Problemi Parabolici

Metodi a elementi finiti

Problema Parabolico 1D

Equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(1,t) = 1 \qquad t > 0$$

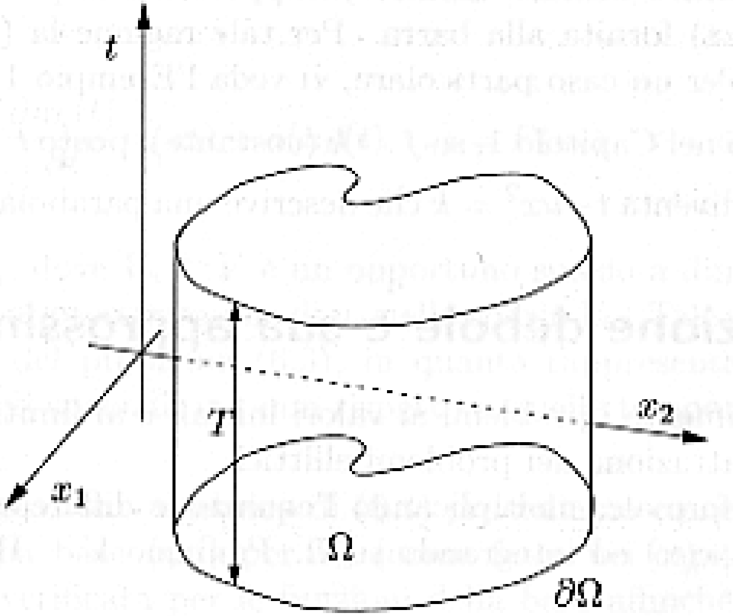
Suddividiamo l'intervallo [0,1] in M-1 parti:

$0=x_1<x_2<\ldots<x_{M-1}<x_M=1$

Come approssimante prendiamo: $u_M(t,x) = \sum_{i=1}^{M} u_i(t)\varphi_i(x)$

Problemi Parabolici 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \qquad x \in \Omega, \quad t > 0$$



Ω **dominio di** $\Re^2$

$f = f(\mathbf{x}, t)$ **funzione assegnata**

$L = L(x)$ **generico operatore ellittico**

agente sull'incognita $u = u(\mathbf{x}, t)$

$$\boxed{Lu \equiv \nabla \cdot (k \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}}$$

Di solito interessa la soluzione in

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

cilindro in $\Re^2 \times \Re^+$

Problemi Parabolici 2D

Affinché il problema sia ben posto bisogna assegnare delle condizioni iniziali unitamente a delle condizioni al contorno:

$$\boldsymbol{C.I.} \qquad \boldsymbol{u}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\boldsymbol{C.C.} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{t}) = \varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{t}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad e \quad \forall \boldsymbol{t} > 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{n}} = \psi(\mathbf{x},\boldsymbol{t}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \quad e \quad \forall \boldsymbol{t} > 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{u}_0,\ \varphi,\ \psi$ *funzioni assegnate*

$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \phi$

Γ_D *frontiera di Dirichelet*

Γ_N *frontiera di Neumann*

Formulazione debole

Procediamo in modo formale. Moltiplichiamo l'equazione differenziale $\forall t > 0$ per una funzione test ***v=v(x)*** ed integriamo su Ω. Poniamo $V = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ *e* $\forall t > 0$ cerchiamo $u(t) \in V$

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega + a(u(t), v) = F(v) \qquad \forall v \in V$$

con $u(0)=u_0$, dove ***a(.,.)*** e ***F(.)*** sono la forma bilineare e il funzionale associati rispettivamente all'operatore ellittico **L** e al termine noto ***f***, e dove si è supposto $\varphi=0$ e $\psi=0$ per semplicità.

formulazione debole

Approssimazione di Galerkin

$$\forall t > 0 \qquad cercare \quad u_h(t) \in V_h \quad tale\ che$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}\, v_h \, d\Omega + a(u_h(t), v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

con $u_h(0) = u_{0h}$, *dove* $V_h \subset V$ *è un opportuno spazio di dimensione finita e* u_{0h} *è una conveniente approssimazione di* u_0 *nello spazio* V_h.

Semidiscretizzazione : rappresenta una discretizzazione del problema nelle sole variabili spaziali, ma non rispetto a quelle temporali.

Formulazione debole

Introduciamo una **base** $\{\varphi_j\}$ per $\mathbf{V_h}$.

Imponiamo che la precedente equazione valga per le funzioni della base. Per ogni ***t>0*** anche la soluzione è esprimibile come combinazione lineare della base

$$u_h(\mathbf{x},t)=\sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\varphi_j(\mathbf{x})$$

incognite del problema

$\dot{u}_j(t)$ *la derivata della funzione* $u_j(t)$ *rispetto al tempo*

Approssimazione Galerkin

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t)\varphi_j\varphi_i \, d\Omega + a\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\varphi_j,\varphi_i\right) = F(\varphi_i) \qquad i = 1,2,\dots,N_h$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_\Omega \varphi_j\varphi_i \, d\Omega}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\, \underbrace{a(\varphi_j,\varphi_i)}_{a_{ij}} = \underbrace{F(\varphi_i)}_{f_i(t)} \qquad i = 1,2,\dots,N_h$$

Matrice di massa **Matrice di rigidezza** **Vettore dei termini noti**

approssimazione Galerkin

$$u = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N_h}(t)]^T$$ **Vettore incognite**

$$M = [m_{ij}]$$ **Matrice di massa**

$$A = [a_{ij}]$$ **Matrice di rigidezza**

$$f = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_{N_h}(t)]^T$$ **Vettore termini noti**

$$M \dot{u}(t) + A\ u(t) = f(t)$$

M è **invertibile** (essendo definita positiva)

$$\dot{u}(t) = -M^{-1} A\ u(t) + M^{-1} f(t)$$

Sistema di equazioni differenziali ordinarie (ODE) in forma normale

Calcolo della soluzione

θ-metodo: discretizza la derivata temporale con un semplice rapporto incrementale e sostituisce gli altri termini con una combinazione lineare del valore al tempo $\mathbf{t^k}$ e di quello $\mathbf{t^{k+1}}$, combinazione che dipende dal parametro θ $(0 \leq \vartheta \leq 1)$

$$M\frac{u^{k+1}-u^{k}}{\Delta t}+A\left[\vartheta u^{k+1}+(1-\vartheta)u^{k}\right]=\vartheta f^{k+1}+(1-\vartheta)f^{k}$$

$\Delta t = t^{k+1} - t^{k} \qquad k = 0,1,....$ Passo temporale (qui supposto costante)

Calcolo della soluzione

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{u}^{k+1}-\boldsymbol{u}^{k}}{\Delta \boldsymbol{t}}+A\left[\vartheta \boldsymbol{u}^{k+1}+(\mathbf{1}-\vartheta)\boldsymbol{u}^{k}\right]=\vartheta \boldsymbol{f}^{k+1}+(\mathbf{1}-\vartheta)\boldsymbol{f}^{k} \quad (\mathbf{0}\le\vartheta\le\mathbf{1})$$

$\vartheta = \mathbf{0}$ *Metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito)*

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{u}^{k+1}-\boldsymbol{u}^{k}}{\Delta \boldsymbol{t}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{k}=\boldsymbol{f}^{k}$$

Accurato al **primo *ordine* *rispetto a Δt***

$\vartheta = \mathbf{1}$ *Metodo di Eulero all'indietro (Eulero Implicito)*

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{u}^{k+1}-\boldsymbol{u}^{k}}{\Delta \boldsymbol{t}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{k+1}=\boldsymbol{f}^{k+1}$$

Accurato al **primo *ordine* *rispetto a Δt***

$\vartheta = 1/2$ Metodo di Crank-Nicolson (o dei trapezi)

$$M\frac{u^{k+1}-u^{k}}{\Delta t}+\frac{1}{2}A\left(u^{k+1}+u^{k}\right)=\frac{1}{2}\left(f^{k+1}+f^{k}\right)$$

Accurato al **secondo *ordine* *rispetto a Δt***

Calcolo della soluzione

$\vartheta = 0 \quad$ *Metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito)*

$$M \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + A u^k = f^k$$

$\vartheta = 1 \quad$ *Metodo di Eulero all'indietro (Eulero Implicito)*

$$M \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + A u^{k+1} = f^{k+1}$$

Sistema di equazioni lineari: matrice dei coefficienti $\quad \dfrac{M}{\Delta t} \quad \vartheta = 0$

$\dfrac{M}{\Delta t} + A \quad \vartheta = 1$

Se si rende la matrice M diagonale,
le equazioni si disaccoppiano. Questa operazione
viene fatta eseguendo il cosiddetto
***lumping* della matrice di massa**.

Schema esplicito condizionatamente stabile: $\quad \Delta t \le c h^2, \quad c > 0$

Calcolo della soluzione

$$M\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t}+A\left[\vartheta u^{k+1}+(1-\vartheta)u^k\right]=\vartheta f^{k+1}+(1-\vartheta)f^k \quad (0\le\vartheta\le 1)$$

Matrice associata al sistema $K=\frac{M}{\Delta t}+\vartheta A \quad \vartheta>0$

E' invariante nel tempo (essendo L, e quindi A, indipendente dal tempo); se la reticolazione spaziale non cambia, può essere fattorizzata una volta all'inizio del processo.

Dato che M è simmetrica, se A è simmetrica anche **K** lo è, per cui si può usare, ad es., la fattorizzazione di Cholesky: $\mathbf{K=HH^T}$

Ad ogni passo temporale andranno quindi risolti due sistemi triangolari in $\mathbf{N_h}$ incognite che richiedono ciascuno $N_h^2/2$

$$\begin{cases} Hy=g \\ H^T u^{k+1}=y \end{cases}$$

Stabilità

Se $\vartheta \geq 1/2$ il θ-metodo è **incondizionatamente stabile**, ovvero lo è per ogni Δt.

Se $\vartheta < 1/2$ il θ-metodo è stabile solo per

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1-2\vartheta)\lambda_{N_h}}$$

Max autovalore forma bilineare *a*