Introduzione al Calcolo Simbolico in Matlab

Anno accademico 2005-2006

Calcolo Simbolico con MATLAB

Fino ad ora si è utilizzato MATLAB per eseguire solo operazioni numeriche. In realtà spesso è utile manipolare espressioni matematiche con l'ausilio del calcolatore per ottenere risultati in forma analitica. In questa sezione verranno mostrate alcune delle potenzialità del **Symbolic Math Toolbox**. In particolare si tratterà:

- algebra simbolica;
- metodi simbolici per risolvere equazioni algebriche e trascendenti;
- calcolo di integrali, derivate, limiti, serie, ecc…;
- metodi simbolici per risolvere ODE;

Help e Demos

Il Symbolic Math Toolbox utilizza molti dei nomi delle funzioni numeriche di MATLAB e per ottenere le informazioni relative alla versione simbolica di una particolare funzione occorre digitare nella Command Window

>>help sym/*nomefunzione*

Può essere utile anche consultare le dimostrazioni e gli esempi contenuti nel MATLAB Demos. Digitare quindi

>>demos

e cliccare su

Toolboxes ⟶ **Symbolic Math**

Il Symbolic Math Toolbox definisce un nuovo tipo di variabile, chiamato **oggetto simbolico**. E' una struttura dati che memorizza una rappresentazione stringa del simbolo. Per creare oggetti simbolici in MATLAB si utilizza la funzione **sym**. Per esempio:

```
>> x=sym('x')
x =
x

>> class(x)
ans =
sym
```

```
>> t=6;
>> g=sym(t)
g =
6
```

```
>> class(g)
ans =
sym

>> class(t)
ans =
double
```

Rappresentazione simbolica di un valore numerico

>>t=0.1;

sym(t,'r')	rappresentazione razionale (default)	1/10
sym(t,'f')	rappresentazione floating-point	'1.999999999999a' *2^(-4)
sym(t,'d')	espansione decimale con 32 cifre significative	.10000000000000000555111512312578
digits(7) **sym(t,'d')**	espansione decimale con 7 cifre significative	.1000000

Creare funzioni matematiche simboliche

VARIABILI SIMBOLICHE REALI

>>syms x y z real
>>r = sqrt(x^2 + y^2 + z^2)
r =
(x^2+y^2+z^2)^(1/2)

ESEMPI DI ESPRESSIONI SIMBOLICHE

>>t = atan(y/x)
t =
atan(y/x)

OPERAZIONI TRA ESPRESSIONI SIMBOLICHE

>> f=r+t
f =
(x^2+y^2+z^2)^(1/2)+atan(y/x)

Funzioni per manipolare espressioni simboliche

collect(E)	raccoglie i coefficienti con la stessa potenza di x
expand(E)	applica regole algebriche per espandere l'espressione E
factor(E)	esprime E come prodotto di polinomi con coefficienti razionali
poly2sym(p)	converte i coefficienti del vettore p in un polinomio simbolico
sym2poly(E)	converte l'espressione E nel vettore di coefficienti
pretty(E)	visualizza l'espressione E in forma matematica
simple(E)	ricerca la forma dell'espressione E più corta in termini di numero di caratteri,utilizzando differenti semplificazioni algebriche
simplify(E)	semplifica l'espressione E
subs(E,old,new)	sostituisce *new* al posto di *old* nell'espressione E

Esempi

1)
```
>> x=sym('x');
>> E=(x-1)*(x-2)*(x-3);
>> collect(E)
ans =
x^3-6*x^2+11*x-6
```

2)
```
>> E=(x-5)^2+(y-3)^2;
>> collect(E,y)
ans =
y^2-6*y+9+ (x-5)^2
```

3)
```
>> E=cos(x+y);
>> expand(E)
ans =
cos(x)*cos(y)-sin(x)*sin(y)
```

4)
```
>> E= x^3-6*x^2+11*x-6;
>> factor(E)
ans =
(x-1)*(x-2)*(x-3)
```

5)
```
>> p=[2 6 4];
>> poly2sym(p)
ans =
2*x^2+6*x+4
```

6)
```
>> E=5*y^2-3*y+7
>> sym2poly(E)
ans =
[5 -3 7]
```

Esempi

1) **>> syms x**
>> E=x^3-6*x^2+11*x-6
>>pretty(E)
ans=
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

2) **>> E=(1-x^2)/(1-x)**
>>simplify(E)
ans=
x+1

3) **>> E =cos(x)^2 + sin(x)^2**
>>simplify(E)
ans=
1

4) **>> E = x^2+6*x+7**
>> subs(E,x,2)
ans=
23

5) **>> E = a*sin(b)**
>> subs(E, {a,b}, {x,2})
ans=
x*sin(2)

6) **>> E = 3*cos(x)^2+sin(x)^2**
>>simplify(E)
ans=
2*cos(x)^2+1

7) **>> E = 3*cos(x)^2+sin(x)^2**
>>simple(E)
ans=
cos(2*x)+2

Funzioni per creare e valutare espressioni simboliche

class(E)	restituisce la classe dell'espressione E
double(E)	converte l'espressione E in forma numerica
ezplot(E)	genera il plot dell'espressione E, che è una funzione ad una variabile (default $x \in [-2\pi, 2\pi]$)
findsym(E)	restituisce il nome delle variabili contenute in E
[num,den]=numden(E)	restituisce due espressioni simboliche che rappresentano il numeratore e il denominatore della rappresentazione razionale di E
vpa(E,d)	usa l'aritmetica a precisione variabile per calcolare gli elementi di E con d cifre decimali

Esempi

1) **>>syms x**
>>E=(x-1)*(x-2)*(x-3)
>>class(E)
ans=
sym

2) **>>E=sym('(1+sqrt(5))/2')**
>>double(E)
ans=
1.6180

3) **>>digits(25)**
>>vpa(pi)
ans=
3.141592653589793238462643

4) **>>E= x/y + y/x**
>> [num den]=numden(E)
num=x^2+y^2
den=y*x

5) **>>E=x+i*y-j*z**
>> findsym(E)
ans=
x, y, z

6) **>>E= x^2-6*x+7**
>>ezplot(E,[-2 6])

Esercizi

1. Date le espressioni

   $E_1=x^3-15x^2+75x-125$ ed $E_2=(x+5)^2-20x$

   utilizzare Matlab per

(a) determinare il prodotto E_1E_2 ed esprimerlo nella forma più semplice;

(b) determinare il quoziente E_1/E_2 ed esprimerlo nella forma più semplice;

(c) valutare la somma E_1+E_2 in x=7.1, sia utilizzando la forma simbolica che numerica.

Funzioni per risolvere equazioni algebriche e trascendenti

solve(E)	Risolve una equazione oppure una espressione (E=0) simbolica. Non è necessario dichiarare le variabili con sym o syms
solve(E1, …, En)	Risolve un sistema di equazioni o espressioni simboliche
S=solve(E)	Memorizza la soluzione in una struttura

Esempi

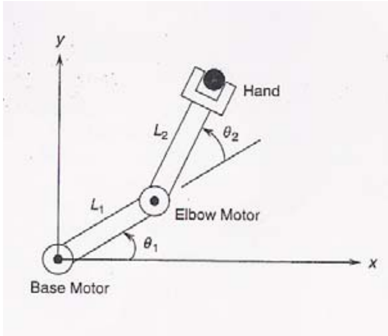
```
>>solve('x+5')
ans =
     -5


>>eq='exp(2*x)+3*exp(x)=54';
>>solve(eq)
ans =
     [ log(-9)]
     [  log(6)]
```

```
>>eq1= '6*x+2*y=14';
>>eq2= '3*x+7*y=31';
>>S=solve(eq1,eq2)
S =
    x: [1x1 sym]
    y: [1x1 sym]

>>S.x
ans =
1
>>S.y
ans =
4
```

Esercizi



2. La figura mostra un braccio meccanico con due giunture e due articolazioni. Gli angoli di rotazione del braccio in corrispondenza delle giunture sono θ_1 e θ_2. Le espressioni per le coordinate x,y della mano sono:

$$x=L_1\cos(\theta_1)+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$y=L_1\sin(\theta_1)+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

Supponendo che la lunghezza delle articolazioni sia L_1=1.30 m e L_2=1 m

(a) calcolare θ_1 e θ_2 per posizionare la mano in x=2 m e y=0.6 m;

(b) si desidera muovere la mano lungo la retta x=2, con $0.3 \leq y \leq 1.1$. Tracciare il grafico di θ_1 e θ_2 in funzione di y.

Funzioni per il calcolo simbolico

diff(E)	Restituisce la derivata dell'espressione E rispetto alla variabile indipendente di default (x)
int(E)	Restituisce l'integrale dell'espressione E
limit(E)	Restituisce il valore del limite di E per x che tende a 0 (default)
symsum(E)	Restituisce la somma dell'espressione E rispetto alla sua variabile k da 0 a k-1
taylor(f,n,a)	Restituisce il polinomio di Maclaurin di f di ordine n-1, valutato nel punto x=a

Esempi

1) **>>syms x**
>>diff((sin(x))^2)
ans =
2*sin(x)*cos(x)

2) **>> syms x y**
>> diff(x*sin(x*y),y)
ans =
x^2*cos(x*y)

3) **>> syms x**
>> diff(x^3,2)
ans =
6*x

4) **>> syms x y**
>>diff(x*sin(x*y),y,2)
ans =
-x^3*sin(x*y)

5) **>> syms n x**
>> int(x^n)
ans =
x^(n+1)/(n+1)

6) **>> syms x**
>> int(x^2,2,5)
ans =
39

7) **>> syms x y**
>> int(x*y^2,y,0,5)
ans =
125/3*x

8) **>> syms t x**
>> int(sin(x),t,exp(t))
ans =
-cos(exp(t))+cos(t)

Esempi

1) **>>syms a x**
>>limit(sin(a*x)/x)
ans =
a

2) **>> syms h x**
>> limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)
ans =
cos(x)

3) **>> syms x**
>>limit(1/x,x,0, 'right')
ans =
-inf

4) **>> syms k x**
>>symsum(k^2,1,4)
ans =
30

5) **>> syms x**
>> f=exp(x);
>>taylor(f,4)
ans =
1+x+1/2*x^2+1/6*x^3

Esercizi

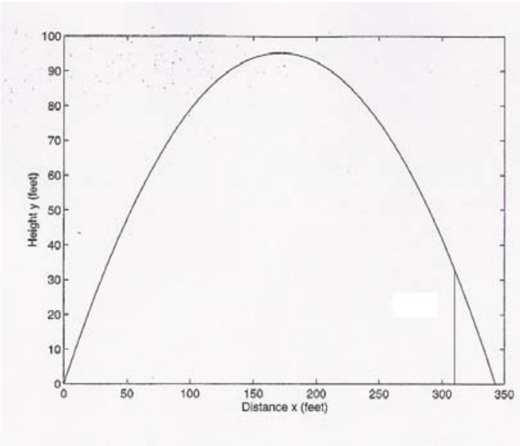
3. Supponete che il seguente polinomio rappresenti l'altitudine in metri durante le prime 48 ore dopo il lancio di un pallone meteorologico:

$$h(t)=-0.12t^4+12t^3-380t^2+4100t+220$$

Le unità di t sono le ore.

(a) Utilizzare Matlab per determinare l'equazione per la velocità di salita oppure discesa del pallone.
(b) Determinare l'equazione per l'accelerazione del pallone.
(c) Disegnare i grafici della quota, della velocità e dell'accelerazione nell'intervallo [0,48].

4. Un giocatore di baseball colpisce la palla a 1.3 m dal suolo. Trascurando la resistenza dell'aria, determinare la velocità minima che il giocatore deve dare alla palla per superare un muro alto 12 m alla distanza di 102 m dalla base. Determinare inoltre l'angolazione con la quale la palla deve essere colpita.



Suggerimento: le equazioni del moto di un proiettile lanciato alla velocità v0 con un'angolazione θ rispetto alla linea orizzontale, sono

$$x(t)=(v0\cos\theta)t \qquad y(t)=-0.5gt^2+(v0\sin\theta)t$$

Ricavare y in funzione di x ….

5. Supponete che dell'acqua venga pompata in un serbatoio inizialmente vuoto. E' noto che la velocità del flusso dell'acqua nel serbatoio al tempo t sia uguale a 50-t l/sec. Si può dimostrare che la quantità Q di acqua che fluisce nel serbatoio durante i primi x secondi è

$$\int_0^x 50-t\,dt$$

(a) determinare l'equazione simbolica che rappresenta la quantità di acqua nel serbatoio dopo x sec;
(b) determinare la quantità di acqua nel serbatoio dopo 30 sec;
(c) determinare la quantità di acqua che è fluita nel serbatoio tra 10 e 15 sec dopo l'inizio del flusso.

La funzione dsolve per risolvere le equazioni differenziali ordinarie

dsolve('eqn')	Restituisce la soluzione dell'equazione differenziale specificata in 'eqn'
dsolve('eq1', 'eq2',…)	restituisce la soluzione del sistema di equazioni differenziali eq1, eq2, …
dsolve('eq1', 'cond1', 'cond2',…)	Risolve l'equazione differenziale eq1 con condizioni al contorno cond1, cond2,…
dsolve('eq1', 'eq2',…, 'cond1', 'cond2',…)	risolve il sistema di equazioni differenziali con condizioni iniziali cond1, cond2,…

Esempi

1) Risolvere l'equazione: $\frac{dy}{dt} + 2y = 12$

```
>> dsolve('Dy+2*y=12')
ans =
6+exp(-2*t)*C1
```

N.B. Per indicare la derivata prima si utilizza la lettera D, per la derivata seconda D2, e così via.

2) Risolvere l'equazione: $\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 y$

```
>> dsolve('D2y=c^2*y')
ans =
C1*sinh(c*t)+C2*cosh(c*t)
```

Esempi

3) Risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x + 3y$$

>> [x,y]=dsolve('Dx=3*x+4*y','Dy=-4*x+3*y')

x = exp(3*t)*(cos(4*t)*C1+sin(4*t)*C2)

y = -exp(3*t)*(sin(4*t)*C1-cos(4*t)*C2)

4) Risolvere l'equazione: $\frac{dy}{dt} = \sin(bt)$ $\quad y(0) = 0$

>> dsolve('Dy=sin(b*t)','y(0)=0')

ans =

(-cos(b*t)+1)/b

Esempi

5) Risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x + 3y$$

$$x(1) = 0$$
$$y(0) = 1$$

>> [x,y]=dsolve('Dx=3*x+4*y','Dy=-4*x+3*y','x(1)=0','y(0)=1')

x = exp(3*t)*(-cos(4*t)*sin(4)/cos(4)+sin(4*t))

y = -exp(3*t)*(-sin(4*t)*sin(4)/cos(4)-cos(4*t))

Esempi

6) MATLAB risolve anche molte equazioni differenziali del primo ordine non lineari:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 4 - y^2} \qquad \boxed{y(0) = 1}$$

```
>> dsolve('Dy=4-y^2','y(0)=1')
ans =
(2*exp(4*t+log(-3))+2)/(-1+exp(4*t+log(-3)))

>> simple(ans)
ans =
(-6*exp(4*t)+2)/(-1-3*exp(4*t))
```