolo sempre in ribasso).
   e) La probabilità di $X = 5$ (titolo sempre in rialzo).
   f) La probabilità $\mathbb{P}(X \geq 3)$.

Matematica e Probabilità. Prova scritta. 19 settembre 2007

1. Calcolare per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\alpha\sin x}{x+\sin x}.$$

2. Calcolare

$$\int_0^1 e^x(1+x^2)dx, \qquad \text{e} \qquad \int_1^{3/2} \Big(\frac{1}{x}+\cos(\pi x)\Big)dx.$$

3. Calcolare la derivata prima della funzione $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int_{1+x^2}^{3} \exp(-t^2)dt$$

e dire in quali intervalli dell'asse reale $F$ è crescente/decrescente.

4. Lancio sul tavolo tre monete, due delle quali sono equilibrate (testa $= 1/2$, croce $= 1/2$), mentre la terza moneta  truccata in favore della testa (testa $= 2/3$, croce $= 1/3$). Calcolare:

   a) la prob. che tutte e tre le monete presentino la testa;
   b) la prob. che tutte e tre le monete presentino la croce;
   c) che escano due teste su tre, e lunica croce sia ottenuta proprio nella moneta truccata;
   d) calcolare il valore atteso del numero $T$ di teste complessive;
   e) calcolare la prob. di ottenere due croci e una testa sapendo che la prima moneta equilibrata presenta la croce.

# Matematica e Probabilità. Prova scritta, 9 luglio 2007

1. Sia $Y$ una v.a. continua con funzione di densità:

$$f_Y(y) = \begin{cases} = c(y-2)^2, & \text{per } 2 \leq y \leq 4 \\ = 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) Il valore della costante $c$.

   (b) La funzione di ripartizione.

   (c) Il 90esimo centile.

   (d) Il valore atteso e la varianza.

2. Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{1+\alpha x}{\sqrt{x}}\right), \qquad \text{al variare di } \alpha \neq 0$$

   e

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 - x\sin^2(x)}{e^{x^3} - 1}$$

3. Dire in quali intervalli e' crescente o decrescente la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_5^{2x^3 - 9x^2 + 12x} e^{t^2}\, dt.$$

Matematica e Probabilità. Prova scritta, 14 giugno 2007

1. Calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx, \qquad \int_1^2 x(\sqrt{x} + \log x) dx.$$

2. Dire in quali intervalli e' crescente o decrescente la $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_0^{x^3} \exp(t + \sin t) dt.$$

   Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nel punto di ascissa 0?

3. La durata di funzionamento $Y$ (in ore) delle lampadine prodotte da una certa ditta segue la funzione di densità:
$$f(y) = 0,01 \cdot \exp(-0,01y)$$

   (a) Quale legge distributiva segue la variabile $Y$?

   (b) Qual è la durata media (valore atteso) di una lampadina?

   (c) Qual è la durata mediana di una lampadina?

   (d) Qual è la varianza di $Y$?

   (e) Qual è la probabilit che una lampadina duri almeno 200 ore?

   (f) Qual è la probabilit che una lampadina superi la durata media?

Matematica e Probabilità. Prova scritta, 31 maggio 2007

1. Sia $X$ una variabile aleatoria discreta che assume i valori $\{-1, 0, 1, 2\}$ con probabilità
$$P(X = x) = c(x + 2) \qquad x = -1, 0, 1, 2.$$
   (a) Determinare l'unico valore possibile per la costante $c$.
   (b) Scrivere o disegnare la funzione di ripartizione di $X$.
   (c) Determinare il valore mediano di $X$.
   (d) Calcolare $E(X)$ e $V(X)$.
   (e) Considerando la trasformata $T = 2X - 1$, calcolare $E(T)$ e $V(T)$.

2. Calcolare
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 4x \sin(x^2) dx, \qquad \int_2^3 (x + 1) \log(2x) dx.$$

3. Calcolare la derivata della funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_x^{x^2+x} e^{-t^2} dt.$$

4. Calcolare
$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^2} - 1}{x^3 - 2x^2 + x}, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{x}.$$

Matematica e Probabilità. Prova scritta, 3 aprile 2007

1. Calcolare
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx, \qquad \int_2^3 (x+1)\log(2x)dx.$$

2. Calcolare la derivata della funzione $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_0^{x^2+x} e^{-t^2}dt$$
e dire in quali intervalli $F$ e' crescente/decrescente.

3. Calcolare
$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)^2}-1}{x^3-2x^2+x}, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{e^{1/x}}{x}.$$

4. Il numero $X$ di chiamate che giungono in un'ora a una segretaria commerciale segue una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 3,5$; questa proprieta' vale per lintera giornata. Determinare:
   a) il numero medio di chiamate che arrivano alla segretaria in una giornata lavorativa di otto ore.
   b) la probabilita' che nella prima ora di lavoro arrivino esattamente 4 chiamate.
   c) la probabilita' che nella seconda ora di lavoro arrivino meno di di tre chiamate.
   d) la probabilita' che il numero di chiamate della terza ora sia dispari (suggerimento: ricordare che la probabilit poissoniana, oltre un certo valore, diventa trascurabile).
   e) lo scarto di X.

Tempo: 2 ore.

Svolgere la parte di matematica e la parte di probabilità su fogli separati.