Derivazione Numerica

PROBLEMA

Stima delle derivate (pendenza, curvatura, ecc.) di una funzione noti i valori della funzione in un insieme discreto di punti

$\rightarrow$Schemi alle Differenze Finite

IL PRESENTE MATERIALE È RISERVATO AL PERSONALE DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA E NON PUÒ ESSERE UTILIZZATO AI TERMINI DI LEGGE DA ALTRE PERSONE O PER FINI NON ISTITUZIONALI

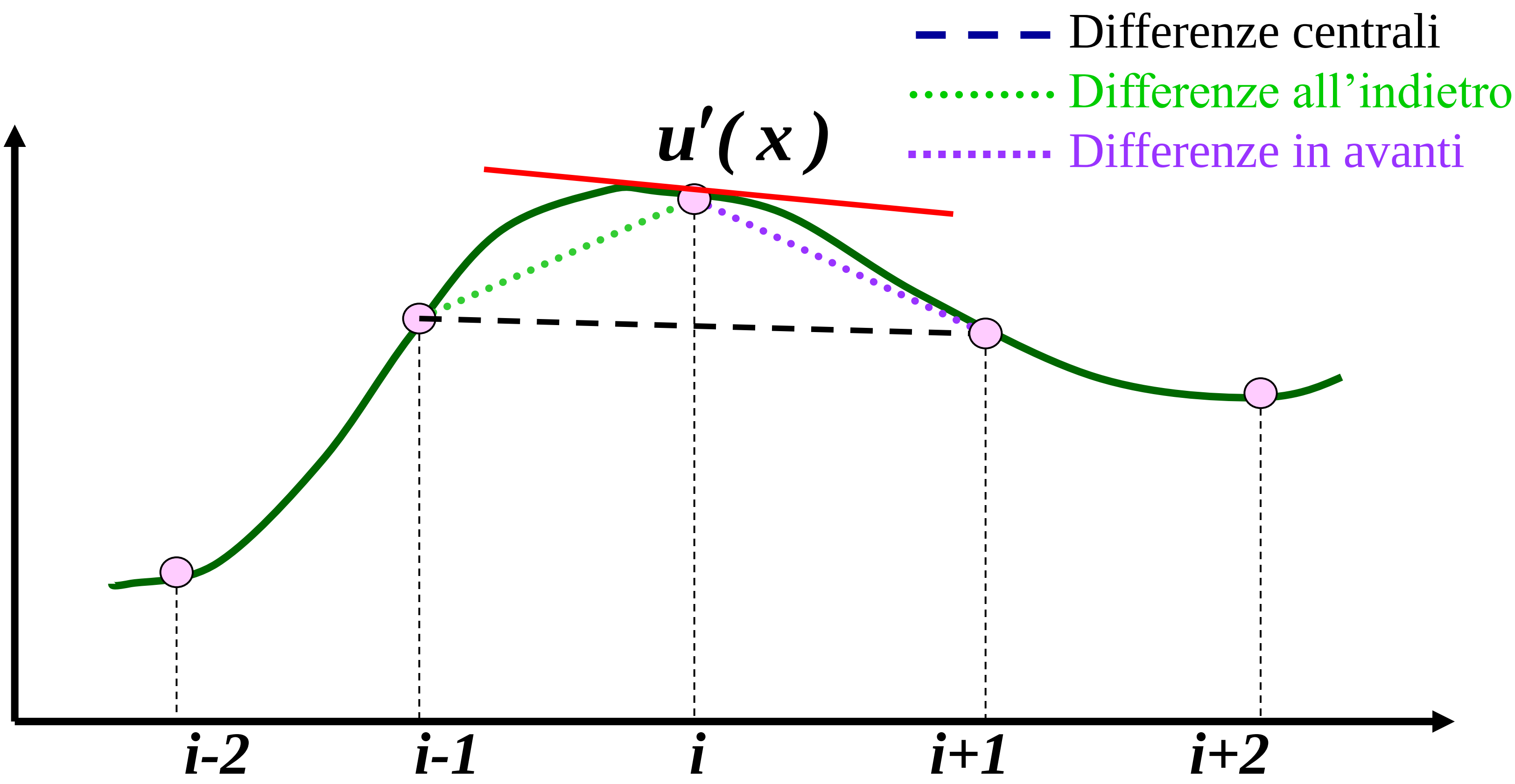
Derivazione Numerica

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$u'(x) \approx \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Per la funzione u(x)=ax+b la formula e' esatta.

Derivata prima in un punto: schemi alle differenze finite



Derivata prima

Differenze centrali

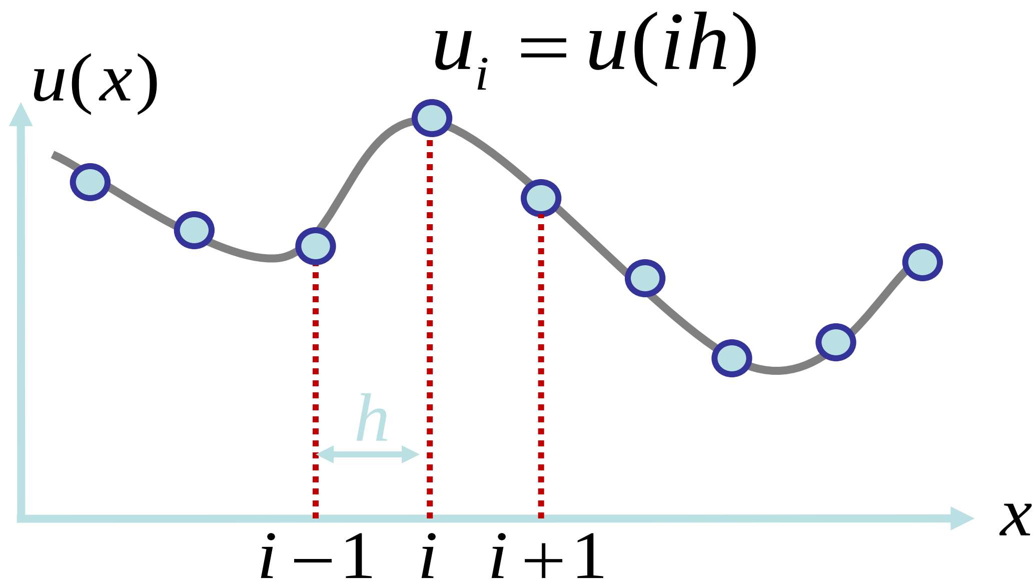
$$D_x u \equiv \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Differenze in avanti

$$D_x^+ u \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Differenze all'indietro

$$D_x^- u \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$



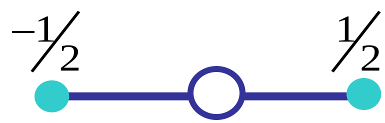
Errore locale di troncamento

Espansione di Taylor in *x=ih*

$$u_{i+1} = u(ih+h) = u(ih) + hu'(ih) + \tfrac{1}{2!}h^2u''(ih) + O(h^3)$$

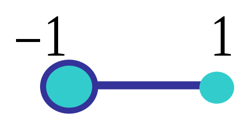
$$u_{i-1} = u(ih-h) = u(ih) - hu'(ih) + \tfrac{1}{2!}h^2u''(ih) + O(h^3)$$

$$D_x u_i = u'(ih) + O(h^2)$$

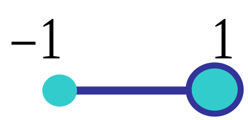


Stencils

$$D_x^+ u_i = u'(ih) + O(h)$$



$$D_x^- u_i = u'(ih) + O(h)$$



Errore locale di troncamento

$$D_x u_i = u'(ih) + O(h^2)$$

infatti

$$u_{i+1} = u(ih+h) = u(ih) + hu'(ih) + \tfrac{1}{2!}h^2u''(ih) + \tfrac{1}{3!}h^3u'''(ih) + O(h^4)$$

$$u_{i-1} = u(ih-h) = u(ih) - hu'(ih) + \tfrac{1}{2!}h^2u''(ih) - \tfrac{1}{3!}h^3u'''(ih) + O(h^4)$$

Sottraendo le due eqn:

$$u(ih+h) - u(ih-h) = 2hu'(ih) + 2\frac{h^3}{3!}u'''(ih) + O(h^4)$$

$$\boxed{u'(ih) = \left(\frac{u(ih+h) - u(ih-h)}{2h}\right) + \frac{1}{3!}h^2u'''(ih) + O(h^3)}$$

Più grande è la potenza di h migliore è l'accuratezza.

Consistenza

Per $h \to 0$ l’errore locale di troncamento tende a zero

L'errore diminuisce più velocemente quanto più è grande la potenza di h.

Ordine di consistenza $O(h^p)$

Le formule alle differenze centrali (di ordine $O(h^2)$) sono più precise di quelle in avanti o all'indietro (di ordine $O(h)$) nel senso che l'errore di troncamento decresce più velocemente.

Potremmo ulteriormente migliorare usando più termini dello sviluppo di Taylor per costruire la derivata prima.

Derivata seconda

Differenza centrale seconda

$$\boxed{D_{xx}u \equiv \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}}$$

$$D_{xx}u_i = u''(ih) + O(h^2)$$

infatti

$$u_{i+1} = u(ih+h) = u(ih) + hu'(ih) + \tfrac{1}{2!}h^2u''(ih) + \tfrac{1}{3!}h^3u'''(ih) + O(h^4)$$

$$u_{i-1} = u(ih-h) = u(ih) - hu'(ih) + \tfrac{1}{2!}h^2u''(ih) - \tfrac{1}{3!}h^3u'''(ih) + O(h^4)$$

Sommando le due eqn:

$$u(ih+h) + u(ih-h) = 2u(ih) + 2\left(\frac{h^2}{2!}u''(ih)\right) + 2\frac{h^4}{4!}u^{iv}(ih) + \ldots$$

$$u''(ih) = \left(\frac{u(ih+h) - 2u(ih) + u(ih-h)}{h^2}\right) - \frac{1}{12}h^2u^{(iv)}(ih) + \ldots$$

Differenze finite di ordine k>1

Definiamo gli operatori lineari

$$\Delta^1 u(x) = u(ih+h) - u(ih)$$ *operatore differenze finite in avanti*

$$\nabla^1 u(x) = u(ih) - u(ih-h)$$ *operatore differenze finite all'indietro*

$$\delta^1 u(x) = u(ih+\frac{h}{2}) - u(ih-\frac{h}{2})$$ *operatore differenze finite centrali*

$$\Delta^1 u_i = u_{i+1} - u_i \qquad \nabla^1 u_i = u_i - u_{i-1} \qquad \delta^1 u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}$$

Differenze finite di ordine k>1

Definiamo gli operatori lineari differenze finite di $u(x)$ di ordine k in $x_i = ih$

$$\Delta^k u_i = \Delta(\Delta^{k-1} u_i) = \Delta^{k-1} u_{i+1} - \Delta^{k-1} u_i$$

$$\nabla^k u_i = \nabla(\nabla^{k-1} u_i) = \nabla^{k-1} u_i - \nabla^{k-1} u_{i-1}$$

$$\delta^k u_i = \delta(\delta^{k-1} u_i) = \delta^{k-1} u_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} u_{i-\frac{1}{2}}$$

Calcolo differenze finite centrali di ordine 2

$$D_{xx} u_i = D^+ D^- u_i$$

$$= D^- D^+ u_i$$

$$= D_{1/2} D_{1/2} u_i$$

Differenze finite di ordine k>1

TEOREMA

$$\textit{Sia } u(x) \in C^k\left[x_0, x_n\right], h > 0,\ x_i = x_0 + ih,$$

$$\textit{allora } \exists \eta \in \left[x_i, x_i + \Delta x\right]$$

$$u^k(\eta) = \frac{\Delta^k u_i}{h^k}$$

Verificare

$$\delta^4 u_i = u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}$$

$$\Rightarrow u^{iv}(x_i) \approx \frac{u(x_{i+2}) - 4u(x_{i+1}) + 6u(x_i) - 4u(x_{i-1}) + u(x_{i-2})}{(\Delta x)^4}$$

Problemi numerici

- Errore di troncamento:

errore dovuto al troncamento della serie di Taylor

- Errore di arrotondamento:

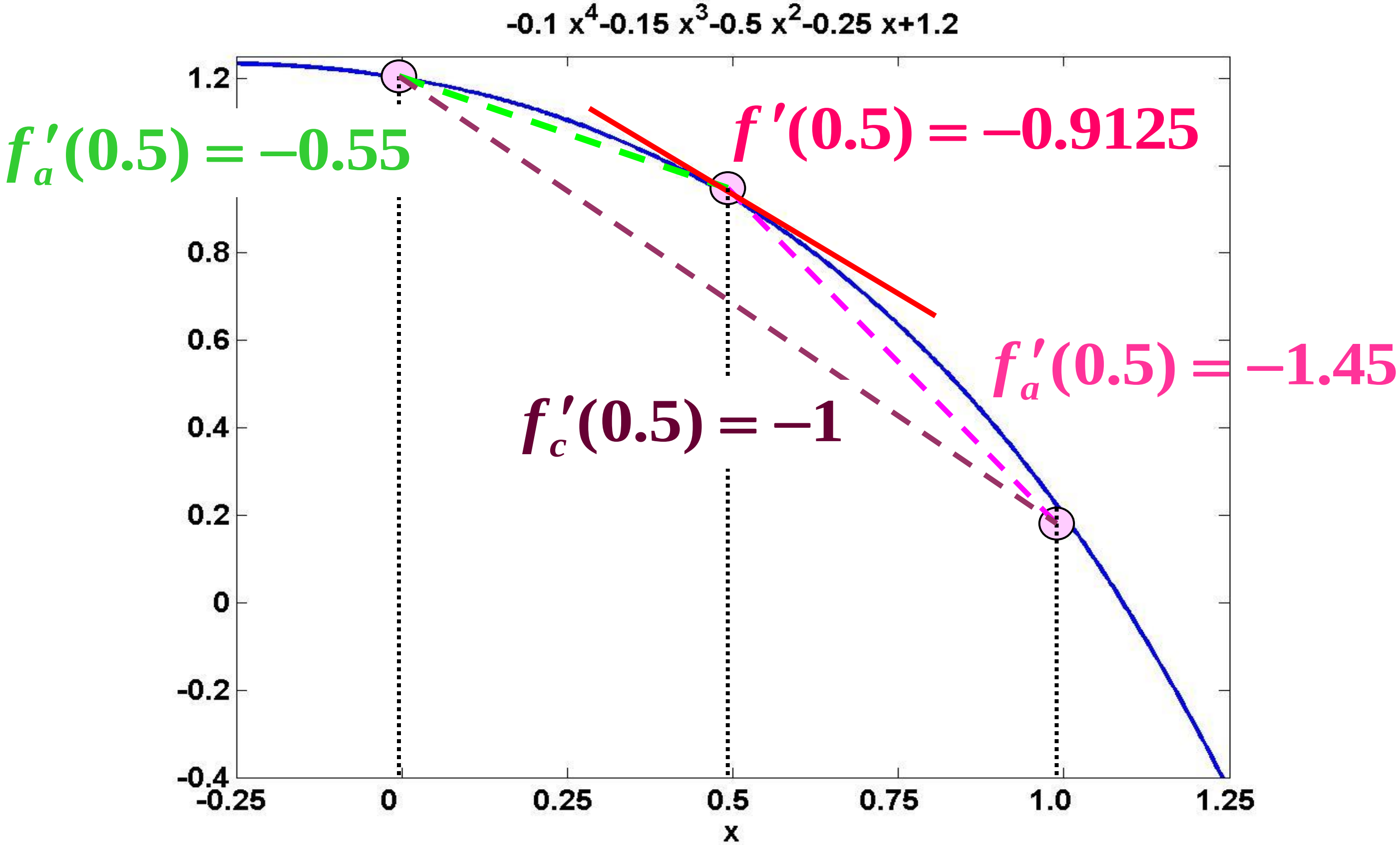
errore di approssimazione in aritmetica finita

Nella valutazione numerica in aritmetica finita un valore arbitrariamente piccolo di h non comporta una riduzione dell'errore totale.

Esempio

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

Stimare la derivata prima con differenze in avanti all'indietro e centrali nel punto x = 0.5 (con h = 0.5 e 0.25)



h=0.5

Esempio, h=0.5

Differenze in Avanti

$$h = 0.5,\ \ f'(0.5) = \frac{f(1) - f(0.5)}{1 - 0.5} = \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$$

$$\text{errore relativo}\ \ \frac{-1.45 + 0.91250}{-0.91250} = 0.58904$$

Differenze all'Indietro

$$h = 0.5,\ \ f'(0.5) = \frac{f(0.5) - f(0)}{1 - 0.5} = \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55$$

$$\text{errore relativo}\ \ \frac{-0.55 + 0.91250}{-0.91250} = -0.39726$$

Differenze Centrali

$$h = 0.5,\ \ f'(0.5) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0.2 - 1.2}{1} = -1.0$$

$$\text{errore relativo}\ \ \frac{-1 + 0.91250}{-0.91250} = 0.09589$$

Esempio, h=0.25

Differenze in Avanti

$$f_a'(0.5) = \frac{f(0.75) - f(0.5)}{0.75 - 0.5} = \frac{0.63632813 - 0.925}{0.25} = -1.1547,$$

$$\text{errore relativo} \quad \frac{-1.1547 + 0.91250}{-0.91250} = 0.26541$$

Differenze all'Indietro

$$f_i'(0.5) = \frac{f(0.5) - f(0.25)}{0.75 - 0.5} = \frac{0.925 - 1.10351563}{0.25} = -0.71406$$

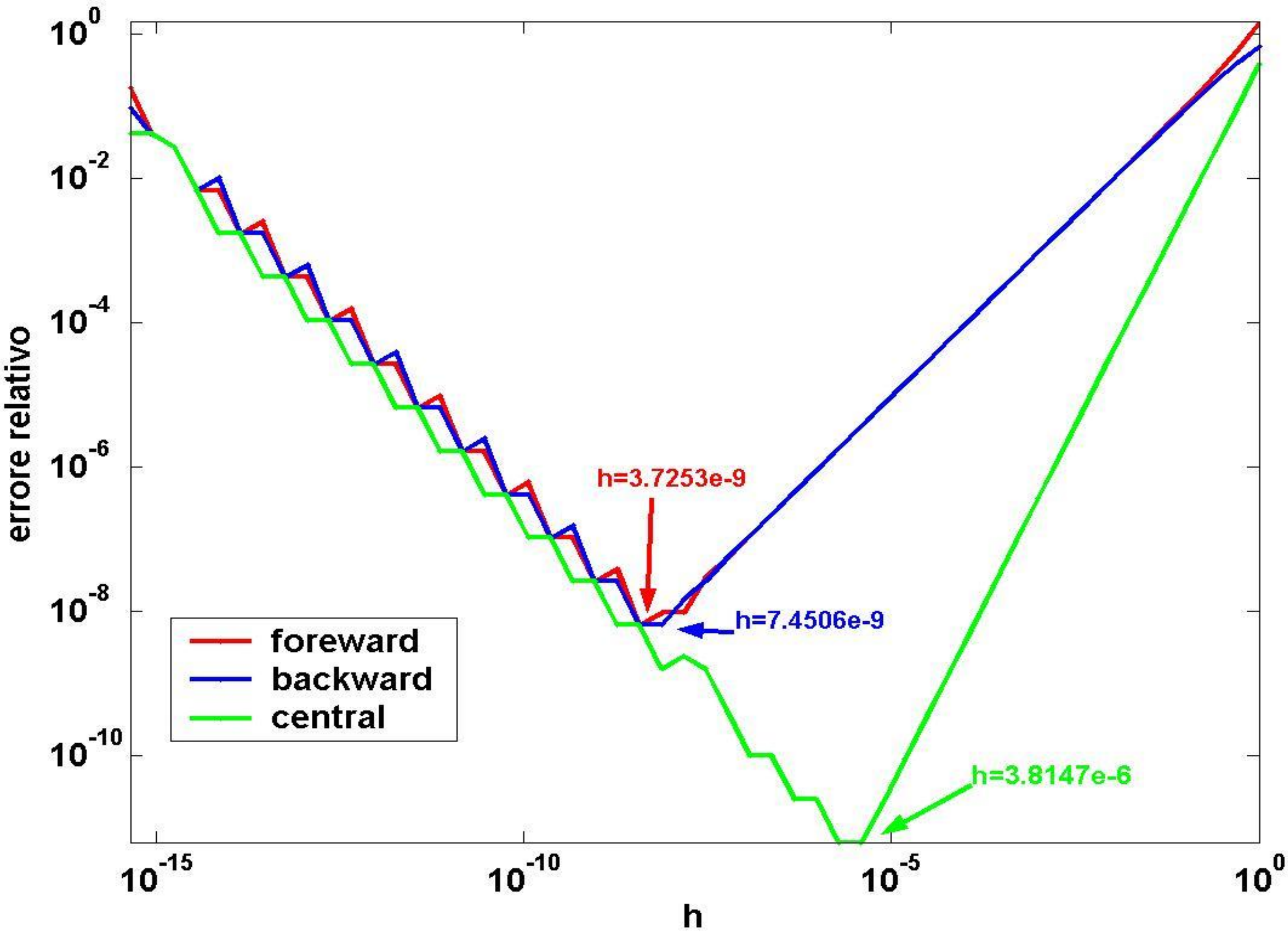
$$\text{errore relativo} \quad \frac{-0.71406 + 0.91250}{-0.91250} = -0.21747$$

Differenze Centrali

$$f_c'(0.5) = \frac{f(0.75) - f(0.25)}{0.75 - 0.25} = \frac{0.63632813 - 1.10351563}{0.5} = -0.93438$$

$$\text{errore relativo} \quad \frac{-0.93438 + 0.91250}{-0.91250} = 0.023973$$

Andamento dell'errore relativo in funzione di h



Osservazioni

- Gli errori di arrotondamento provocano un deterioramento dell' approssimazione per piccoli valori di h.
- Il valore di h che consente una valutazione corretta delle formule alle differenze dipende dalla precisione di macchina.
- Se i termini $f(x_i \pm h)$ sono calcolati in modo impreciso allora gli errori sono moltiplicati per un fattore 1/h che cresce molto per piccoli valori di h.

$$\tilde{f}(x_i+h) = f(x_i+h) + \delta \Rightarrow \hat{f}_a'(x_i) = \frac{\tilde{f}(x_i+h) - f(x_i)}{h} =$$

valore calcolato

$$= \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} + \frac{\delta}{h} = f_a'(x_i) + \frac{\delta}{h}$$

errore di approssimazione

Derivazione mediante interpolazione polinomiale

Usare il polinomio interpolante di Langrange per alcuni punti. E quindi derivare tale polinomio. Specialmente adatta per nodi non equispaziati.

Esempio di polinomio interpolante per 3 punti non equispaziati:

$$L(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

$$= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}y_3$$

Differenziando il polinomio di Lagrange

$$f'(x) \cong L(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} y_3$$

Supponendo una spaziatura costante

$$f'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{2\Delta x^2} y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} y_3$$

Derivata del polinomio di Lagrange:

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{2\Delta x^2} y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} y_3}$$

Valuta la derivata in vari punti:

$$f'(x_1) = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{2\Delta x^2} y_1 + \frac{2x_1 - x_1 - x_3}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{2x_1 - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} y_3 = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2\Delta x}$$

$$f'(x_2) = \frac{2x_2 - x_2 - x_3}{2\Delta x^2} y_1 + \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{2x_2 - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} y_3 = \frac{y_3 - y_1}{2\Delta x}$$

Si ottiene la Formula alle differenze centrali

$$f'(x_3) = \frac{2x_3 - x_2 - x_3}{2\Delta x^2} y_1 + \frac{2x_3 - x_1 - x_3}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} y_3 = \frac{y_1 - 4y_2 + 3y_3}{2\Delta x}$$

Per calcolare derivate con ordine superiore dal polinomio interpolante di Lagrange su tre punti

$$f'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{2\Delta x^2} y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} y_3$$

Derivando

$$f''(x) = \frac{1}{\Delta x^2} y_1 + \frac{2}{-\Delta x^2} y_2 + \frac{1}{\Delta x^2} y_3 = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\Delta x^2}$$

Per ottenere derivate di ordine *n* occorre predisporre un polinomio di interpolazione di grado maggiore od uguale ad *n*.

Errore di troncamento

$$f(x) = p(x) + \frac{\Pi_k(x)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) \quad ; \Pi_k(x) = \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)$$

$$f'(x) = p'(x) + \frac{\Pi'_k(x)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) + \frac{\Pi_k(x)}{(k+1)!} \frac{d}{dx} f^{(k+1)}(\xi)$$

$$se \quad x = x_i \quad è \quad uno \quad dei \quad nodi\ \Pi_k(x_i) = 0 :$$

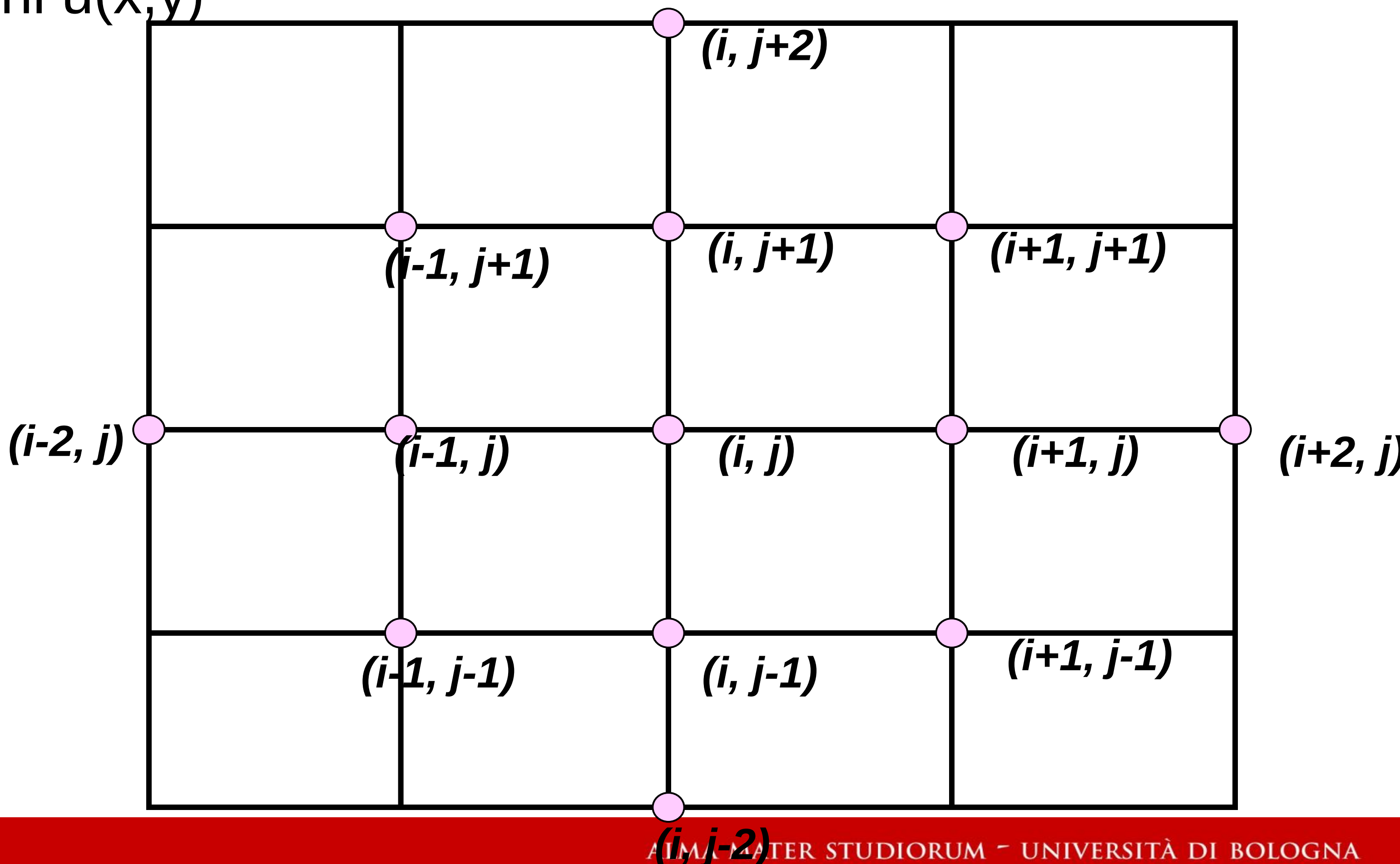
$$f'(x) = p'(x) + \frac{\Pi'_k(x_i)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

Errore di troncamento

Derivate Parziali

Estensione del caso unidimensionale:

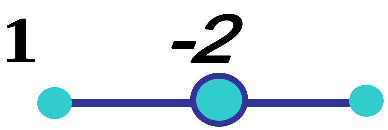
Schema alle differenze finite per approssimare derivate parziali di funzioni u(x,y)

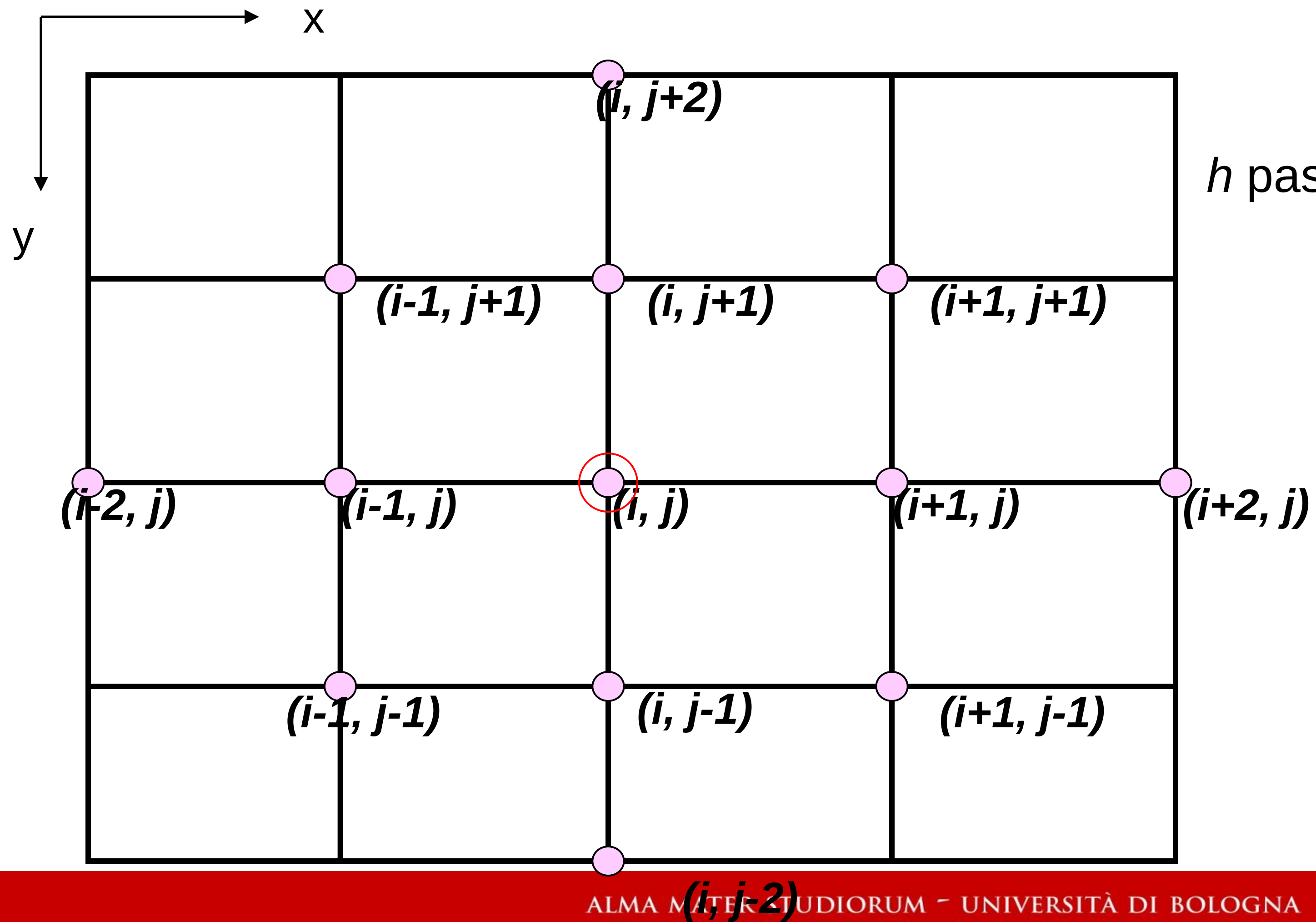


$$u_x = \frac{1}{2h}\left(-u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)\right)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2}\left(u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{D_{xx}u \equiv \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}}$$

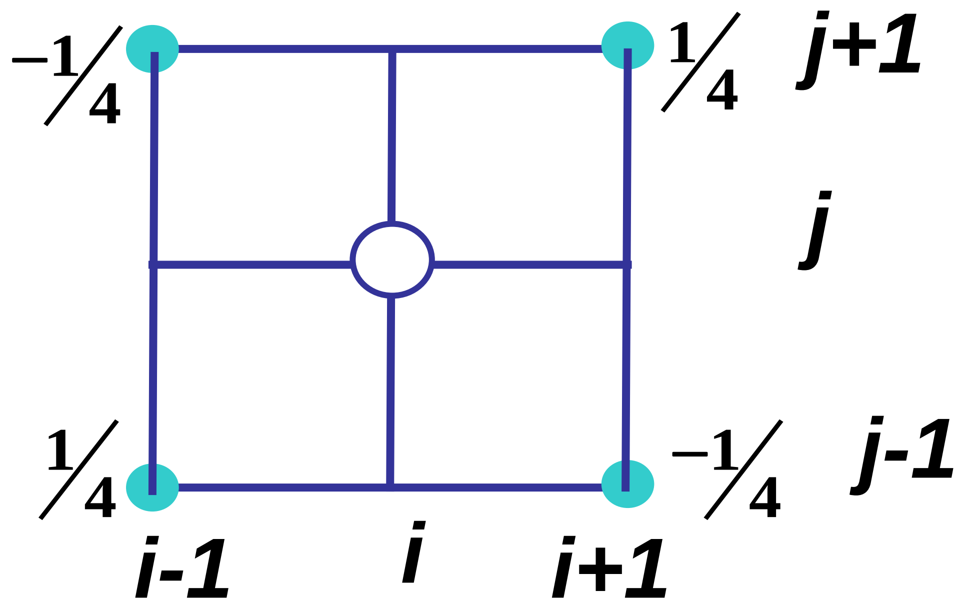




h passo mesh

$$u_x = \frac{1}{2h}\left(u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1,} y_j)\right)$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{1}{4kh}\left(u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1,} y_{j+1}) + u(x_{i-1}, y_{j-1})\right)$$



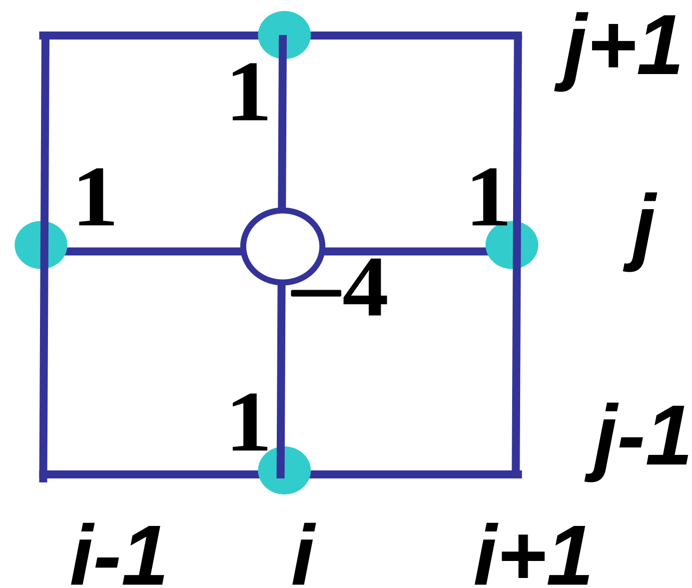
$$\boxed{D_{xy}u \equiv \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2}}$$

Operatore Laplaciano

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} =$$

$$\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

$$\approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} - 4\frac{u_{ij}}{h^2}$$



errore di troncamento locale $O(h^2)$

Operatore Biarmonico

$$\nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \approx$$

$$\frac{1}{4h^4}\begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\} & \begin{array}{c} j+2 \\ j+1 \\ j \\ j-1 \\ j-2 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 \end{array} & \end{array}$$

Operatore Divergenza (1)

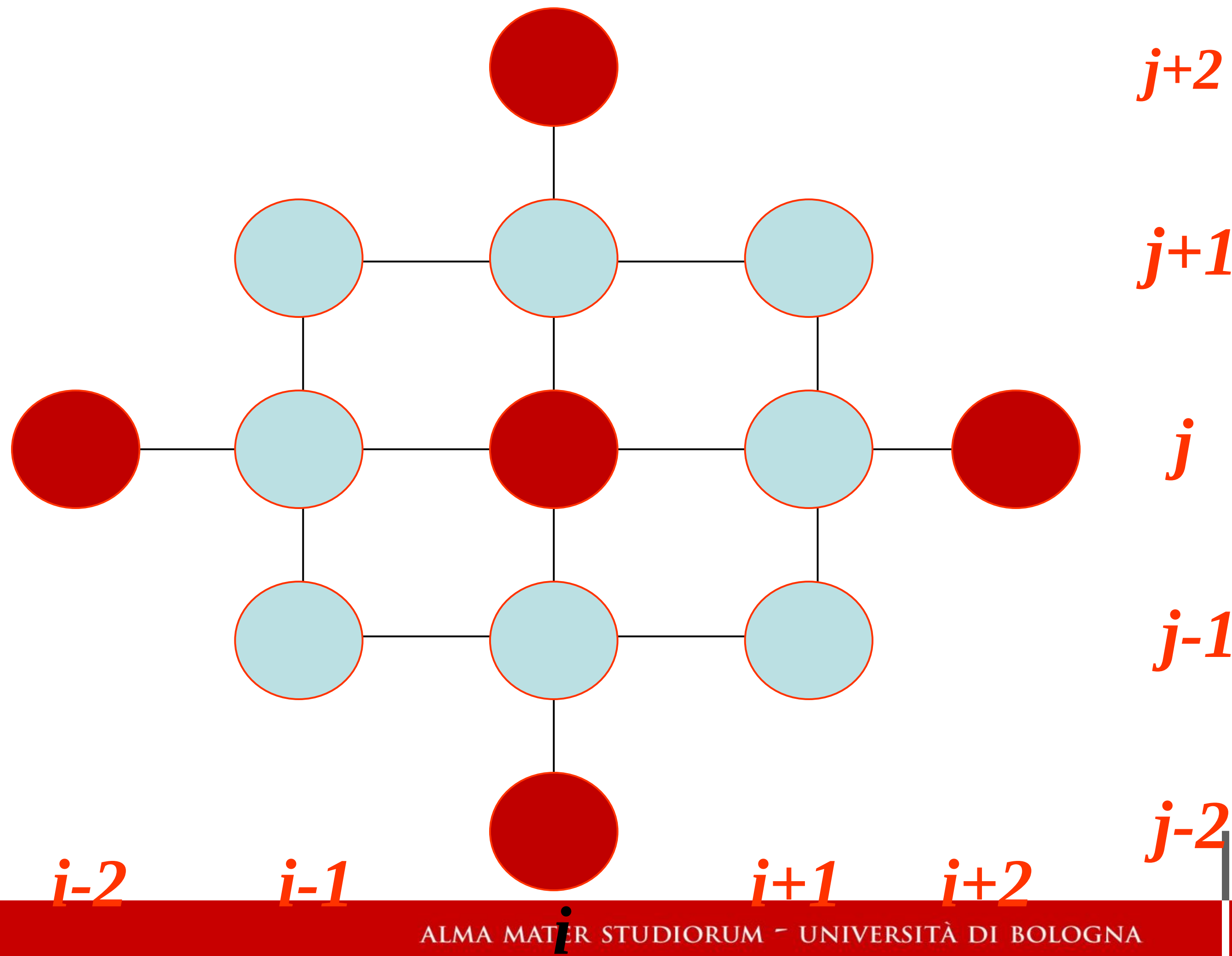
$$div(b\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$div(b\nabla u) \approx \delta_x(b_{i,j}\delta_x u_{i,j}) + \delta_y(b_{i,j}\delta_y u_{i,j})$$

$$\approx \frac{b_{i+1,j}u_{i+2,j} + b_{i-1,j}u_{i-2,j} + b_{i,j+1}u_{i,j+2} + b_{i,j-1}u_{i,j-2}}{4h^2}$$

$$-\frac{(b_{i+1,j} + b_{i-1,j} + b_{i,j+1} + b_{i,j-1})u_{ij}}{4h^2}$$

Operatore divergenza



Non robusto!

Operatore Divergenza (2)

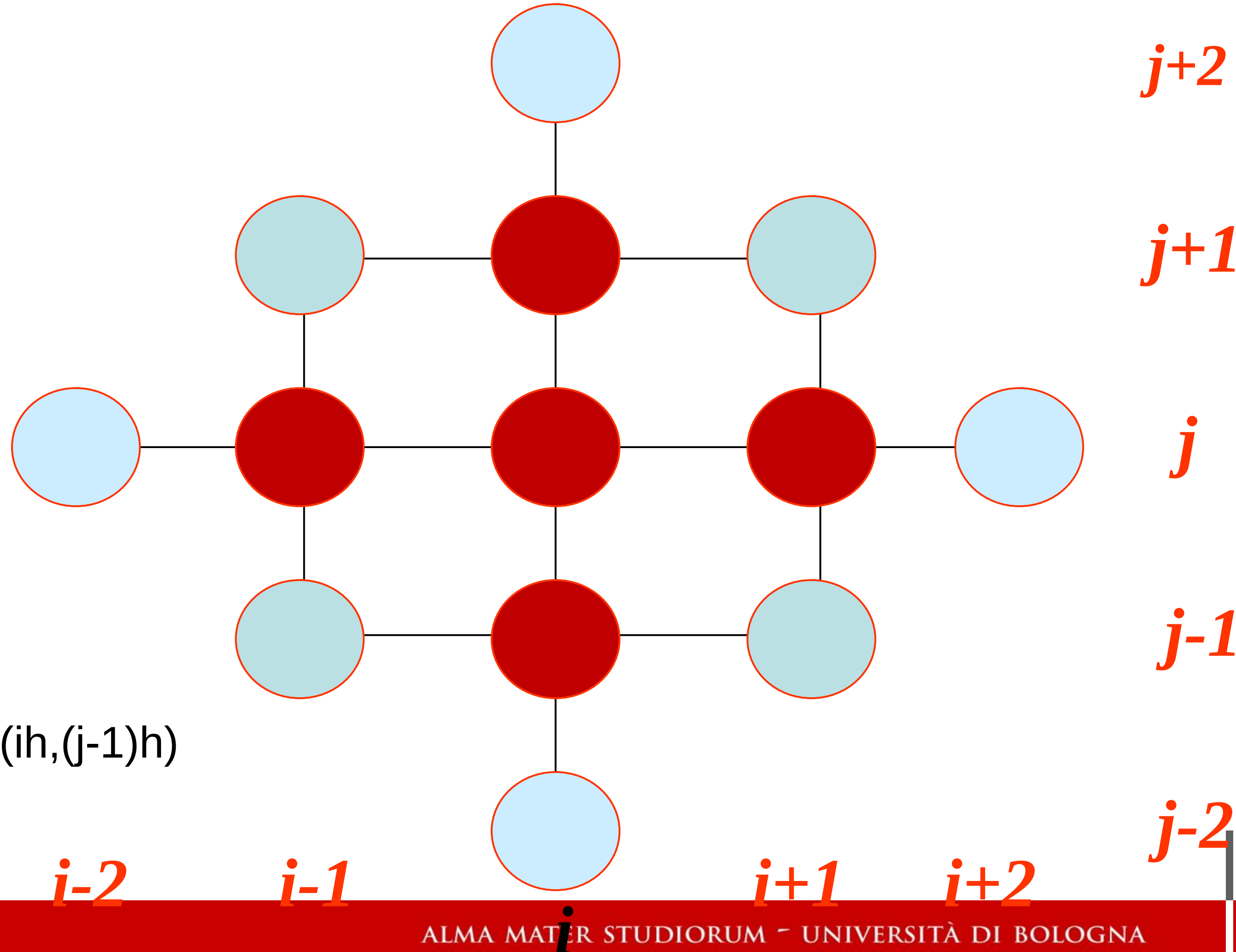
$$div(b\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$div(b\nabla u) \approx D_x^+(b_{i,j}D_x^- u_{i,j}) + D_y^+(b_{i,j}D_y^- u_{i,j})$$

$$\approx \frac{b_{i+1,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + b_{i,j+1}u_{i,j+1} + b_{i,j}u_{i,j-1}}{h^2}$$

$$- \frac{(b_{i+1,j} + b_{i,j+1} + 2b_{i,j})u_{ij}}{h^2}$$

Operatore divergenza



Non usa b((i-1)h,jh) e b(ih,(j-1)h)

Operatore Divergenza (3)

$$div(b\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\delta_x^* = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h} \qquad \delta_y^* = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h}$$

$$div(b\nabla u) \approx \delta_x^*(b_{i,j}\delta_x^* u_{i,j}) + \delta_y^*(b_{i,j}\delta_y^* u_{i,j})$$

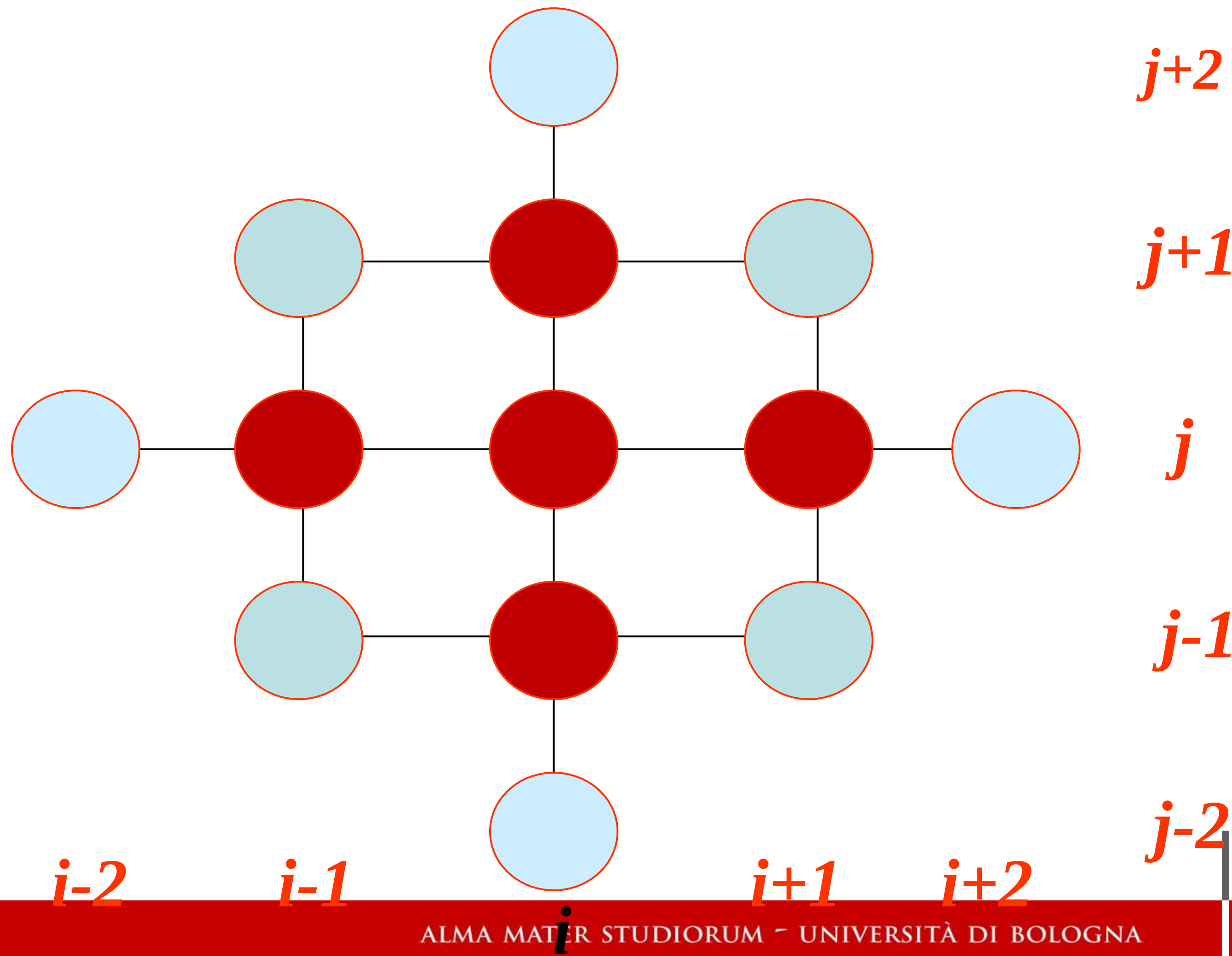
$$\approx \frac{b_{+0,j}u_{i+1,j} + b_{-0}u_{i-1,j} + b_{0+}u_{i,j+1} + b_{0-}u_{i,j-1}}{h^2} - \frac{(b_{+0} + b_{-0} + b_{0+} + b_{0-})u_{ij}}{h^2}$$

dove

$$b_{\pm 0} = b_{i\pm\frac{1}{2},j} \quad e \quad b_{0\pm} = b_{i,j\pm\frac{1}{2}}$$

Valori interpolati

Operatore divergenza



Secondo ordine!

Osservazioni

- Per aumentare l'ordine di precisione delle formule alle differenze occorre aumentare il numero dei punti coinvolti nel calcolo.
- Una precisione maggiore equivale ad una maggiore complessità computazionale.
- Per ottenere una maggiore precisione senza aumentare l'ordine delle formule alle differenze si possono utilizzare tecniche di estrapolazione quali quella di Richardson.

Estrapolazione di Richardson

Questa tecnica usa il concetto di griglie di passo con ampiezza variabile per migliorare l'accuratezza.

Consideriamo una differenza centrale del secondo ordine. Scriviamo l'equazione nella forma:

$$f''(x_i) = \left(\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} \right) + a_1 \Delta x^2 + a_2 \Delta x^4 + \ \ldots$$

Estrapolazione di Richardson

La differenza centrale può essere definita come

$$f''(x_i) = \left(\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} \right) + a_1 \Delta x^2 + a_2 \Delta x^4 + \ldots$$

Scriviamo l'equazione per griglie di diversa ampiezza

$$f''(x_i) = F(\Delta x) + a_1 \Delta x^2 + a_2 \Delta x^4 + \ldots$$

$$f''(x_i) = F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + a_1 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + a_2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 + \ldots$$

Estrapolazione di Richardson

Sviluppiamo i termini:

$$f''(x_i) = F(\Delta x) + \quad a_1 \Delta x^2 + a_2 \Delta x^4 + \quad \ldots \qquad [1]$$

$$f''(x_i) = F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \quad a_1 \left(\frac{\Delta x^2}{4}\right) + a_2 \left(\frac{\Delta x^4}{16}\right) + \quad \ldots \quad [2]$$

Estrapolazione di Richardson

Moltiplichiamo l' eqn [2] per 4 e sottraiamo l' eqn [1] da essa.

$$4f''(x_i) = 4F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + 4a_1\left(\frac{\Delta x^2}{4}\right) + 4a_2\left(\frac{\Delta x^4}{16}\right) + \dots$$

$$-f''(x_i) = -F(\Delta x) - a_1\Delta x^2 - a_2\Delta x^4 + \dots$$

$$3f''(x_i) = 4F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - F(\Delta x) - 12a_2\left(\frac{\Delta x^4}{16}\right) + \dots$$

Estrapolazione di Richardson

L'equazione può essere riscritta come:

$$f''(x_i) = \left(\frac{4F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - F(\Delta x)}{3} \right) - a_2\left(\frac{\Delta x^4}{4}\right) + \quad \ldots$$

L'accuratezza della nuova stima di $f''(x_i)$ è

$O(\Delta x^4)$ anzichè $O(\Delta x^2)$

Estrapolazione di Richardson

Possiamo continuare per eliminare termini di ordine superiore dell'errore usando una griglia ancora più fine:

$$f''(x_i) = B(\Delta x) + b_1 \Delta x^4 + b_2 \Delta x^6 + \quad \dots$$

$$f''(x_i) = \left(\frac{16B\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - B(\Delta x)}{15} \right) + O\left(\Delta x^6\right) + \quad \dots$$

Estrapolazione di Richardson esempio

Data

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

Trovare la derivata prima in x=1.25 usando uno schema alle differenze centrali e $\Delta h = 0.25$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4 = 3(1.25)^2 - 4(1.25) + 4 = 3.6875$$

Estrapolazione di Richardson esempio

I punti sono:

x	f(x)
1	-5
1.125	-4.607
1.25	-4.172
1.375	-3.682
1.5	-3.125

Le derivate usando le differenze centrali

$$F(\Delta x) \simeq f'(1.25) = \frac{f(1.5) - f(1.0)}{2(0.25)} = \frac{-3.125 + 5}{0.5} = 3.75$$

$$F(\Delta x/2) \simeq f'(1.25) = \frac{f(1.375) - f(1.125)}{2(0.125)} = \frac{-3.6816 + 4.6074}{0.25} = 3.7032$$

Estrapolazione di Richardson esempio

I risultati dello schema alle differenze centrali sono:

$$F(\Delta x) \simeq f'(1.25) = 3.75 \qquad \text{Errore} = 1.69\%$$

$$F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \simeq f'(1.25) = 3.7032 \qquad \text{Errore} = 0.425\%$$

L'estrapolazione di Richardson usa questi risultati per trovare una migliore soluzione

$$f'(1.25) = \frac{4F\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - F(\Delta x)}{3} = \frac{4(3.7032) - 3.75}{3} = 3.6876 \qquad \text{Errore} = 0.003\%$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi