Metodi Numerici per l'Ingegneria LS
a.a. 2008-2009

- **Problemi Ellittici**

Fabiana Zama

http://www.dm.unibo.it/∼zama

zama@dm.unibo.it

Equazioni di Diffusione-Trasporto

$$-\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \sigma u = f \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \tag{2}$$

Condizioni:

- $\mu, \sigma \in L^\infty(\Omega)$, $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, [a]
- $\mathbf{b} \in [L^\infty(\Omega)]^2$, $\nabla \cdot \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$,
- $f \in L^2(\Omega)$

In molti casi il termine diffusivo $-\nabla \cdot (\mu \nabla u)$ è dominato da quello convettivo (o di trasporto) $\mathbf{b} \cdot \nabla u$ oppure da quello reattivo σu. In questo caso si possono presentare *strati limite* nella soluzione, ovvero regioni a forte gradiente in prossimità della frontiera e la soluzione numerica può diventare problematica.

---

[a]* Si definisce $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni che sono limitate q.o. (quasi ovunque a meno di un insieme di misura nulla) in Ω

Forma Debole

Si introduce una funzione test $v \in V$ e si integra usando la formula di Green:

$$-\int_\Omega \nabla \cdot (\mu \nabla u)\, v d\Omega = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mu \nabla u}{\partial x_i} v d\Omega =$$

$$-\sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\partial\Omega} (\mu \nabla u) n_i v d\gamma + \int_\Omega c \nabla u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \right) = -\int_{\partial\Omega} (\mu \nabla u) \cdot \mathbf{n} v d\gamma + \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \nabla u v d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = \sum_{i=1}^{2} \left(\int_\Omega b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} u d\Omega - \int_{\partial\Omega} b_i n_i u v d\gamma \right) =$$

$$\int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla v) u d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} u v d\gamma$$

Ponendo $V \equiv H_0^1(\Omega)$ si ottiene

$$\int_\Omega \left(-\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \sigma u - f\right) v d\Omega =$$

$$\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla v) u d\Omega + \int_\Omega \sigma u v \Omega - \int_\Omega f v d\Omega$$

Forma debole

Si introduce la forma bilineare $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_\Omega u \mathbf{b} \cdot \nabla v d\Omega + \int_\Omega \sigma u v d\Omega$$

dove $V \equiv H^1_0(\Omega)$. la forma debole è data da:

$$\text{trovare } u \in V : a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V$$

La soluzione esite ed è unica in quanto si prova che

- la forma bilineare è coerciva:

$$a(u,v) = \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \alpha = \frac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2}$$

  con $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$

- la forma bilineare è continua:

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad M = \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu\| L^\infty(\Omega) + \|\sigma\| L^\infty(\Omega)$$

Problema di Galerkin

trovare $u_h \in V_h : \ a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

dove V_h è una famiglia di sottospazi di dimensione finita di $H_0^1(\Omega)$.
Si prova che:

- $\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\mu_0} \|f\|_{L^2(\Omega)}$
  Il gradiente può essere tanto piú grande quanto piú μ_0 è piccola.
- vale la seguente stima dell'errore:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

La costante M/α diventa tanto piú grande tanto piú cresce il rapporto

$$\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} / \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}$$

ossia quando il termine convettivo domina quello diffusivo.

Occorre quindi modificare opportunamente il problema di Galerkin.

Diffusione Artificiale

Il metodo della viscosità artificiale (upwind) si può estendere al caso bidimensionale. Si aggiunge alla forma bilineare il termine:

$$Qh \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h d\Omega, \quad Q > 0$$

questo equivale ad aggiungere il termine di diffusione artificiale $-Qh\triangle u$ al problema di partenza:

$$-\nabla \cdot (\mu \nabla u) - Qh\triangle u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \sigma u = f$$

Si aggiunge una diffusione supplementare nella direzione del campo $\mathbf{b}$, come è giusto ed anche in quella ortogonale (non necessaria).

Esempio Dato il problema $-\mu\triangle u + \frac{\partial u}{\partial x} = f$ la direzione del campo di trasporto è $[1, 0]$. Si vorrebbe aggiungere una diffusione artificiale unicamente in tale direzione: $-Qh\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e non $-Qh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

Diffusione Streamline

Il termine corretto di stabilizzazione dovrebbe essere:

$$-Qh\nabla \cdot [(\mathbf{b} \cdot \nabla u)\mathbf{b}] = -hQ\nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{b}\right)$$

Il problema di Galerkin risulta quindi:

$$\text{trovare } u_h \in V_h : a_h(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

dove

$$a_h(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + b_h(u_h, v_h), \quad b_h(u_h, v_h) = Qh(\mathbf{b} \cdot \nabla u_h, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) =$$

$$Qh\left(\frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{b}}, \frac{\partial v_h}{\partial \mathbf{b}}\right)$$

Si aggiunge un termine proporzionale alla derivata seconda nella direzione del campo $\mathbf{b}$ (streamline). Il termine di stabilizzazione può essere espresso come $\nabla \cdot (\mu_a \nabla u)$ dove $[\mu_a]_{i,j} = Qhb_ib_j$. L'accuratezza di questo metodo è $O(h)$.

Stabilizzazione fortemente consistente

Si aggiunge un termine al problema di Galerkin:

trovare $u_h \in V_h : \quad a(u,v) + \mathfrak{L}_h(u_h; f, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$

Il termine aggiunto deve verificare l'ipotesi: $\mathfrak{L}_h(u; f, v_h) = 0$, $\forall v_h \in V_h$
Una scelta possibile è :

$$\mathfrak{L}_h(u_h; f, v_h) = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \delta(Lu_h - f, \mathcal{S}_K^{(\rho)})_{L^2(K)}$$

dove

$$(u,v)_{L^2(K)} = \int_K u, v dK$$

$$\mathcal{S}_K^{(\rho)}(v_h) = \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} (L_{SS} v_h + \rho L_S v_h)$$

I termini L_S e L_{SS} indicano rispettivamente la *parte simmetrica* e la *parte antisimmetrica* dell'operatore L. $Lu = f$ rappresenta il problema di diffusione-trasporto-reazione con condizioni al bordo omogenee $u = 0$, su $\partial\Omega$

Dato $Lu = -\mu \triangle u + \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + \sigma u$ osserviamo che:

$$\nabla \cdot ((\mathbf{b}u)) = \frac{1}{2}\nabla \cdot ((\mathbf{b}u)) + \frac{1}{2}\nabla \cdot ((\mathbf{b}u))$$

$$= \frac{1}{2}\nabla \cdot ((\mathbf{b}u)) + \frac{1}{2}u\nabla \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot (\nabla u)$$

quindi si può scrivere:

$$Lu = -\mu \triangle u + \left[\sigma + \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{b}\right] u + \frac{1}{2}\left[\nabla \cdot ((\mathbf{b}u)) + \mathbf{b} \cdot (\nabla u)\right]$$

Si osserva che il termine di reazione è diventato adesso:

$$\sigma^* = \sigma + \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{b}$$

dunque si ha la seguente relazione :

$$Lu = L_S u + L_{SS} u \quad \text{con}$$

$$L_S u = -\mu \triangle u + \left(\sigma + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \right) u,$$

$$L_{SS} u = \frac{1}{2} \left(\mathbf{b} \cdot \nabla u + \nabla \cdot (\mathbf{b} u) \right)$$

L_S è detta *parte simmetrica* dell'operatore L in quanto si ha
$(L_S u, v) = (u, L_S v)$
L_{SS} è detta *parte antisimmetrica* dell'operatore L poichè
$(L_{SS} u, v) = -(u, L_{SS} v)$

Metodi GLS SUPG DW

Si pone:

- $\rho = 1$ metodo Galerkin Least Squares (GLS):

$$\mathcal{S}_K^{(1)}(v_h) = \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} L v_h$$

- $\rho = 0$ metodo Stramline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG):

$$\mathcal{S}_K^{(0)}(v_h) = \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} L_{SS} v_h$$

- $\rho = -1$ Metodo Douglas-Wang (DW)

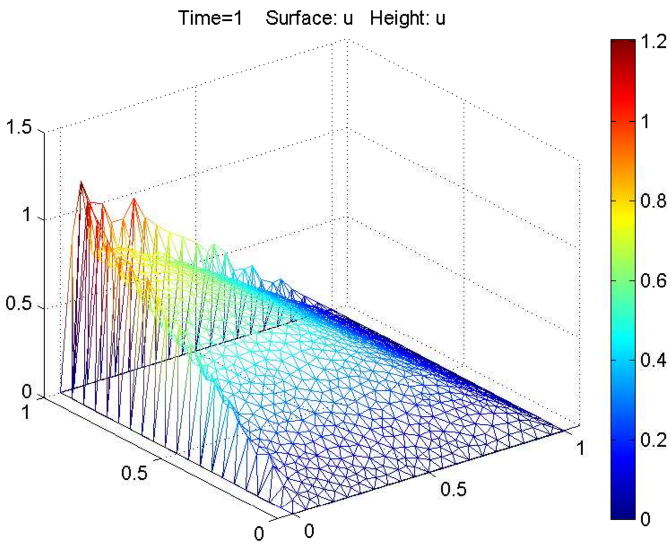
$$\mathcal{S}_K^{(-1)}(v_h) = \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} (L_{SS} - L_S) v_h$$

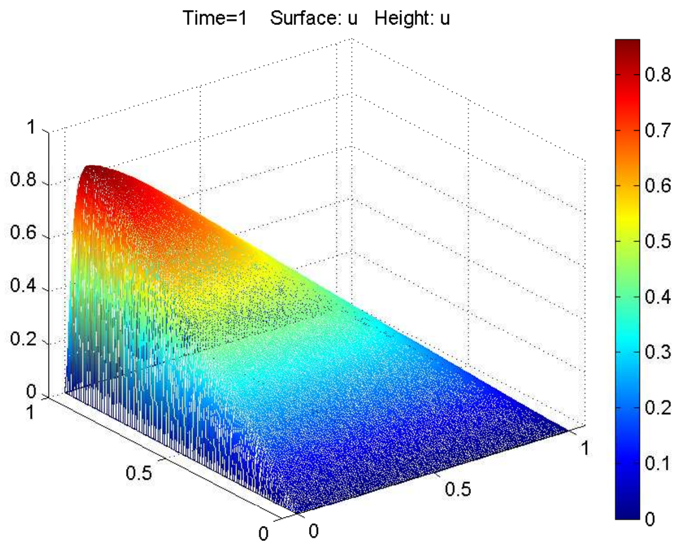
Esempio 1

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\mu \triangle u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 1 & \text{in } \Omega \equiv (0,1) \times (0,1) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \mathbf{b} = (-1,1)^t$$

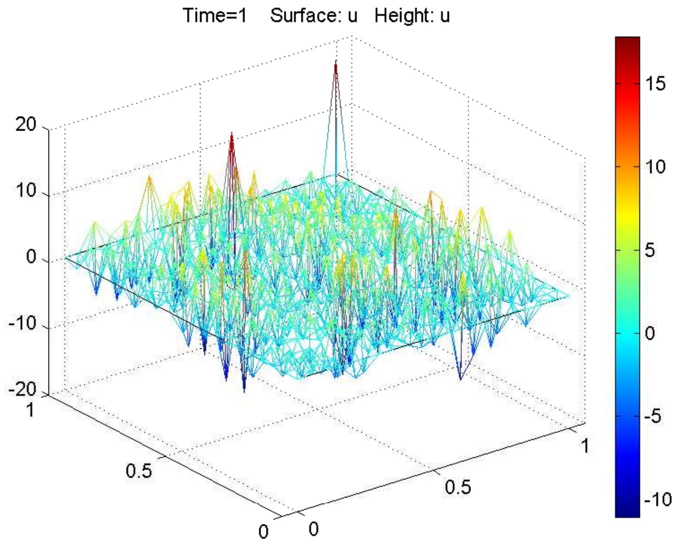
Si considera il caso $\mu = 10^{-2}$, $\mathbb{P}e_g = \frac{|b|L}{2\mu} = 70$. Usando il metodo di galerkin ed una griglia triangolare di misura $h = 0.05$ ($DOF = 882$) si hanno soluzioni oscillanti infatti il numero di Peclet locale è $\mathbb{P}e = \frac{|b|h}{2\mu} = 3.5$. Se il passo diminuisce $h = 0.01$ ($DOF = 21450$) la soluzione è regolare ($\mathbb{P}e = \frac{|b|h}{2\mu} = 0.7$)

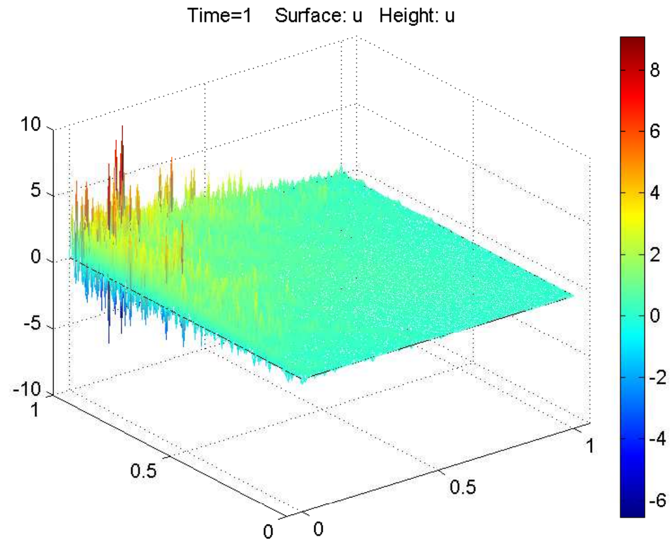




Esempio 2

Si considera il problema dell’esempio1 con $\mu = 10^{-5}$ $\mathbb{P}e_g = \frac{|b|L}{2\mu} = 7 \cdot 10^4$. I passi $h = 0.05$($\mathbb{P}e = 3.510^3$) e 0.01 ($\mathbb{P}e = 710^2$) danno soluzioni oscillanti.



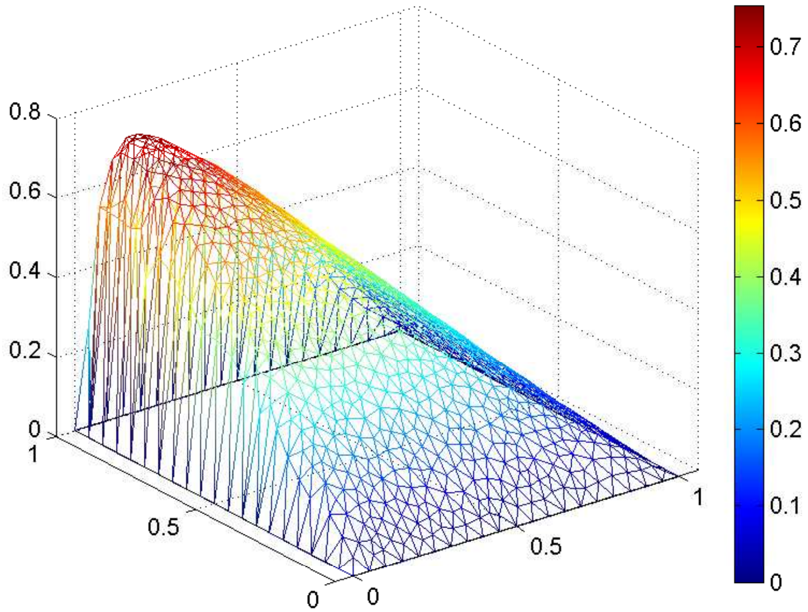


Per avere una soluzione stabile occorre prendere $h < 1.410^{-5}$

Stabilizzazione AD

Risultato ottenuto aggiungendo un termine di diffusione artificiale (AD): $\mu_h = h|\mathbf{b}|$ Il numero di Peclet del problema modificato è dato da:

$$\mathbb{P}e = \frac{h|\mathbf{b}|}{2(\mu + h|\mathbf{b}|)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\mu}{h|\mathbf{b}|} + 1} < 1$$



Stabilizzazione SUPG

Risultato ottenuto con Stabilizzazione SUPG. $\|u_{SUPG} - u_{AD}\| = 9.68610^{-2}$