

---

# Metodi Numerici per l'Ingegneria LS

## a.a. 2008-2009

### ● Problemi Ellittici

Fabiana Zama

<http://www.dm.unibo.it/~zama>

[zama@dm.unibo.it](mailto:zama@dm.unibo.it)

# Problemi Ellittici

---

- Problemi ellittici del secondo ordine si incontrano in svariate applicazioni.
- Costituiscono il principale nucleo computazionale nella fase di risoluzioni di problemi più complessi;
- Modello ideale per introdurre la metodologia degli Elementi Finiti ed illustrarne le principali proprietà .

# Problema di Poisson

---

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^r$  un insieme aperto limitato e connesso (dominio) e sia  $\partial\Omega$  la sua frontiera. Consideriamo il problema

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

dove  $f = f(x)$  è una funzione assegnata. La (1) è un'equazione ellittica del secondo ordine, lineare, non omogenea (se  $f \neq 0$ ).

Fisicamente  $u$  può rappresentare lo spostamento verticale di una membrana elastica dovuto all'applicazione di una forza pari a  $f$ , oppure la distribuzione di potenziale elettrico dovuta ad una densità elettrica  $f$ .

# Condizioni al bordo

---

Per avere un'unica soluzione, alla (1) vanno aggiunte delle opportune condizioni al contorno.

- (problema di Dirichlet) Si può ad esempio assegnare il valore di  $u$  sul bordo  $u = g$  su  $\partial\Omega$ ,  $g$  è una funzione assegnata. Il caso  $g = 0$  si dice omogeneo.
- (problema di Neumann) Oppure imporre il valore della derivata normale di  $u$ :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = h, \quad \text{su } \partial\Omega$$

dove  $\mathbf{n}$  la normale uscente da  $\partial\Omega$  e  $h$  una funzione assegnata. Corrisponde, nel caso della membrana ad aver imposto la trazione al bordo. Se  $h = 0$  si dice omogenea.

- (problema misto) Si possono assegnare condizioni al bordo di tipo diverso, ad esempio:

$$\begin{cases} u = g & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

essendo  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$  e  $\text{int}(\Gamma_D) \cap \text{int}(\Gamma_N) = \emptyset$

# Forma Debole

---

Dato il problema: determinare  $u$  tale che

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \Omega \in \mathbb{R}^2 \text{ limitato con frontiera } \partial\Omega$$

La forma debole si ottiene moltiplicando per una funzione arbitraria  $v$  ed integrando su  $\Omega$ :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Teorema della divergenza:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{a}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\gamma$$

...

- $\mathbf{a} = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}))^t$ , funzione vettoriale
- $\mathbf{n} = (n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}))^t$  versore normale uscente da  $\Omega$
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$  vettore delle coordinate spaziali

Si applica il risultato due volte:

- $\mathbf{a} = (\varphi\psi, 0)^t$
- $\mathbf{a} = (0, \varphi\psi)^t$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi d\Omega = - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi \psi n_i d\gamma, \quad i = 1, 2$$

$$\Delta u = \operatorname{div} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v d\Omega &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v d\Omega = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i d\gamma = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i \right) v d\gamma \end{aligned}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \partial u / \partial n$$

formula di Green per il Laplaciano:

$$-\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma$$

Formulazione debole del problema: cercare  $u \in H_0^1(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$



# Forma Debole del Problema di Poisson

---

Consideriamo il problema di Poisson non omogeneo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \phi & \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

dove  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  realizzano una partizione di  $\partial\Omega$  e  $f, g$  e  $\phi$  sono dati.

Supponiamo  $\Gamma_D \neq \emptyset$  per avere unicità della soluzione in senso forte.

Sia  $v$  una funzione test, moltiplicando per  $v$  integrando l'equazione sul dominio:

$$-\int_{\Omega} \Delta u \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} f \, v \, d\Omega$$

---

Grazie alla formula di Green:

$$-\int_{\Omega} -\Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma$$

otteniamo:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Essendo  $\partial u / \partial n = \phi$  su  $\Gamma_N$  si ha:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma - \int_{\Gamma_N} \phi v d\gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

## Forma debole

---

Imponendo che  $v$  sia nulla di  $\Gamma_D$  otteniamo la seguente formulazione debole:

$$\text{trovare } u \in V_g: \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Gamma_N} \phi v d\gamma + \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in V$$

dove

$$V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \equiv \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

ed avendo posto

$$V_g \equiv \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = g \right\}$$

Problema:  $u \in V_g$  invece  $v \in V$ , soprattutto  $V_g$  non è detto che appartenga a  $H_{\Gamma_D}^1$ . Il problema non è simmetrico.

# Problemi Ellittici

---

Si considera il problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \Gamma_D \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} = \phi & \text{in } \Gamma_N \end{cases}$$

dove  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  Ipotesi:  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mu, \sigma \in L^\infty(\Omega)$  Si procede analogamente a prima e si ottiene:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma u v d\Omega = \int_{\Gamma_N} \phi v d\gamma + \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Equivalente a  $a(u, v) = F(v)$  con

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma u v d\Omega, \quad F(v) = \int_{\Gamma_N} \phi v d\gamma + \int_{\Omega} f v d\Omega$$

# Forma simmetrica

---

Ponendo  $\bar{u} = u - R_g$  con  $R_g$  rilevamento del dato al bordo, forma debole è data da:

trovare  $\bar{u} \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \nabla \bar{u} \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \bar{u} v d\Omega = \int_{\Gamma_N} \phi v d\gamma + \int_{\Omega} f v d\Omega + \\ - \int_{\Omega} \mu \nabla R_g \nabla v d\Omega - \int_{\Omega} \sigma R_g v d\Omega, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (2) \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$a(\bar{u}, v) = F(v) - a(R_g, v)$$

# Forma simmetrica

---

- Il problema è simmetrico in quanto lo spazio della soluzione coincide con quello delle funzioni test.
- Le condizioni di Dirichlet sono dette essenziali in quanto compaiono esplicitamente nella definizione dello spazio funzionale del problema.
- Le condizioni di Neumann sono dette naturali in quanto vengono soddisfatte automaticamente dalla soluzione del problema.
- Il metodo degli elementi finiti per la risoluzione numerica di un problema in forma simmetrica dà luogo ad un sistema lineare con matrice simmetrica.
- Il rilevamento del dato al bordo viene costruito mediante approssimazione numerica.

## Esempio

Trovare la formulazione debole del seguente problema di diffusione-trasporto:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = g_D & \text{su } \Gamma_D \\ \mu \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (3)$$

Si moltiplica l'equazione (3) per la funzione test  $v \in V$  con  $V \equiv H_{\Gamma_D}^1$  e si integra su  $\Omega$ :

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu \nabla u) v \, d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla u v \, d\omega = \int_{\Omega} f v \, d\omega$$

Usando la formula di Green:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla u v \, d\omega = \int_{\Omega} f v \, d\omega + \int_{\Gamma_N} g_N v \, d\gamma$$

## Esempio

---

La formulazione debole è quindi:

Cercare  $u \in W_g = \left\{ w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_D} = g_D \right\}$  tale che

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

dove

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla u \, v \, d\omega$$

e

$$F(v) = \int_{\Omega} f \, v \, d\omega + \int_{\Gamma_N} g_N \, v \, d\gamma$$



# Esistenza e Unicità della soluzione

---

Nel caso del problema ellittico con condizioni di Dirichlet omogenee si utilizza il seguente risultato.

● **Teorema Lax Milgram.** Sia  $V$  uno spazio di Hilbert dotato di una norma  $\|\cdot\|_V$  e siano date la forma bilineare  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  e il funzionale lineare  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $a$  è continua se:

$$\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

2.  $a$  è coerciva se:

$$\exists \alpha > 0 : a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

3.  $F$  è limitato se

$$\exists K > 0 : |F(v)| \leq K \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Sotto queste ipotesi esiste un'unica soluzione del problema:

$$\text{trovare } u \in V : a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

# Esistenza e Unicità della soluzione

---

Nel caso del problema ellittico con condizioni miste non omogenee si utilizza il seguente risultato.

- Corollario. Dato il problema Cercare  $u \in W_g = \left\{ w \in H^1(\Omega) : w_{\Gamma_D} = g_D \right\}$  tale che

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \equiv H_D^1$$

con il bordo di  $\Omega$  sufficientemente regolare. Se la forma bilineare  $a(\cdot, \cdot)$  è continua e coerciva in  $V \times V$  e il funzionale  $F(\cdot)$  è lineare, allora la soluzione del problema dato esiste è unica e dipende in modo continuo dai dati.

In generale se  $V = H^s(\Omega)$  allora

$$\|v\|_V = \left( \sum_{j=0}^s \|v^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{con} \quad \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega$$

# Forma variazionale

---

Se la forma bilineare  $a(\cdot, \cdot)$  è anche **simmetrica** ovvero

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V$$

allora il problema debole è equivalente al problema variazionale:

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in V : J(u) = \min_{v \in V} J(v), \\ \text{con } J(v) \equiv \frac{1}{2}a(v, v) - F(v) \end{cases}$$



---

## Metodo di Galerkin

# Metodo di Galerkin

---

Forma debole di un problema ellittico posto su un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\text{trovare } u \in V : a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (4)$$

Si cerca una soluzione approssimata  $u_h \in V_h$  in spazi  $V_h$  dipendenti dal parametro  $h$  tali che:

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < \infty$$

Problema approssimato:

$$\text{trovare } u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

viene detto *problema di Galerkin*.

# Metodo di Galerkin

---

Sia  $\{\varphi_j, j = 1, \dots, N_h\}$  una base per  $V_h$  è sufficiente verificare la forma debole per tutte le funzioni base ovvero:

$$\text{trovare } u_h \in V_h : a(u_h, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h$$

Poichè  $u_h \in V_h$  allora:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j(\mathbf{x})$$

dove gli  $u_j, j = 1, \dots, N_h$  sono coefficienti incogniti. Le equazioni diventano allora:

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h$$

# Metodo di Galerkin

---

Relazioni equivalenti al sistema lineare:  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  dove:

- $A$  è detta matrice di rigidezza o stiffness con elementi:

$$a_{i,j} \equiv a(\varphi_j, \varphi_i)$$

- $\mathbf{f}$  vettore di componenti  $f_i \equiv F(\varphi_i)$ ,
- $\mathbf{u}$  vettore dei coefficienti incogniti  $u_i$ .

# Proprietà

La matrice associata alla discretizzazione di un problema ellittico con il metodo di Galerkin è definita positiva.

*Dimostrazione*

Associamo ad un generico vettore  $\mathbf{v} = v_i$  di  $\mathbb{R}^{N_h}$  la funzione

$v_h = \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j$  in  $V_h$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T A \mathbf{v} &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a(\varphi_j, \varphi_i) v_j = \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} a(\varphi_j v_j, \varphi_i v_i) = a \left( \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Essendo  $a(\cdot, \cdot)$  coerciva (T. Lax milgram) allora  $a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_V^2 \geq 0$

Conseguenze

- esistenza e unicità della soluzione ( $A$  è non singolare),
- $A$  è simmetrica se e solo se la forma bilineare  $a(\cdot, \cdot)$  è simmetrica.



Il problema di Galerkin è stabile uniformemente rispetto ad  $h$  in quanto vale la seguente maggiorazione della soluzione

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

dove  $V' \equiv \{F : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } F \text{ lineare e continuo} \}$  La norma della soluzione  $\|u_h\|_V$  rimane limitata al tendere di  $h$  a zero, uniformemente rispetto ad  $h$ . Equivalentemente,

$$\|u_h - w_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F - G\|_{V'}$$

essendo  $u_h$  e  $w_h$  soluzioni numeriche corrispondenti a due diversi termini noti  $F$  e  $G$ .

# Consistenza: Lemma di Céa

---

Il metodo di Galerkin è fortemente consistente, ovvero

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

*Dimostrazione*

Essendo  $V_h \subset V$ , la soluzione esatta  $u$  soddisfa

$$a(u, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

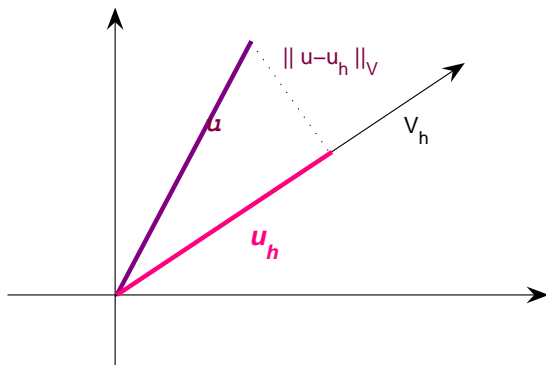
sottraendo la relazione  $a(u_h, v_h) = F(v_h)$  si ha:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

# Interpretazione Geometrica del metodo di Galerkin

Quando  $a(\cdot, \cdot)$  è simmetrica, la forma bilineare può essere interpretata come prodotto scalare in  $V$  e la consistenza come l'ortogonalità tra l'errore di approssimazione,  $u - u_h$  e tutto il sottospazio  $V_h$ . Analogamente al caso euclideo si può dire che la soluzione approssimata  $u_h$  secondo il metodo di Galerkin è la proiezione su  $V_h$  della soluzione esatta  $u$  e quindi è quella che rende minima la *norma dell'energia*:

$$\|u - u_h\|_a = \sqrt{a(u - u_h, u - u_h)}$$



# Convergenza

---

Consideriamo ora il valore che la forma bilineare assume quando entrambi i suoi argomenti sono pari a  $u - u_h$ . Se  $v_h$  è un arbitrario elemento di  $V_h$  si ottiene

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) = \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \end{aligned} \quad (6)$$

(lemma di Céa in quanto  $v_h - u_h \in V_h$ ) Per la continuità della forma bilineare

$$|a(u - u_h, u - v_h)| \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

D'altra parte per la coercività di  $a(\cdot, \cdot)$

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_V^2$$

# Convergenza

---

per cui si ha: 
$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h$$

dunque: 
$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$$

Se si impone

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0, \quad \forall v \in V \quad (7)$$

il metodo di Galerkin è convergente ovvero  $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$

Lo spazio  $V_h$  andrà scelto opportunamente per garantire la proprietà (7), una volta soddisfatto questo requisito la convergenza è comunque assicurata indipendentemente da come è fatta  $u$ . Dalla scelta di  $V_h$  e dalla regolarità di  $u$  dipenderà la velocità di convergenza.

# Metodo EF nel caso monodimensionale

---

Introduciamo una partizione di  $\mathcal{T}_h$  di  $\Omega = (a, b)$  in  $N + 1$  sottointervalli  $K_j \equiv (x_{j-1}, x_j)$  di ampiezza  $h_j = x_j - x_{j-1}$  con

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$$

e poniamo  $h = \max_j h_j$ ,

$$X_h^r \equiv \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_r, \forall K_j \in \mathcal{T}_h\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

$\mathbb{P}_r$  è lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a  $r$  nella variabile  $x$ .

- Gli spazi  $X_h^r$  sono tutti i sottospazi di  $H^1(a, b)$  in quanto sono costituiti da funzioni derivabili tranne che in un numero finito di punti (i vertici  $x_i$  della triangolazione  $\mathcal{T}_h$ ).
- Essi forniscono scelte possibili dello spazio  $V_h$ , pur di incorporare opportunamente le condizioni al bordo.

## Lo spazio $X_h^1$

---

É costituito dalle funzioni continue e lineari a tratti su una partizione  $\mathcal{T}_h$  di  $(a, b)$  della forma  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$

- Nella scelta di una base  $\{\varphi_j\}$  per lo spazio  $X_h^1$  conviene che il supporto di  $\varphi_i$  abbia intersezione non vuota con un numero esiguo di altre funzioni della base. In tal modo molti elementi della matrice  $A$  del metodo di Galerkin saranno nulli.
- Conviene inoltre che la base sia *lagrangiana* in quanto in tal caso i coefficienti della espansione di una generica funzione  $v_h \in X_h^r$  sulla base stessa saranno i valori assunti da  $v_h$  in opportuni punti, che chiamiamo *nodi* (che formano generalmente un sovrainsieme dei vertici di  $\mathcal{T}_h$ ).

## Lo spazio $X_h^1$

---

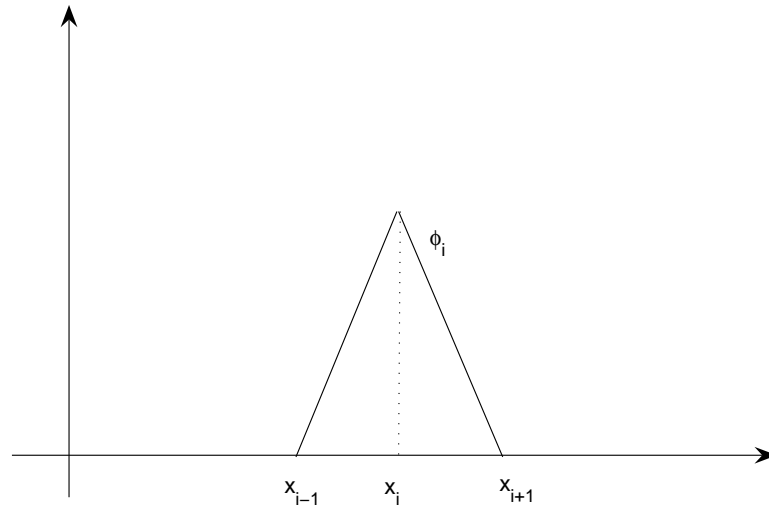
- Poichè per due punti distinti passa un'unica retta ed essendo le funzioni di  $X_h^1$  continue, i *gradi di libertà* (cioè i valori che bisogna assegnare per fissare univocamente una funzione) delle funzioni di questo spazio saranno pari al numero  $N + 2$  di vertici della partizione stessa.
- In questo caso, dunque, nodi e vertici coincidono.
- La base lagrangiana è caratterizzata dalla proprietà seguente:

$$\{\varphi_i\} \in X_h^1 \text{ tale che } \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, N + 1$$

con  $\delta_{i,j} \equiv$  delta di Kronecker.



# Lo spazio $X_h^1$



la sua espressione analitica è :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{per } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{per } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La matrice di rigidezza  $A$  è tridiagonale in quanto  $a_{i,j} = 0$  se  $j \notin \{i-1, i, i+1\}$

## Lo spazio $X_h^2$

---

- Polinomi composti di grado 2 su ciascun sottointervallo di  $\mathcal{T}_h$ .
- I gradi di libertà dello spazio  $X_h^2$  sono i valori di  $v_h$  assunti agli estremi degli intervalli componenti la partizione  $\mathcal{T}_h$  ed ai punti medi degli stessi.
- Ordiniamo i nodi a partire da  $x_0 = a$  fino a  $x_{2N+2} = b$  in tal modo i punti medi corrisponderanno ai nodi di indice dispari, gli estremi degli intervalli a quelli di indice pari.
- La base lagrangiana per  $X_h^2$  è formata dalle funzioni

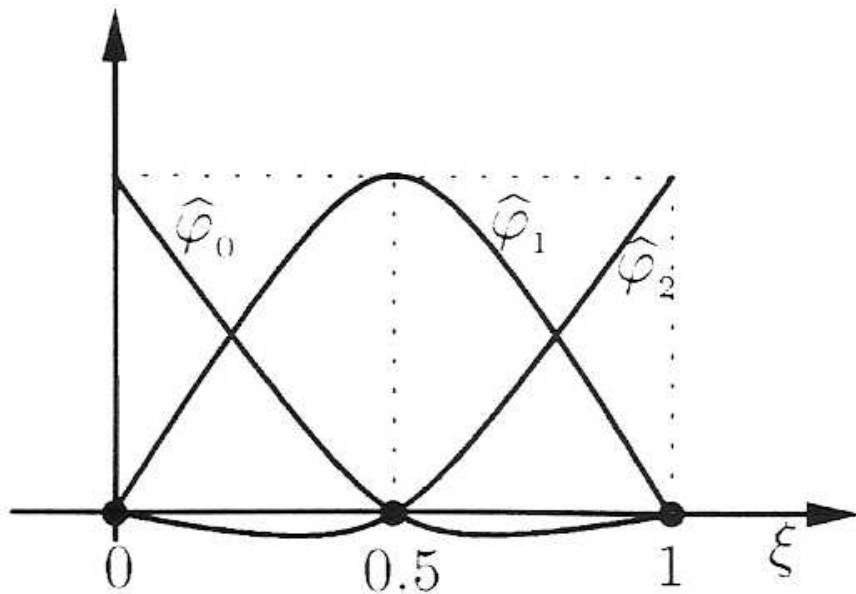
$$\varphi_i \in X_h^2 \text{ tali che } \phi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, 2N+2$$

sono quindi funzioni quadratiche a tratti che assumono il valore 1 e sono nulle nei restanti.

## Esempio

Grafico relativo alla funzione ristretta all'intervallo  $[0, 1]$ :

$$\tilde{\varphi}_0(\xi) = (1 - \xi)(1 - 2\xi), \quad \tilde{\varphi}_1(\xi) = 4(1 - \xi)\xi, \quad \tilde{\varphi}_2(\xi) = \xi(2\xi - 1).$$



le funzioni  $\varphi_{2i}, \varphi_{2i+1}, \varphi_{2i+2}$  si ottengono trasformando  $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ . Per la sua forma particolare è detta *funzione a bolla*.

Procedendo in modo analogo si potranno generare basi per  $X_h^r$  con  $r$  arbitrario.

- Al crescere del grado polinomiale  $r$  aumenta il numero dei gradi di libertà e quindi il costo computazionale,
- l'uso di gradi elevati combinato con distribuzioni equispaziate conduce ad approssimazioni sempre meno stabili a dispetto dell'aumento teorico di accuratezza.

# Elemento Finito Lagrangiano

---

$(K, \Sigma, \mathbb{P}_r)$  dove

- Dominio di definizione  $K$  dell'elemento (in generale un triangolo);
- spazio dei polinomi  $\mathbb{P}_r$  ed una base  $\{\varphi_j\}_{j=0}^r$  di  $\mathbb{P}_r$ .
- insieme di funzionali  $\Sigma : \{\gamma_j : \mathbb{P}_r \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^r$  tali che:  $\gamma_i(\varphi_j) = \delta_{i,j}$  Essi permettono di identificare univocamente i coefficienti  $\{\alpha_j\}_{j=0}^r$  di un polinomio  $p \in \mathbb{P}_r$  rispetto alla base scelta  $p(x) = \sum_{j=0}^r \alpha_j \varphi_j(x)$   
( $\alpha_i = \gamma_i(p), i = 0, \dots, r$ )

# La scelta di $V_h$

---

Come scegliere lo spazio  $V_h$  in cui cercare la soluzione.

- $V_h = \{v_h \in X_h^r : v_h(a) = v_h(b) = 0\}$  per condizioni al bordo in Dirichlet in  $x = a$  e  $x = b$
- $V_h = \{v_h \in X_h^r : v_h(a) = 0\}$  per condizioni al bordo in Dirichlet in  $x = a$  e Neuman in  $x = b$
- $V_h = X_h^r$  per c.b. di Neuman in  $x = a$  e  $x = b$ .

# Interpolazione e stima di interpolazione

---

Per ogni  $v \in C^0(\bar{\Omega})$  con  $\Omega = (a, b)$ , definiamo *interpolante* di  $v$  nello spazio  $X_h^1$ , determinato dalla partizione  $\mathcal{T}_h$ , la funzione  $\Pi_h^1 v$  tale che:

$$\Pi_h^1 v(x_i) = v(x_i) \quad \forall x_i \text{ nodo della partizione } i = 0, \dots, H_h + 1$$

$$\Pi_h^1 v(x) = \sum_{i=0}^{N_h+1} v(x_i) \varphi_i(x)$$

L'operatore  $\Pi_h^1 : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow X_h^1$  che associa ad una funzione  $v$  la sua interpolante  $\Pi_h^1 v$  è detto *operatore di interpolazione*. Analogamente possiamo definire gli operatori  $\Pi_h^r : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow X_h^r$  per  $r \geq 1$ .

# Stime dell'errore di Interpolazione

---

Indicato con  $\Pi_K^r$  l'operatore di interpolazione locale che associa ad una funzione  $v$  il polinomio  $\Pi_K^r v \in \mathbb{P}_r$ , interpolante  $v$  negli  $r + 1$  nodi dell'elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ , definiamo  $\Pi_h^r v$  come

$$\Pi_h^r v \in X_h^r : \Pi_h^r v|_K = \Pi_K^r(v|_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Sia  $v \in H^{r+1}(\Omega)$ , per  $r \geq 1$  e sia  $\Pi_h^r v \in X_h^r$  il suo polinomio interpolatore di grado  $r$ . Vale la seguente stima dell'errore di interpolazione:

$$\|v - \Pi_h^r v\|_{L^2(\Omega)} + h\|v' - (\Pi_h^r v)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_r h^{r+1} \|D^{r+1} v\|_{L^2(\Omega)}$$

dove le  $C_r$  sono costanti indipendenti da  $h$ .

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\Omega \right)^{1/2}$$



# Stima dell'errore nella norma energia

---

Grazie al risultato precedente possiamo ottenere una stima sull'errore di approssimazione del metodo di Galerkin.

**Teorema** Sia  $u \in V$  la soluzione esatta del problema variazionale e  $u_h$  la sua soluzione approssimata con il metodo ad elementi finiti di grado  $r$ , ovvero la soluzione del problema in cui

$$V_h = \{v_h \in X_h^r : v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

Sia inoltre  $u \in H^{p+1}(\Omega)$  per un opportuno  $p$  tale che  $r \leq p$ . Allora vale la seguente disuguaglianza, detta anche stima a priori dell'errore:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} Ch^r \|D^{r+1}u\|_{L^2(\Omega)}$$

•

---

**dimostrazione** Dalla relazione di convergenza:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$$

ponendo  $w_h = \Pi_h^r u$ , l'interpolante di grado  $r$  di  $u$  nello spazio  $V_h$ , si ottiene:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^r u\|_V$$

Usando le stime dell'errore di interpolazione si ottiene la tesi.

# Accuratezza

---

Per aumentare l'accuratezza si possono seguire due strategie:

- diminuire  $h$ , ossia raffinare la griglia;
- aumentare  $h$ , cioè utilizzare elementi finiti di grado più elevato.

Quest'ultima strada ha senso però solo se la soluzione  $u$  è abbastanza regolare: infatti dalla relazione:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} C h^r \|D^{r+1} u\|_{L^2(\Omega)}$$

si ricava che se  $u \in V \cap H^{p+1}(\Omega)$ , il massimo valore di  $r$  che ha senso prendere è  $r = p$ .

•

---

In generale possiamo affermare che: se  $u \in H^{p+1}(\Omega)$ , per un  $p > 0$ , allora

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(p) \frac{h^{\min(r,p)}}{r^p} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)}$$

Valori di  $r$  piú grandi di  $p$  non assicurano un miglioramento dell'approssimazione dunque se la soluzione non è molto regolare non conviene usare elementi finiti di grado elevato, in quanto il maggior costo computazionale non è ripagato da un miglioramento della convergenza.

# Ordine di Convergenza

$r$	$u \in H^1(\Omega)$	$u \in H^2(\Omega)$	$u \in H^3(\Omega)$	$u \in H^4(\Omega)$	$u \in H^5(\Omega)$
1	conv	$h^1$	$h^1$	$h^1$	$h^1$
2	conv	$h^1$	$h^2$	$h^2$	$h^2$
3	conv	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$h^3$
4	conv	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$h^4$

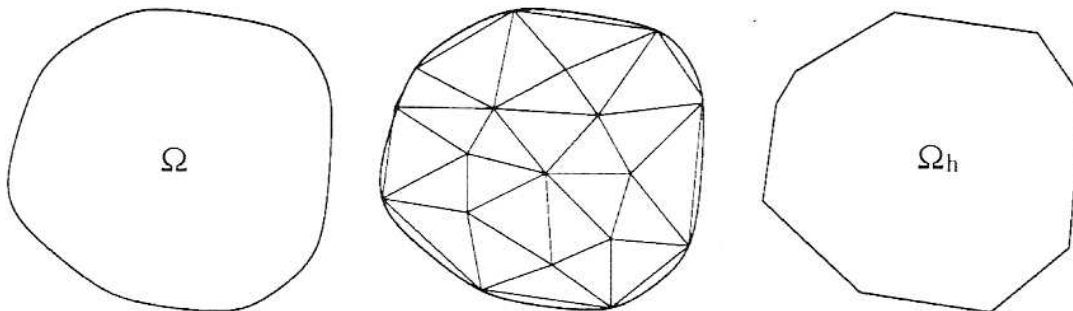
Se la soluzione possiede solo regolarità minima  $p = 0$  si ha comunque convergenza per il lemma di Céa ma la stima non è più valida quindi non si sa dire come l'errore tenda a zero in norma  $V$  al decrescere di  $h$ .

# Triangolazione

- Si considerano domini  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  di forma poligonale.
- Si suddivide il dominio mediante una triangolazione  $T_h$  che lo ricopre con elementi triangolari  $K$  non sovrapposti.

$$\Omega_h = \text{int} \left( \bigcup_{K \in T_h} K \right)$$

- Se il dominio non è poligonale allora triangolazione induce un'approssimazione  $\Omega_h$  del dominio  $\Omega$ .
- Nel seguito  $\Omega$  indicherà sia il dominio computazionale che la sua (eventuale) approssimazione.



# Proprietà della Triangolazione

- Triangolazione conforme
  - Dati  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$  con  $K_1 \neq K_2$  Se  $F = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  allora  $F$  è un vertice o un intero lato dei triangoli  $K_1, K_2$ .
- Triangolazione regolare
  - Posto  $h_k = \text{diam}(K)$  per ogni  $K \in \mathcal{T}_h$ , dove  $\text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} |x - y|$  è il diametro, definiamo  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_k$
  - Sia  $\rho_K$  il diametro del cerchio inscritto al triangolo  $K$  (detto anche sfericità ); una famiglia di triangolazioni  $\{\mathcal{T}_h, h > 0\}$  è detta *regolare* se per un opportuno  $\delta > 0$  è verificata la condizione:

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \delta \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h > 0$$

Una triangolazione comunemente usata è quella di *Delaunay* ossia tale che il cerchio circoscritto a ciascun triangolo non contiene alcun vertice al suo interno.

# Funzioni di base $v_h$

---

Indichiamo con  $\mathbb{P}_r$  lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a  $r$  per  $r = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}_1 = \{f(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{P}_2 = \{f(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 + ex_1^2 + gx_2^2, \text{ con } a, b, c, d, e, g \in \mathbb{R}\} \quad (8)$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}_r = \{f(x_1, x_2) = \sum_{i+j \leq r} a_{i,j} x_1^i x_2^j, \text{ con } a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$$



# Elementi finiti

---

Sia  $r \geq 1$ . Introduciamo lo spazio generatore degli elementi finiti

$$X_h^r = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_r, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

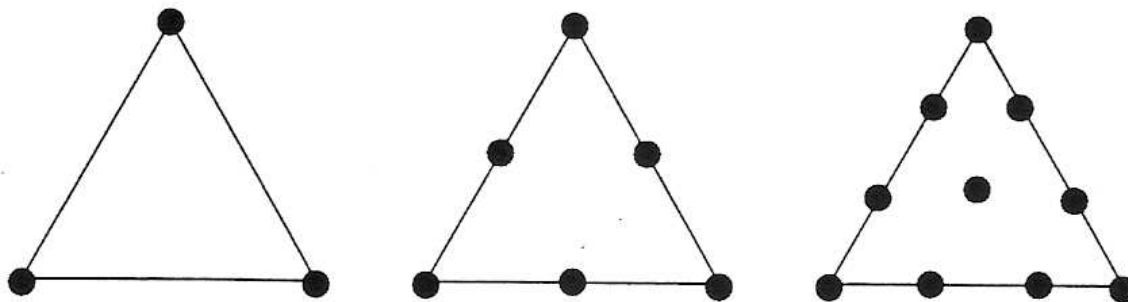
la cui dimensione è data da

$$\dim \mathbb{P}_r = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

Ad esempio  $\dim \mathbb{P}_1 = 3$ ,  $\dim \mathbb{P}_2 = 6$  e  $\dim \mathbb{P}_3 = 10$ , quindi su ogni singolo elemento della triangolazione  $\mathcal{T}_h$  la generica funzione  $v_h$  è ben definita qualora se ne conosca il valore rispettivamente in 3, 6, 10 punti.

## Posizione dei nodi

---



Nodi per polinomi lineari (sinistra), quadratici (al centro), cubici (a destra). Tale scelta garantisce che la soluzione è continua.

# Elementi finiti

---

Definiamo inoltre

$$X_h^r = \{v \in X_h^r : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Gli spazi  $X_h^r$  e  $X_h^r$  sono idonei ad approssimare rispettivamente  $H^1(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$  in virtù della seguente proprietà :

Condizione sufficiente perchè una funzione  $v$  appartenga a  $H^1(\Omega)$  è che  $v \in C^0(\bar{\Omega})$  e che  $v$  appartenga a  $H^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$

# Approssimazione del problema di Poisson

---

Posto  $V_h = X_h^r$ ,

$$\text{trovare } u_h \in V_h : \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h$$

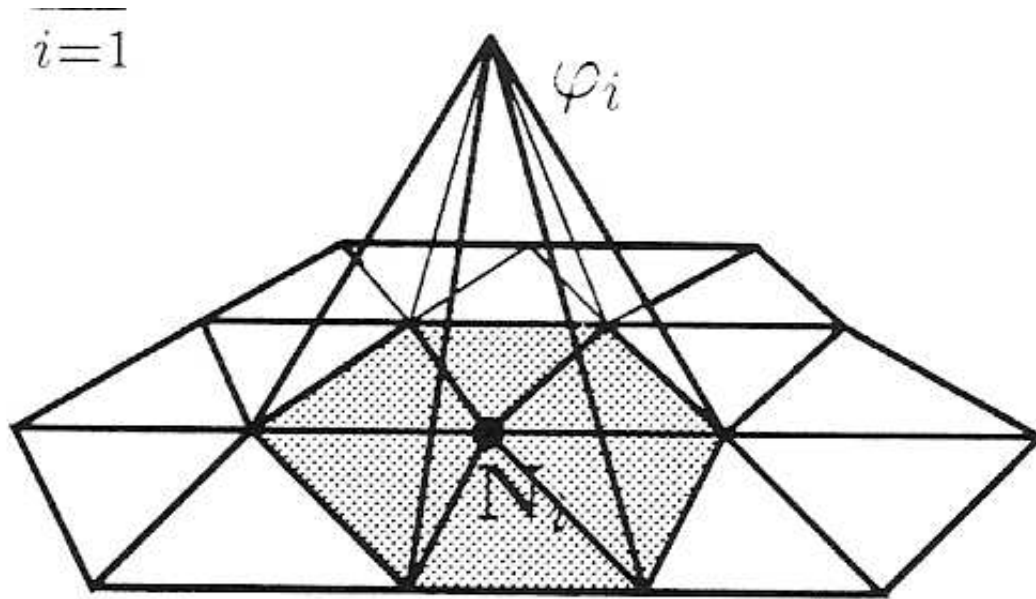
Ogni funzione  $v_h \in V_h$  è caratterizzata in modo univoco dai valori che assume nei nodi  $\mathbf{N}_i, i = 1, \dots, N_h$  della triangolazione  $\mathcal{T}_h$  (escludendo il bordo dove  $v_h = 0$ ); ne consegue che una base dello spazio  $V_h$  può essere l'insieme della  $\phi_j \in V_h, j = 1, \dots, N_h$ , tali che:

$$\phi_j(\mathbf{N}_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, N_h$$

# Approssimazione del problema di Poisson

Se  $r = 1$ , i nodi sono vertici non appartenenti al bordo di  $\Omega$  degli elementi, mentre  $\phi_j$  è lineare su ogni triangolo ed assume il valore 1 nel nodo  $\mathbf{N}_j$  e 0 in tutti gli altri nodi della reticolazione.

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \phi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \text{ con } v_i = v_h(\mathbf{N}_i)$$



# Approssimazione del problema di Poisson

---

Esprimendo  $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(\mathbf{x})$ , ed imponendo che essa verifichi  $a(u_h, \varphi_i) = F(\varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N_h$  per ogni funzione della base stessa, si trova il seguente sistema lineare di  $N_h$  equazioni nelle  $N_h$  incognite  $u_j$ .

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, N_h$$

$$A = [a_{i,j}] \text{ con } a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\Omega$$

$\mathbf{u} = [u_i]$  con  $u_i = u_h(\mathbf{N}_i)$   $\mathbf{b} = [b_i]$ , con  $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega$

Il sistema lineare che si ottiene  $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$  è caratterizzato da una matrice sparsa in particolare  $a_{i,j}$  è diverso da zero solo se  $\mathbf{N}_j$  e  $\mathbf{N}_i$  sono nodi dello stesso triangolo.

## Caso non omogeneo

---

Indichiamo con  $\mathbf{N}_h$  i nodi interni della triangolazione  $\mathcal{T}_h$  e con  $\mathbf{N}_h^t$  il numero totale, inclusi quindi i nodi del bordo, che per comodità, supporremo enumerati per ultimi.

L'insieme dei nodi di bordo sarà dunque formato da  $\{\mathbf{N}_i, i = N_h + 1, \dots, \mathbf{N}_h^t\}$

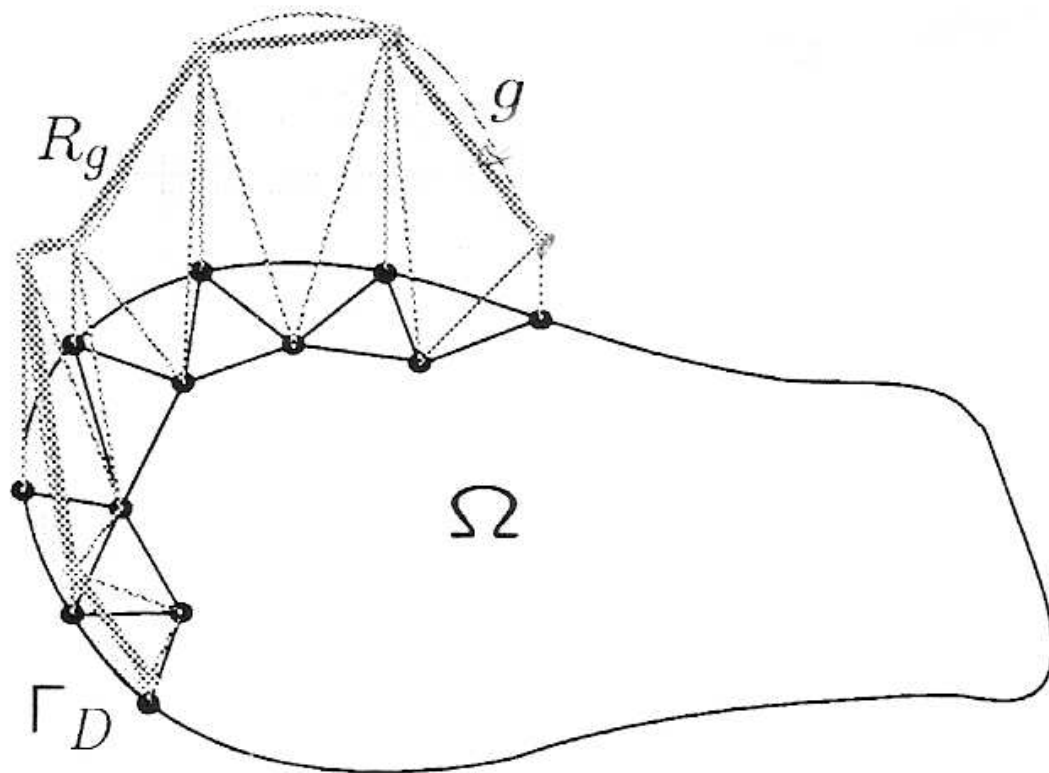
Una possibile approssimazione  $g_h$  del dato al bordo  $g$  può essere ottenuta tramite interpolazione sullo spazio formato dalle funzioni traccia su  $\partial\Omega$  di funzioni di  $X_h^t$

$$g_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=N_h+1}^{\mathbf{N}_h^t} g(\mathbf{N}_i) \varphi_i|_{\partial\Omega}(\mathbf{x})$$

# Caso non Omogeneo

il suo rilevamento  $R_{g_h} \in X_h^r$  è

$$R_{g_h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=N_h+1}^{N_h^t} g(\mathbf{N}_i) \varphi_i(\mathbf{x})$$





---

La formulazione ad elementi finiti diventa: trovare  $\bar{u}_h \in V_h$ :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Omega} \nabla R_{g_h} \nabla v_h d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h$$

la soluzione approssimata è fornita da  $u_h = \bar{u}_h + R_{r_h}$ . Si noti che grazie al particolare rilevamento adottato, si può dare il seguente significato algebrico:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{g}$$

dove  $u_i = \bar{u}_h(\mathbf{N}_i)$

---

Posto  $N_h^b = N_h^t - N_h$  (numero dei nodi al bordo) il vettore  $g \in \mathbb{R}^{N_h^b}$  e la matrice  $B \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h^b}$  hanno componenti:

$$g_i = g(\mathbf{N}_{i+N_h}), \quad i = 1, \dots, N_h^b$$

$$b_{i,j} = \int_{\omega} \nabla \varphi_{j+N_h} \cdot \nabla \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, N_h, \quad j = 1, \dots, N_h^b$$

Si noti come le componenti di  $B$  corrispondano alle prime  $N_h$  colonne della matrice di rigidità

La matrici  $A$  e  $B$  sono *sparse*: precisamente il numero degli elementi non nulli è dell'ordine di  $N_h$  (e non  $N_h^2$ ). Un efficace programma di calcolo memorizzerà esclusivamente questi ultimi. completa (comprendente anche i termini corrispondenti ai nodi al bordo).

# Condizionamento della matrice $A$

---

Come già dimostrato, la matrice  $A = [a(\varphi_j, \varphi_i)]$  è definita positiva inoltre  $A$  risulta essere simmetrica se la forma bilineare  $a(\cdot, \cdot)$  è simmetrica. Il suo numero di condizionamento è dato da:

$$K_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

essendo  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$ , gli autovalori di modulo massimo e minimo di  $A$ . Si può dimostrare che

$$K_2(A) = Ch^{-2}$$

dove  $C$  è una costante indipendente da  $h$ , ma dipendente dal grado degli elementi finiti utilizzati.

# Stima dell'Errore

---

Sia  $u$  la soluzione esatta del problema debole  $a(u, v) = F(v)$  e  $u_h$  una soluzione fem con elementi di grado  $r$ . Se  $u \in H^{r+1}(\Omega)$  allora vale la seguente stima dell'errore:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} Ch^r \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

con  $M, \alpha, C$  costanti indipendenti da  $h$ . Per aumentare l'accuratezza si possono seguire due strade:

- diminuire  $h$ , ovvero raffinare la griglia;
- Aumentare il grado  $r$ . Questo è possibile se  $u$  è sufficientemente regolare, in generale se  $u \in H^{p+1}(\Omega)$  con  $p > 0$  allora:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^s \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}, \quad s = \min(r, p)$$

# Implementazione Metodo di Galerkin

---

Sia  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_{dof}}$  una base lagrangiana di  $V_h$ , ovvero tale che  $\varphi_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{i,j}$ , dove  $\mathbf{a}_j, j = 1, \dots, N_{dof}$  sono i nodi della triangolazione  $\mathcal{T}_h$ . Sfruttando l'additività dell'integrale:

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_{i,j}^K, \quad f_i = F(\varphi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} f_i^K, \quad \forall i, j = 1, \dots, N_{dof}$$

dove

$$a_{i,j}^K = a^K(\varphi_j, \varphi_i) = \int_K \mu \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x} - \int_K \mathbf{b} \varphi_j \nabla \varphi_i d\mathbf{x} + \int_K \sigma \varphi_j \varphi_i d\mathbf{x}$$

$$f_i^K = F^K(\varphi_i) = \int_K f \varphi_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N \cap K} h \varphi_i d\gamma - a(R_g, \varphi_i)$$

# Implementazione Metodo di Galerkin

---

Per assemblare la matrice  $A$  e il termine noto  $F$  occorre calcolare per ogni triangolo  $K \in \mathcal{T}_h$  la matrice locale  $A^K \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_r \times \mathcal{N}_r}$  ed il termine noto locale  $f^k \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_r}$  dove

$$\mathcal{N}_r = \dim \mathbb{P}_r = \frac{(r+1)(r+2)}{2}, \quad r \geq 1$$

Il calcolo degli integrali sull'elemento  $K$  è svolto mediante formule di quadratura. In generale per assicurare la convergenza ottimale del metodo di Galerkin è necessario utilizzare formule di quadratura con  $m \geq (2r - 2)$  per quanto riguarda i contributi su  $K$  mentre è necessario utilizzare formule di quadratura con  $m \geq (2r - 1)$  nel calcolo dei contributi dovuti agli integrali su  $\partial K \cap \Gamma_D$ .

# Algoritmo di Calcolo

---

1. definizione del dominio del problema;
2. costruzione della triangolazione;
3. definizione delle condizioni al contorno;
4. assemblaggio di A e F:
  - (a) ciclo sugli elementi K:
    - calcolo di  $A^K$ , e  $f^K$
    - imposizioni delle condizioni al bordo,
5. Soluzione del sistema lineare  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$
6. plot soluzione, calcolo errori