1. Esercizi

(1) Se g e' una funzione derivabile e positiva, dire quanto vale la derivata
$$\frac{d}{dx}(g(x))^{\alpha}.$$
Utilizzare questo calcolo per calcolare i seguenti integrali
$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos x \ \sin^2 x dx, \quad \int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}dx.$$
$$\int_2^3 \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}}dx,$$

(2) Calcolare, usando la tavola delle primitive delle funzioni elementari e la formula di Torricelli, gli integrali seguenti.
$$\int_1^3 (2x^3 + x^{3/2})dx, \quad \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x}.$$

(3) Sia g una funzione derivabile su $\mathbb{R}$. Dire quanto vale la derivata della funzione composta $h(x) = e^{g(x)}$. Usando questo calcolo (assieme al Teorema di Torricelli) dire quanto vale l'integrale
$$\int_a^b e^{g(x)} g'(x)dx.$$
Calcolare, usando le considerazioni appena fatte e scegliendo di volta in volta una $g(x)$ opportuna, gli integrali
$$\int_1^2 2xe^{x^2}dx, \quad \int_0^5 e^{-x}dx, \quad \int_3^5 x^2e^{-x^3}dx, \quad \int_0^3 e^{\sin x}\cos x dx, \quad \int_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x\, dx.$$

(4) Nello stesso spirito dell'esercizio precedente, scrivere la derivata della funzione composta $h(x) = \log(g(x))$, dove $g(x)$ e' una funzione positiva. Usare questo risultato per calcolare gli integrali
$$\int_1^2 \frac{2x}{(1+x^2)}dx, \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

(5) Ancora ragionando come sopra, ma usando l'espressione della derivata della funzione composta $h(x) = \sin(g(x))$, calcolare
$$\int_0^{\pi^{1/3}} x^2\cos(x^3)dx, \quad \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x\cos x^2 dx.$$
Sostituendo la funzione seno con la funzione coseno, calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x)dx, \quad \int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

(6) Scrivere la formula di Taylor di grado 2 e punto iniziale $x = 0$ per le funzioni

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad , f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine e punto iniziale $x = 1$ delle funzioni

$$f(x) = \log x, \quad f(x) = 1 + x + x^2, \quad f(x) = xe^x.$$

(7) Calcolare usando in caso di necessita la regola di de l'Hopital, i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{\sin(2x-2)}{1-\cos(x-1)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{(\log x)^{100}}{x},$$

(8) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$ nel punto del grafico di ascissa 3.

(9) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dato un qualsiasi numero $a \in \mathbb{R}$, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del grafico di ascissa a. Tra tulle le rette tangenti determinate al variare di a, dire a quale valore di a corrispode quella che ha coefficiente angolare 1 e scriverne l'equazione.

(10) Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = x^3 + \int_0^x \exp(t^2 + 1)dt$$

Dire se la funzione e' crescente o decrescente su $\mathbb{R}$.

(11) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

dire in quali intervalli f e' crescente o decrescente e calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} f(x).$$

(12) Calcolare

$$\int_0^1 \Big(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + e^{-x}\Big)dx.$$

(13) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2 + x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 + x^3)}{e^{2x} - 2\sin(x) - 1}.$$

(14) Dire in quali intervalli e' crescente la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}$

(15) È data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2 e^{x^2}$.

(i) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto del suo grafico di ascissa 0.

(ii) Verificare che f è crescente su $(0, +\infty)$ e che $x_0 = 1$ è un punto di minimo (assoluto) per f.