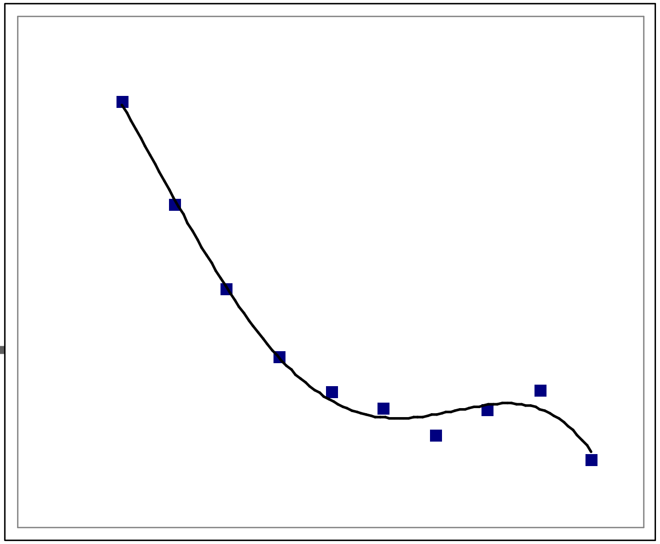


Approssimazione

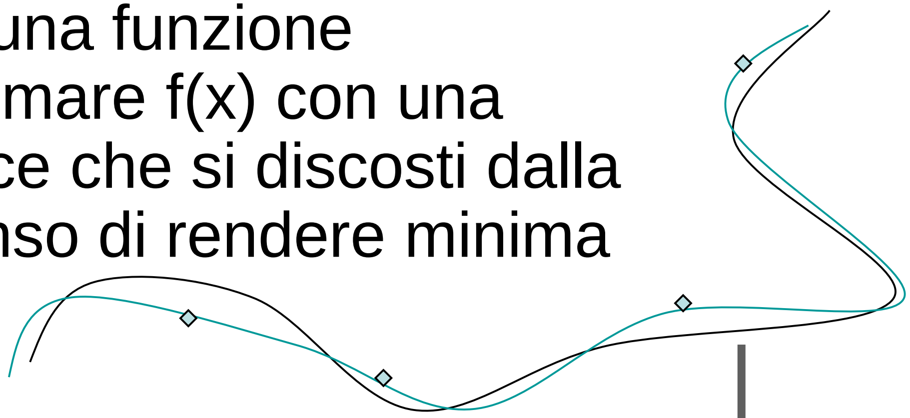
Approssimazione ai minimi quadrati:

- Metodo delle equazioni normali
- Metodo QR-LS
- Metodo SVD-LS

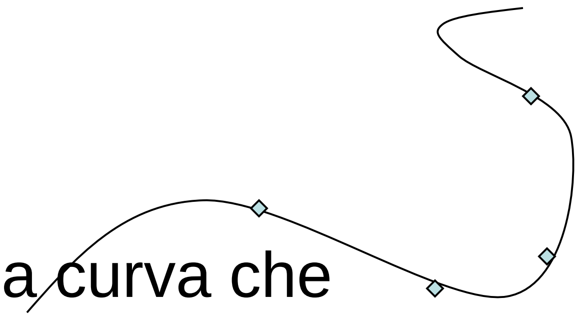
Quando si presenta la necessità di approssimare?

- ***Approssimazione di dati*** La funzione da approssimare f(x) non è nota in forma analitica ma di essa si conoscono i valori y_i su un insieme finito di punti x_i

- ***Approssimazione di funzioni*** La funzione è nota in forma analitica ma è una funzione complicata, si vuole approssimare f(x) con una rappresentazione più semplice che si discosti dalla f(x) il meno possibile (nel senso di rendere minima una distanza opportuna)

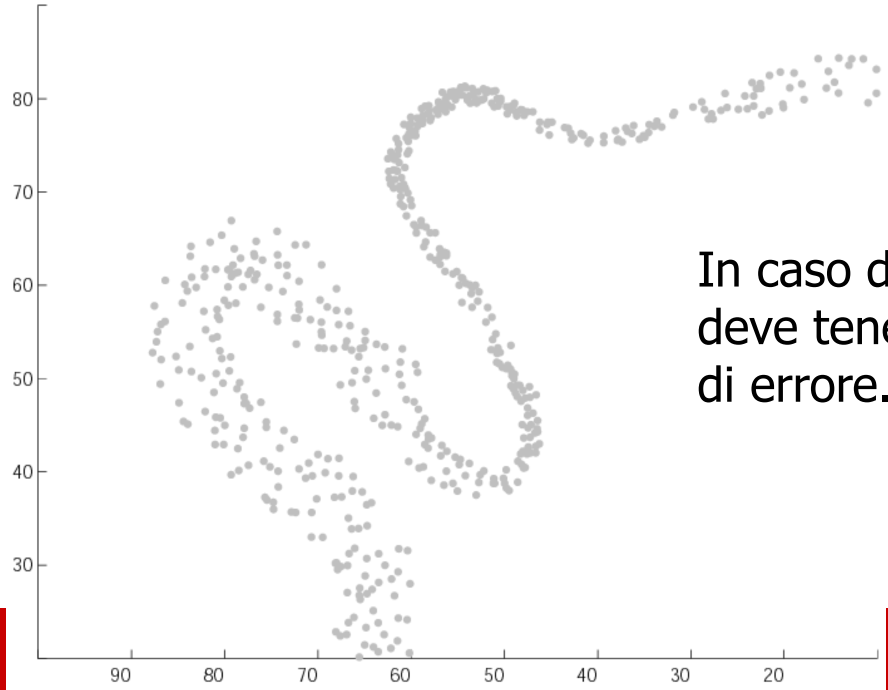


Qual è la differenza tra approssimazione e interpolazione?

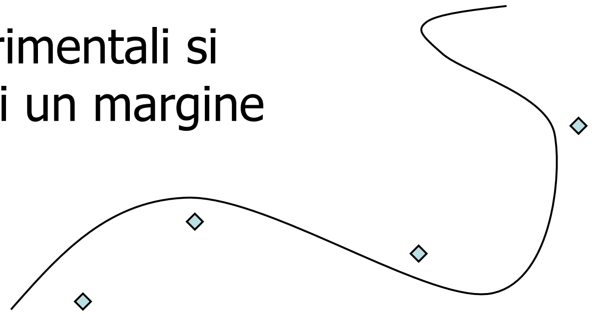


Interpolazione - passa per i punti dati.

Approssimazione – si vuole costruire la curva che approssima i dati minimizzando la **distanza** tra la curva e i dati stessi.



In caso di dati sperimentali si deve tener conto di un margine di errore.



Che tipo di approssimazione?

Scelta della **DISTANZA** con la quale si vuole approssimare i dati (misura dell'errore)

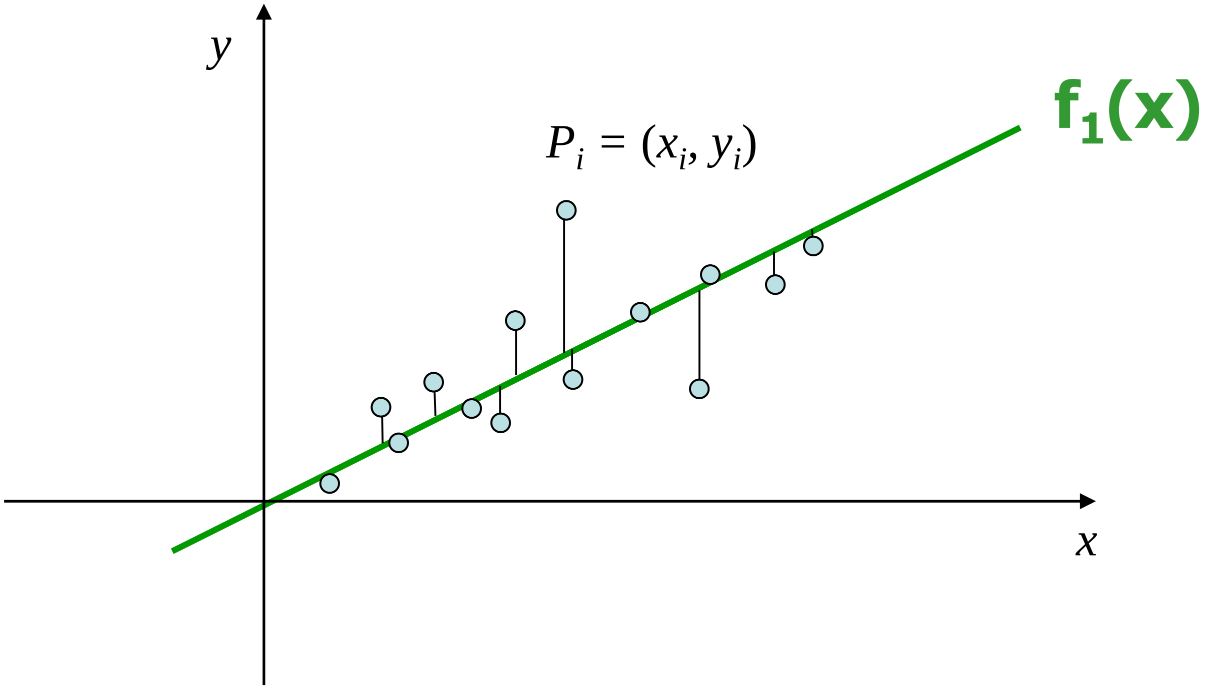
- Pochi dati affidabili $\longrightarrow$ interpolazione
- Insieme discreto di dati (es. dati sperimentali affetti da variabilità statistica)

$\longrightarrow$ approssimazione ai minimi quadrati

$\longrightarrow$ approssimazione uniforme

Approssimazione ai minimi quadrati

Approssimare i punti (x_i,y_i), $i=1,..,m$, con la funzione $f_1(x)$ di grado 1 minimizzando gli spostamenti in y



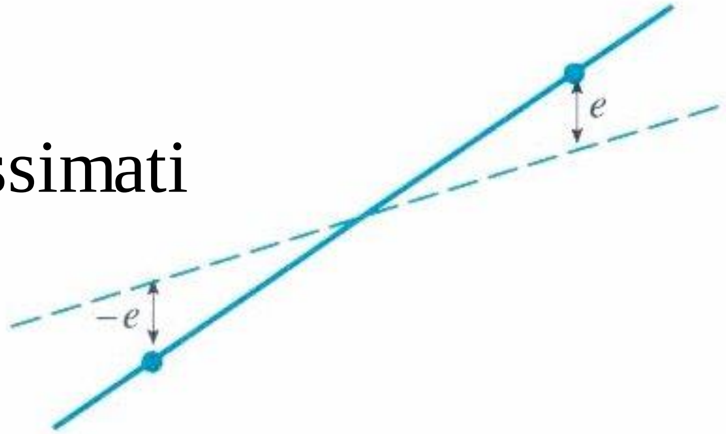
Approssimazione ai minimi quadrati

Minimizzare la differenza (errore) :

$$e_i = f_1(x_i) - y_i$$

$$(x_i, y_i) - punti\ \text{dati}$$

$$(x_i, f(x_i)) - punti\ \text{approssimati}$$



Tuttavia, gli errori possono cancellarsi l'un l'altro.

La soluzione è minimizzare la somma dei quadrati degli errori:

$$S = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots \qquad S = \sum (e_i)^2$$

Distanza (norma)

- Approssimazione ai minimi quadrati

  $f_n(x)$ vuole minimizzare la quantità:

$$\left\| y - f_n \right\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{m} (y_i - f_n(x_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

- Approssimazione uniforme

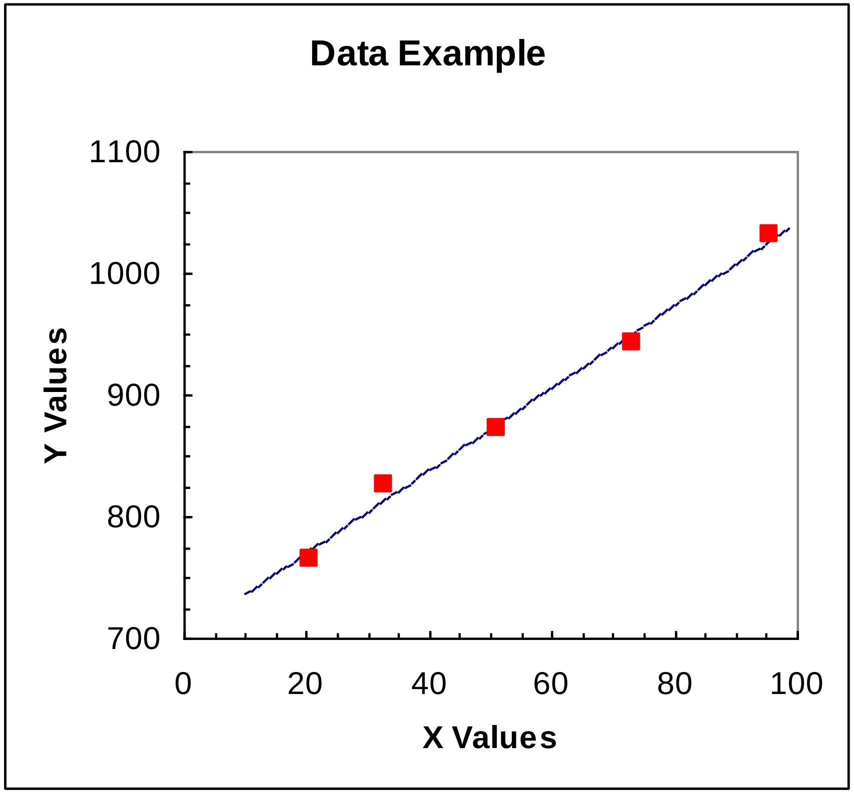
  $f_n(x)$ vuole minimizzare la quantità:

$$\left\| y - f_n \right\|_\infty = \max_{i=1,..,m} \left| y_i - f_n(x_i) \right|$$

Esempio :

Vogliamo approssimare i dati:

X	Y
20.5	765
32.7	826
51	873
73.2	942
95.7	1032



Determinare la retta

$f_1(x)=ax+b$

che meglio approssima questi dati nel senso dei minimi quadrati.

Formulazione del problema dell’approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Approssimazione ai minimi quadrati con un polinomio f(x) di grado n=1

Calcoliamo la somma degli errori:

$$S = \sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - f_1(x_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \left(a x_i + b \right) \right)^2$$

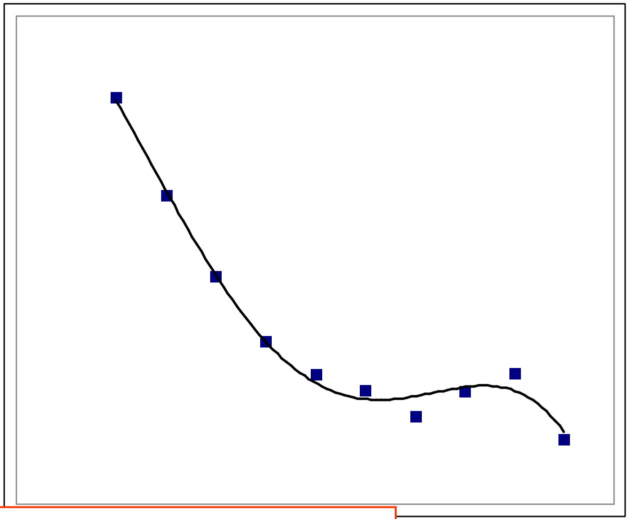
L'approssimazione ai minimi quadrati con un polinomio di grado 1 equivale a minimizzare l'errore S:

$$\min S = \min \left\| y - f_1 \right\|_2^2 = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{m} (y_i - (a x_i + b))^2$$

Approssimazione ai minimi quadrati con un polinomio f(x) di grado n

Assegnati i punti (x_i,y_i), $i=1,..,m$,
e scelte n+1 funzioni base

$$1, x, x^2.., x^n, (n << m)$$



si vuole costruire il polinomio di approssimazione di grado n

$$\boxed{f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n,}$$

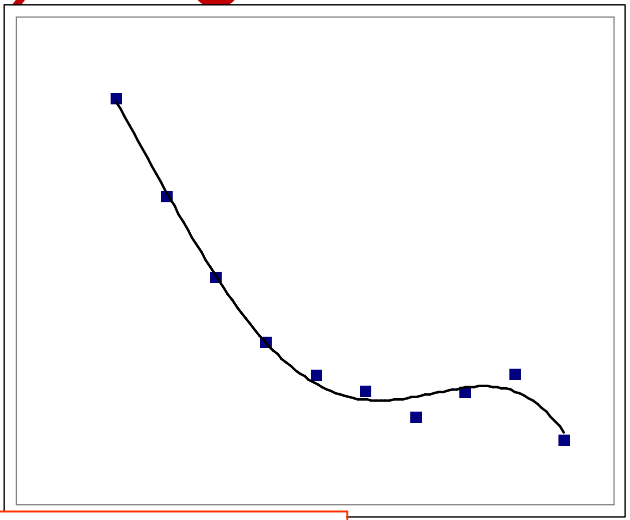
individuato con il criterio dei minimi quadrati, ossia determinare i coefficienti $a_{i,}$ $_{i=0,..,n}$ in modo che lo scarto quadratico medio S sia minimo

$$\min S = \min_{(a_0,a_1,..,a_n)} \left\| y - f_n(x) \right\|_2^2 = \min_{(a_0,a_1,..,a_n)} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f_n(x_i))^2$$

Approssimazione ai minimi quadrati con una funzione f(x) di grado n

Assegnati i punti (x_i,y_i), i=1,..,m,
e scelte n+1 funzioni base

$$\Phi_0, \Phi_1, .., \Phi_n, \ (n << m)$$



si vuole costruire la funzione di approssimazione di grado n

$$\boxed{f_n(x) = a_0\Phi_0 + a_1\Phi_1 + .. + a_n\Phi_n,}$$

individuata con il criterio dei minimi quadrati, ossia determinare i coefficienti $a_{i,\, i=0,..,n}$ in modo che lo scarto quadratico medio S sia minimo

$$\min S = \min_{(a_0, a_1, .., a_n)} \left\| y - f_n(x) \right\|_2^2 = \min_{(a_0, a_1, .., a_n)} \sum_{i=1}^{m} (y_i - f_n(x_i))^2$$

In forma matriciale

$$\mathbf{y} - f_n(\mathbf{x})$$

è il vettore di elementi

$$y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) \qquad i = 1,..,m$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{y - Ha} \qquad \mathbf{H}\big|_{ij} = \phi_j(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \ldots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Vettore **a** : parametri incogniti della funzione approssimante

In forma matriciale

- Si vuole determinare il vettore **a** che renda minima la norma del vettore errore:

$$\min S = \min_{a} \|y - Ha\|_2^2$$

Soluzione di un sistema lineare **Ha = y**

- normale se m=n (si riconduce all' interpolazione)
- sovradeterminato se m>n

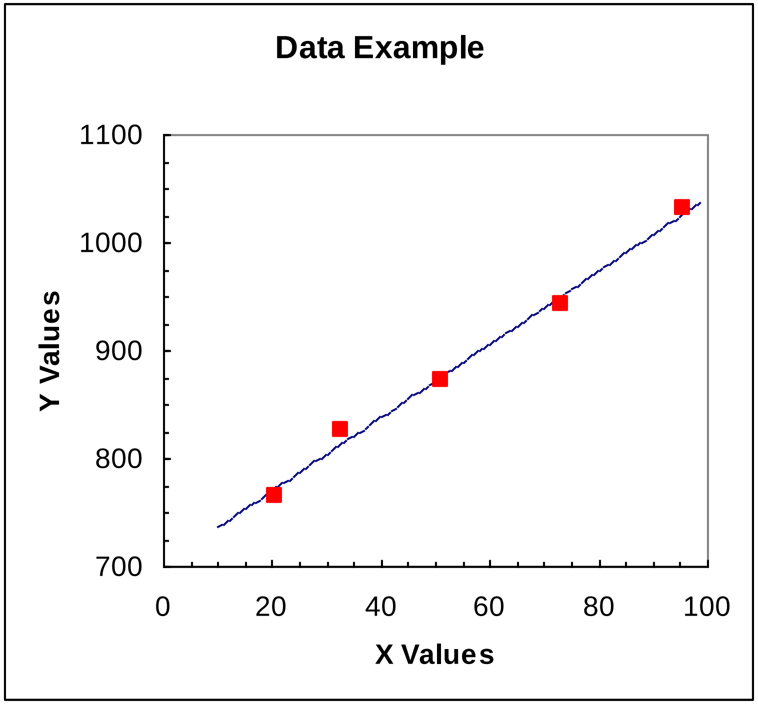
- Più vincoli che variabili-> non esiste in generale una soluzione esatta
- Cerchiamo una soluzione del sistema lineare approssimata (nel senso dei minimi quadrati)

METODO DELLE EQUAZIONI NORMALI

Esempio : lineare (n=1)

Vogliamo approssimare i dati:

X	Y
20.5	765
32.7	826
51	873
73.2	942
95.7	1032



Determina la retta

$$f_1(x)=ax+b$$

che meglio approssima questi dati.

Approssimazione lineare ai minimi quadrati

Come minimizziamo l'errore?

$$S = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \left(y_i - (\mathrm{a}x_\mathrm{i} + \mathrm{b})\right)^2$$

Si può dimostrare che se i nodi x_i sono tutti distinti la funzione *S* è convessa. Quindi vi è un unico punto di minimo che si ottiene imponendo la condizione di stazionarietà.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{da}} = 0 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{db}} = 0 \end{cases}$$

Minimo di una funzione in due variabili (a,b): calcoliamo le derivate parziali di S rispetto ad entrambe le variabili e le poniamo uguali a zero.

Approssimazione lineare ai minimi quadrati

Rispetto alla prima variabile, a

$$\frac{dS}{da} = 0 = \sum_{i=1}^{m} (2)(y_i - ax_i - b)(-x_i)$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{i=1}^{m} a x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} b x_i = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} b x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \qquad [1]}$$

Approssimazione lineare ai minimi quadrati

Rispetto alla seconda variabile, b

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{db}} = 0 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} (2)(y_{\mathrm{i}} - \mathrm{a}x_{\mathrm{i}} - \mathrm{b})(-1)$$

$$-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} y_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{a}x_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{b} = 0$$

$$\boxed{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{a}x_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{b} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} y_{\mathrm{i}} \qquad [2]}$$

Approssimazione lineare ai minimi quadrati

Il sistema lineare diventa

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} b x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i & [1] \\ \sum_{i=1}^{m} a x_i + \sum_{i=1}^{m} b = \sum_{i=1}^{m} y_i & [2] \end{cases}$$

Approssimazione lineare ai minimi quadrati

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{Bmatrix}$$

Posto $S_x = \sum_{i=1}^{m} x_i$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, $S_y = \sum_{i=1}^{m} y_i$, e $S_{xy} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

Approssimazione lineare ai minimi quadrati

Il sistema è detto sistema delle equazioni normali e ha una sola soluzione:

$$a = \frac{\mathrm{m}S_{\mathrm{xy}} - S_{\mathrm{x}}S_{\mathrm{y}}}{\mathrm{m}S_{\mathrm{xx}} - S_{\mathrm{x}}^2}$$

$$b = \frac{S_{\mathrm{xx}}S_{\mathrm{y}} - S_{\mathrm{xy}}S_{\mathrm{x}}}{\mathrm{m}S_{\mathrm{xx}} - S_{\mathrm{x}}^2}$$

il polinomio di *regressione lineare* che si ottiene è $\mathrm{f}_1(x) = ax + b$

Esempio

Assegnati i dati:

X	Y
20.5	765
32.7	826
51	873
73.2	942
95.7	1032

Calcoliamo le quantità richieste S_x,S_y,S_{xy},S_{xx}:

x	x^2	y	xy	m
20,5	420,25	765	15682,5	1
32,7	1069,29	826	27010,2	1
51	2601	873	44523	1
73,2	5358,24	942	68954,4	1
95,7	9158,49	1032	98762,4	1
273,1	18607,27	4438	254932,5	5

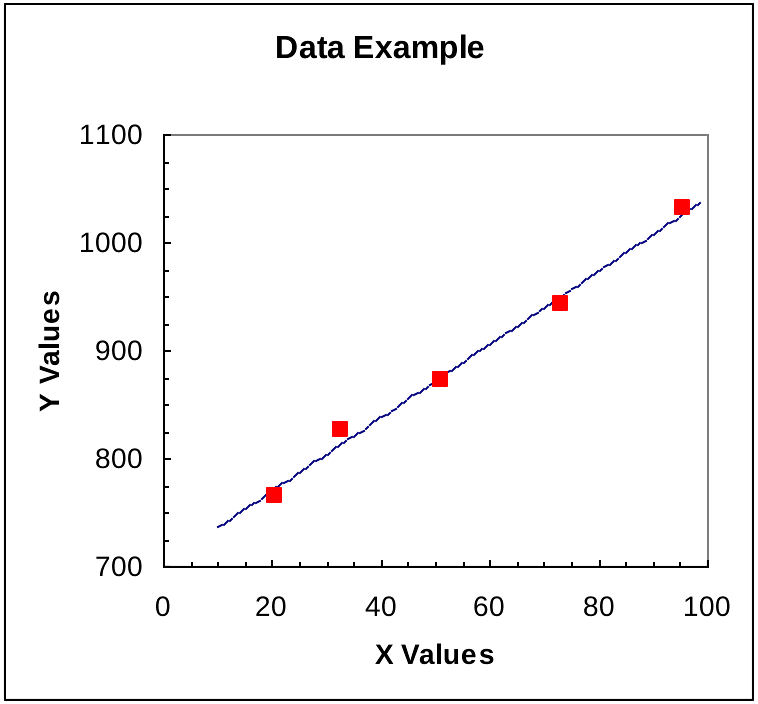
Esempio

$$a = \frac{5(254932.5) - 273.1(4438)}{5(18607.27) - (273.1)^2}$$

$$= 3.395$$

$$b = \frac{18607.27(4438) - 273.1(254932.5)}{5(18607.27) - (273.1)^2}$$

$$= 702.2$$



La retta di regressione che approssima i dati ai minimi quadrati è:

$$y = 3.395x + 702.2$$

Approssimazione ai minimi quadrati: grado n=2

Come minimizzare l'errore per ottenere un polinomio di approssimazione $f_2(x)$ di secondo grado?

$$f_2(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$$

Minimo di una funzione in tre variabili (a,b,c):

calcoliamo le derivate parziali di S rispetto alle variabili e le poniamo uguali a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}S}{\mathbf{da}} = 0 \\ \dfrac{\mathbf{d}S}{\mathbf{db}} = 0 \\ \dfrac{\mathbf{d}S}{\mathbf{dc}} = 0 \end{cases}$$

Approssimazione ai minimi quadrati: grado n=2

Il sistema lineare che ne deriva di ordine n+1 in forma matriciale è:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^4 & \sum_{i=1}^{m} x_i^3 & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^3 & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{Bmatrix}$$

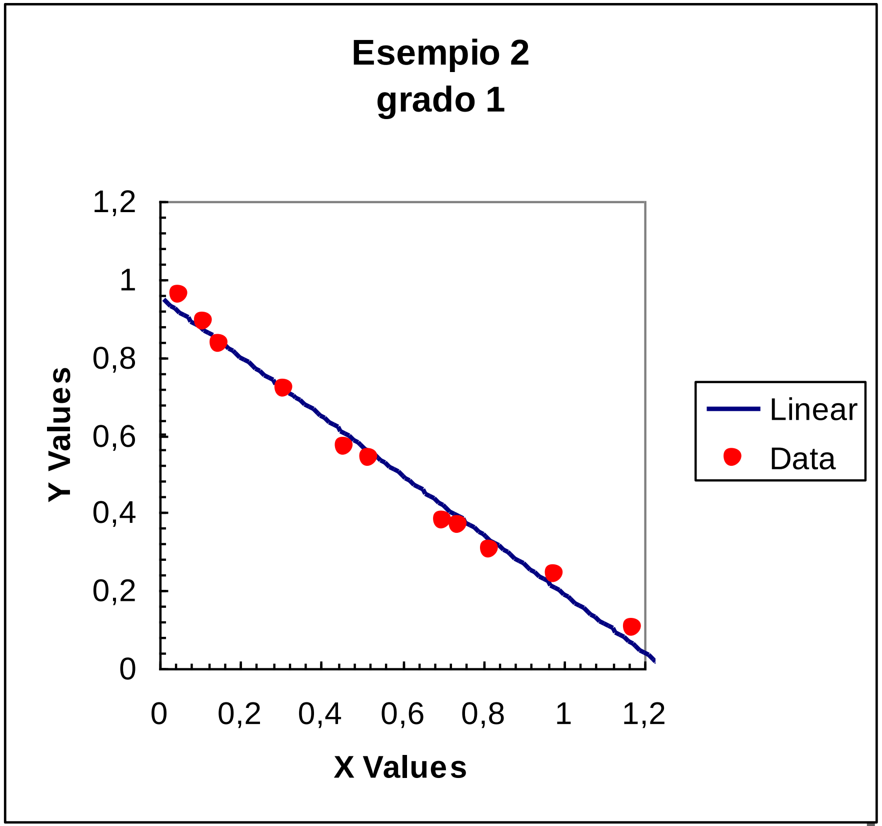
e può essere risolto mediante il metodo di Gauss

Esempio n=1

Assegnati i punti

X Value	Data
0.05	0.956
0.11	0.89
0.15	0.832
0.31	0.717
0.46	0.571
0.52	0.539
0.7	0.378
0.74	0.37
0.82	0.306
0.98	0.242
1.17	0.104

Approssimante lineare:



Esempio n=2

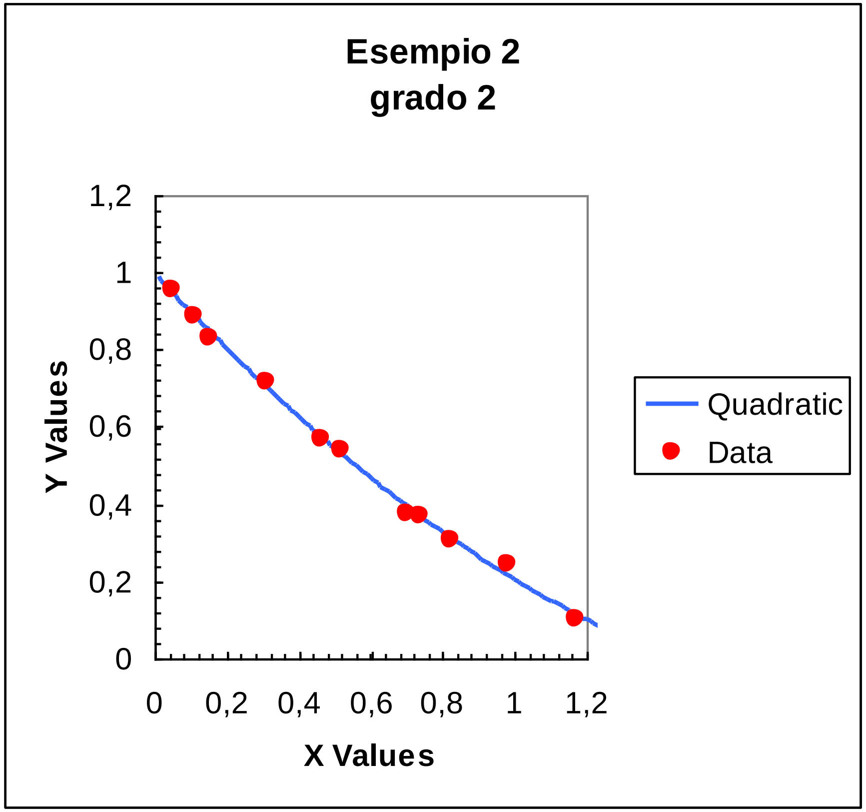
Approssimante quadratico:

$a = 0.225,$

$b = -1.018\ ,$

$c = 0.998$

$$y = 0.225x^2 - 1.018x + 0.998$$



Esempio n=3

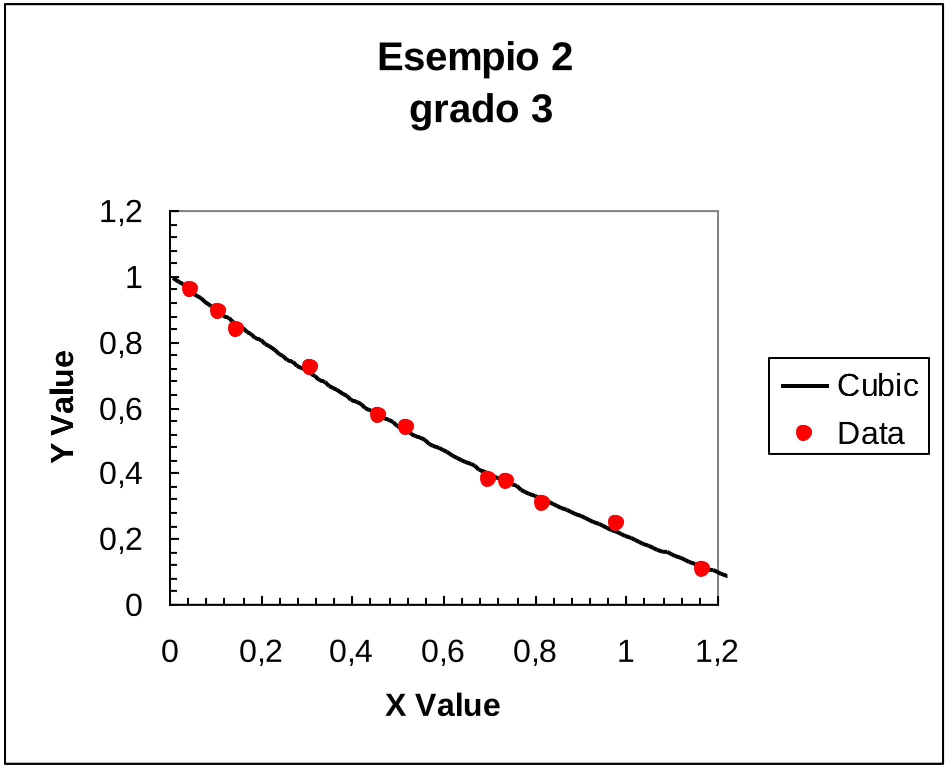
Approssimante cubico:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

di coefficienti:

$a_0 = 1.004 \quad a_1 = -1.079$

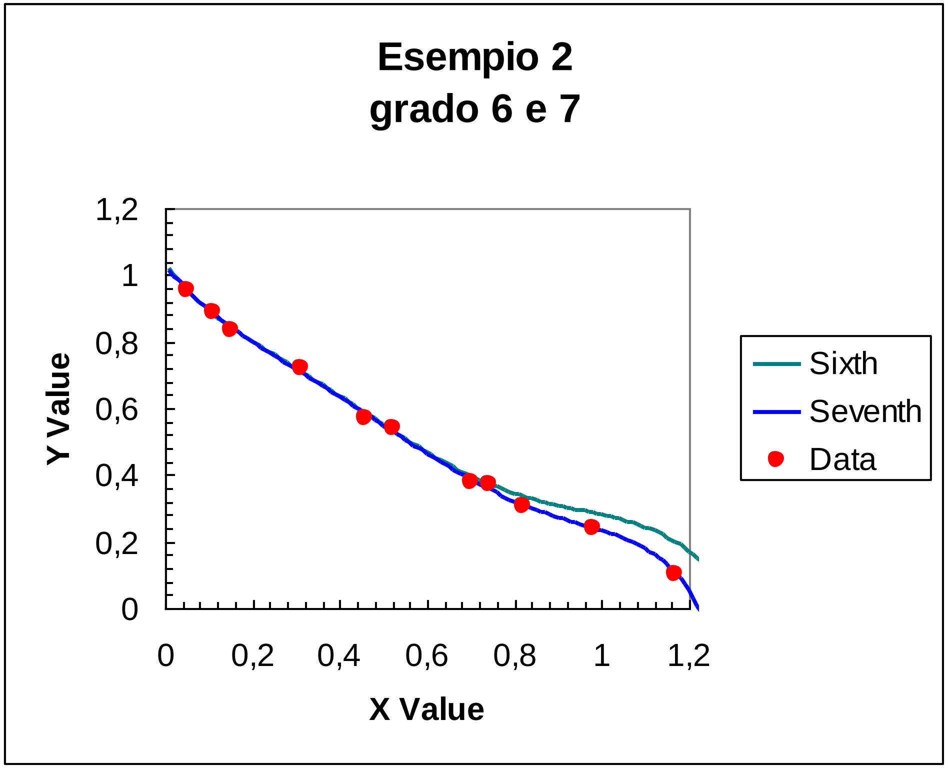
$a_2 = 0.351 \quad a_3 = -0.069$



Esempio n=6,7

Tuttavia, calcolando i polinomi di più alto grado, per esempio grado 6 e 7..

I risultati non sono molto promettenti.



Approssimazione ai minimi quadrati: polinomio di grado n

Il metodo delle equazioni normali determina gli n+1 coefficienti del polinomio di approssimazione di grado n a partire dagli m punti da approssimare (x_i,y_i)

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

risolvendo il sistema lineare di ordine n+1:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^n & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^n y_i \end{Bmatrix}$$

Metodo delle eq. normali: costo

Il costo computazionale del metodo delle equazioni normali per risolvere il problema dell'approssimazione ai minimi quadrati è dato dalla risoluzione di un sistema lineare.

L'approssimazione minimi quadrati con retta (n=1) richiede la risoluzione di un sistema di due equazioni, quella con poly di grado 2 un sistema di tre equazioni…

L'approssimazione di grado n

$$f_n(x) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 x + \ldots + \mathrm{a}_\mathrm{n} x^\mathrm{n}$$

richiede di risolvere un sistema lineare quadrato di dimensione (n+1) x (n+1).

Riscriviamo il sistema delle equazioni normali..

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & .. & 1 \\ x_1 & x_2 & .. & .. & x_m \end{bmatrix}}_{H^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ .. & .. \\ .. & .. \\ 1 & x_m \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & .. & 1 \\ x_1 & x_2 & .. & .. & x_m \end{bmatrix}}_{H^T} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}}_{y}$$

$$\Rightarrow H^T H a = H^T y$$

METODO DELLE EQUAZIONI NORMALI

$$\boxed{\min_a S = \|y - Ha\|_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad H^T Ha = H^T y}$$

Sistema delle equazioni normali

Verifica

$$S(a) \quad = \| y - Ha \|_2^2 = (y - Ha)^T (y - Ha) =$$

$$= y^T y - y^T Ha - a^T H^T y + a^T H^T Ha =$$

$$= y^T y - 2y^T Ha + a^T H^T Ha$$

$$\nabla S(a) = 0 = -2y^T H + 2H^T Ha = 0$$

$$\Rightarrow \quad H^T Ha = H^T y$$

Sistema simmetrico

Metodo delle Equazioni Normali: risolubilità

$$\min_{a \in R^n} S = \|Ha - y\|_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad H^T H a = H^T y$$

- Se la matrice H ha rango massimo, H^TH è non singolare, quindi il problema ha un'<u>unica</u> soluzione.

- $2H^TH$ è la matrice Hessiana. H^TH e' definita positiva se e solo se la matrice H ha rango massimo (quindi l'unica soluzione a è il minimo di S).

Attenzione al MALCONDIZIONAMENTO:

$K(H^TH)=K(H)^2$

Questo comporta che errori di arrotondamento nella risoluzione del sistema possono causare grandi errori nell'approssimante dei dati.

Approssimazione ai minimi quadrati (Least Squares - LS)

TEOREMA

Il problema LS ammette sempre soluzione.

La soluzione è unica se e solo se la matrice H ha rango massimo (le colonne di H sono linearmente indipendenti), se invece le colonne di H sono linearmente dipendenti allora il problema ha infinite soluzioni; tuttavia quella di lunghezza (euclidea) minima è unica.

Minimi Quadrati Pesati

Associamo un peso w_i a ciascun punto:

$$\min_{a_0, a_1, \ldots, a_n} \sum_{i=1}^{N} w_i [y_i - f_n(x_i)]^2, \quad w_i > 0 \text{ e non dipendono da } a_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{a} (Ha - y)^T W (Ha - y), \quad \mathrm{W}_{\mathrm{ii}} = w_i \text{ matrice diag. } \mathrm{m} \times \mathrm{m}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{(H^T W H) a = H^T W y} \quad \text{sistema equazioni normali nxn}$$

Polinomi ortogonali nelle equazioni normali

Si può evitare la risoluzione del sistema delle equazioni normali scegliendo come funzioni base polinomi ortogonali

$$\langle \Phi_k , \Phi_j \rangle = \sum_{i=0}^{m} w_i \Phi_k(x_i) \Phi_j(x_i) = 0 \quad k \neq j$$

con matrice dei pesi W e matrice del sistema $H^T W H a = H^T W y$ diagonale di coefficienti:

$$a_j^* = \frac{\sum_{i=0}^{m} w_i f_i \Phi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{m} w_i \Phi^2_j(x_i)}, \quad j = 0,..,n$$

Metodo QR-LS

Si suppone che H abbia rango massimo.

$$\boxed{\min_a S = \min_a \left\| Ha - y \right\|_2^2}$$

- Il metodo QR-LS è più stabile del metodo delle equazioni normali, si basa sulla fattorizzazione QR di H e si riconduce alla soluzione di un sistema lineare triangolare superiore.
- Fattorizzazione QR della matrice **H=QR**

$$Q \quad ortogonale \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

R_1 triangolare superiore non singolare

Metodo QR-LS

Le trasformazioni ortogonali lasciano inalterata la norma 2 di un vettore $\|Qr\|_2^2 = (Qr)^T(Qr) = r^TQ^TQr = r^TIr = r^Tr = \|r\|_2^2$

$$\|Ha - y\|_2^2 = \|Q^T(Ha - y)\|_2^2 = \|Q^T(QRa - y)\|_2^2$$

$$= \|Ra - Q^Ty\|_2^2 = \quad (\text{posto } \; c := Q^Ty)$$

$$= \|Ra - c\|_2^2,$$

Si partiziona il vettore c:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad Ra - c = \begin{bmatrix} R_1a - c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

Metodo QR-LS

Poichè $$\min_a \|Ha - y\|_2^2 = \min_a \|Ra - c\|_2^2 =$$

$$= \min_a \left\| \begin{pmatrix} R_1 a - c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 =$$

$$= \|c_2\|_2^2 + \min_a \|R_1 a - c_1\|_2^2$$

La quantità || Ha - y || viene quindi minimizzata quando

$$\boxed{R_1 a = c_1}$$

sistema lineare triangolare la cui soluzione è il vettore dei coefficienti **a.** Inoltre il minimo del residuo è

$$\min_a \|Ha - y\|_2^2 = \|c_2\|_2^2$$

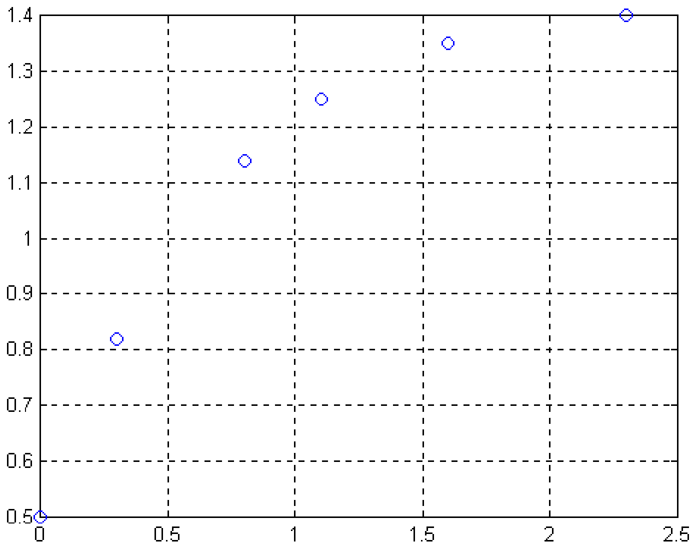
ESEMPIO 1

Siano date le misure di una certa quantità per diversi valori di tempo t:

» t=[0 0.3 0.8 1.1 1.6 2.3]';

» y=[0.5 0.82 1.14 1.25 1.35 1.40]';

» plot(t,y,'o'), grid on



Si vogliono approssimare i dati mediante un polinomio di grado 2 di incognite a_0,a_1,a_2 che minimizzi la somma dei quadrati degli scostamenti dei dati dal modello di approssimazione.

Per risolvere il problema LS si imposta il sistema lineare sovradeterminato Ha=y

ESEMPIO 1

rappresentato dalla matrice coefficienti H:

» H=[ones(size(t),1) t t.^2]

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \\ 1 & t_6 & t_6^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

H =

1.0000	0	0
1.0000	0.3000	0.0900
1.0000	0.8000	0.6400
1.0000	1.1000	1.2100
1.0000	1.6000	2.5600
1.0000	2.3000	5.2900

Il metodo utilizzato da MATLAB per risolvere il sistema sovradeterminato Ha=y è QR-LS cioè via fattorizzazione QR di H (richiamato dall'operatore \).

» a=H\y

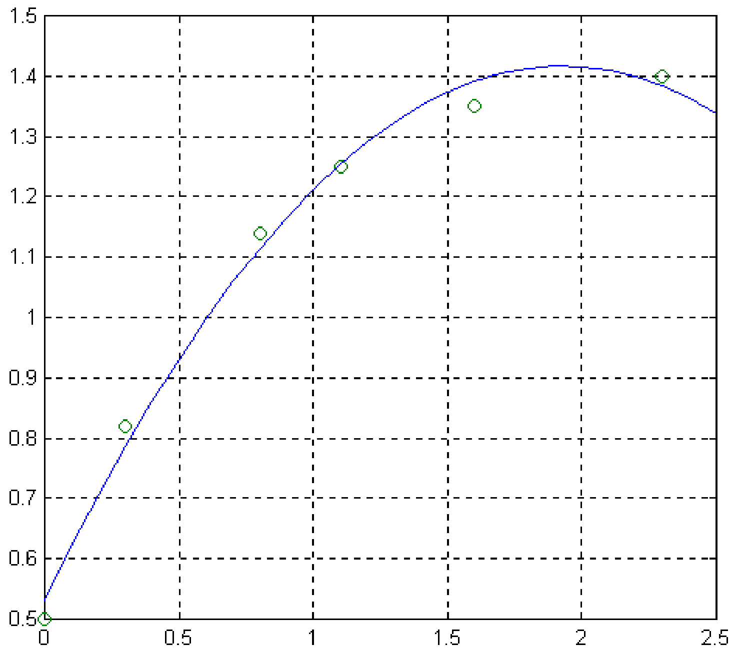
a = [0.5318 0.9191 -0.2387]'

ESEMPIO 1

Il polinomio di grado 2 che approssima i dati è il seguente:

$$y = 0.5318 + 0.9191t - 0.2387t^2$$

Visualizziamo quindi il polinomi discretizzazione dell'intervallo iniziali.




```
» T=(0:0.1:2.5)';
» Y=[ones(size(T),1) T T.^2]*a;
» plot(T,Y,'-',t,y,'o'); grid on
```

ESEMPIO 2

Si vogliono ora approssimare i medesimi dati mediante la funzione esponenziale

$$y = a_0 + a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t}$$

di incognite a_0, a_1, a_2 che minimizzi la somma dei quadrati degli scostamenti dei dati dal modello di approssimazione. Si ottiene il seguente sistema sovradeterminato: Ha=y, rappresentato dalla matrice coefficienti H:

» H=[ones(size(t),1) exp(-t) t.*exp(-t)];

La soluzione si determina mediante l'operatore MATLAB backslash: \   (che richiama in questo caso QR-LS)

» a=H\y

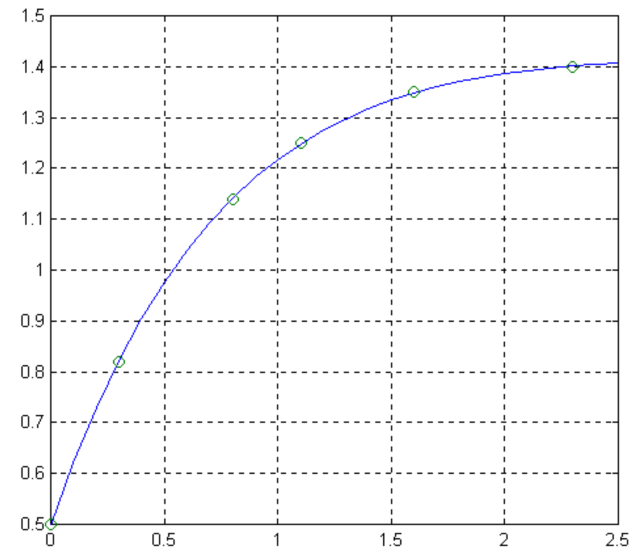
a =[1.3974   -0.8988   0.4097]

La funzione approssimante i dati iniziali è il seguente:

$$y = 1.3974 - 0.8988e^{-t} + 0.4097te^{-t}$$

Visualizziamo quindi la funzione approssimante per una discretizzazione dell'intervallo di definizione dei dati iniziali.

```
» T=(0:0.1:2.5)';
» Y=[ones(size(T)) exp(-T) T.*exp(-T)]*a
» plot(T,Y,'-',t,y,'o');grid on
```



Metodo QR-LS

- Si utilizza solo H e non H^TH (peggio condizionata di H)
- La fattorizzazione QR è stabile

- Richiede che la matrice H sia di rango massimo. Ma se è *mediamente* mal condizionata QR-LS produce comunque una soluzione affidabile

Metodo della decomposizione in valori singolari per il problema LS (SVD-LS)

TEOREMA

Sia $H \in C^{mxn}$ di rango k, con $m \geq n \geq k$

e sia $H = U\Sigma V^T$ la decomposizione di H.

Allora la soluzione di minima norma del problema dei minimi quadrati e' data da

$$a^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^H y}{\sigma_i} v_i$$

ed il valore di minimo residuo è:

$$\gamma^2 = \sum_{i=k+1}^{n} \left| u_i^H y \right|^2$$

METODO SVD-LS

Dimostrazione

$$\left\|Ha-y\right\|_2^2=\left\|U^H(Ha-y)\right\|_2^2$$

Poichè U è ortogonale

$$=\left\|U^H HVV^H a-U^H y\right\|_2^2$$

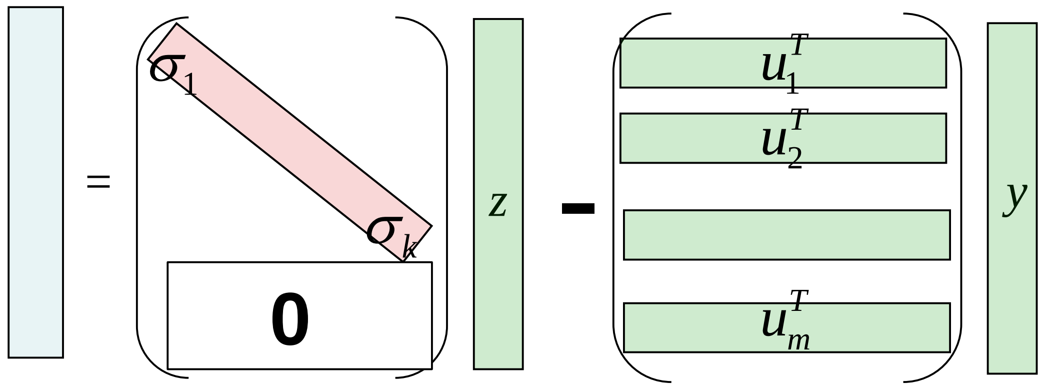
Posto $z=V^H a$:

$$\left\|Ha-y\right\|_2^2=\left\|\Sigma z-U^H y\right\|_2^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\sigma_i z_i-u_i^H y_i\right|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left|\sigma_i z_i-u_i^H y_i\right|^2+\sum_{i=k+1}^{n}\left|u_i^H y_i\right|^2$$

Quali sono gli elementi del vettore $\Sigma z - U^H y$



$$\left\| \Sigma z - U^H y \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sigma_i z_i - < u_i^H , y > \right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left| \sigma_i z_i - < u_i^H , y > \right|^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \left| < u_i^H , y > \right|^2$$

METODO SVD-LS

Il minimo si ha per

$$z_i = \begin{cases} \dfrac{u_i{}^H y}{\sigma_i}, & i = 1,..,k \\ qualunque & i = k+1,..,n \end{cases}$$

Se k<n la soluzione non e’ unica, quella di minima norma e’ data da

$$z_i = \begin{cases} \dfrac{u_i{}^H y}{\sigma_i}, & i = 1,..,k \\ 0 & i = k+1,..,n \end{cases}$$

Metodo SVD-LS

Poiche' a=Vz, e

$$\left\| a^* \right\| = \left\| y^* \right\|$$

la soluzione di minima norma del problema dei minimi quadrati è data da

$$a^* = Vz^* = \sum_{i=1}^{k} z_i^* v_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^H y}{\sigma_i} v_i$$

e il valore del residuo al minimo sarà

$$\gamma^2 = \left\| Ha - y \right\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^{n} \left| u_i^H y \right|^2$$

#

Metodo SVD-LS

```
function a=svdLS(H,y,tol)
[m,n]=size(H);
if m<n     disp('errore: num col > num righe');return
end
z=zeros(n,1);
a=zeros(n,1);
% Decomposizione SVD; estrazione dei valori singolari
[U,S,V]=svd(H);
sigma=diag(S,0)
d=U'*y;
i=sigma>tol;
z(i)=d(i)./sigma(i); % solo per valori singolari >tol
disp('condizionamento del problema')
cond=sigma(1)/sigma(n)
a=V*z;
```

Metodo SVD-LS

Numero di Condizionamento di A è

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\sigma_1^{\,2}} \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_n^{\,2}}} \qquad cond(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Valori singolari piccoli sono indice di malcondizionamento del problema.

Tipicamente si usa una tolleranza sotto la quale si considera il valore singolare numericamente nullo.

Sia TOLL tale tolleranza, allora la soluzione al problema LS diviene:

$$z_i = \begin{cases} \dfrac{u_i^{\,H} y}{\sigma_i}, & se \quad \sigma_i > TOLL \\ 0 & se \quad \sigma_i \le TOLL \end{cases}$$