

# Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP I

# Metodi numerici per ODE

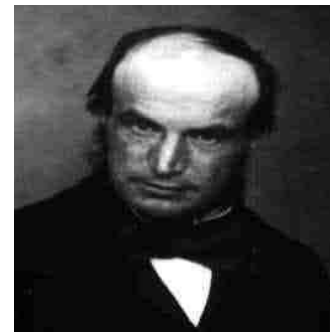
- **Metodi one-step**
  - Metodi Eulero
  - Analisi dei metodi one-step
  - Metodi Runge-Kutta
- **Metodi Multi-step**
  - Adams-Bashforth
  - Adams-Moulton
  - Predictor-Corrector
- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**



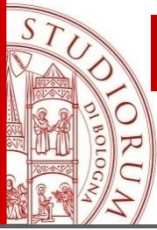
**Eulero**

**Martin Kutta**

**Carl David Runge (1856-1927)**



**J.C. Adams  
(1819-1882)**



# Equazioni differenziali ordinarie

Equazione differenziale  
ordinaria del primo ordine  
omogenea, lineare

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y(x) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{y(x)} dy = -p(x)dx$$

$$\int \frac{1}{y(x)} dy = -\int p(x)dx \quad \longrightarrow \quad \log(y(x)) = -\int p(x)dx + c$$

***Soluzione equazione  
omogenea:***

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx + c} = Ce^{-\int p(x)dx}$$



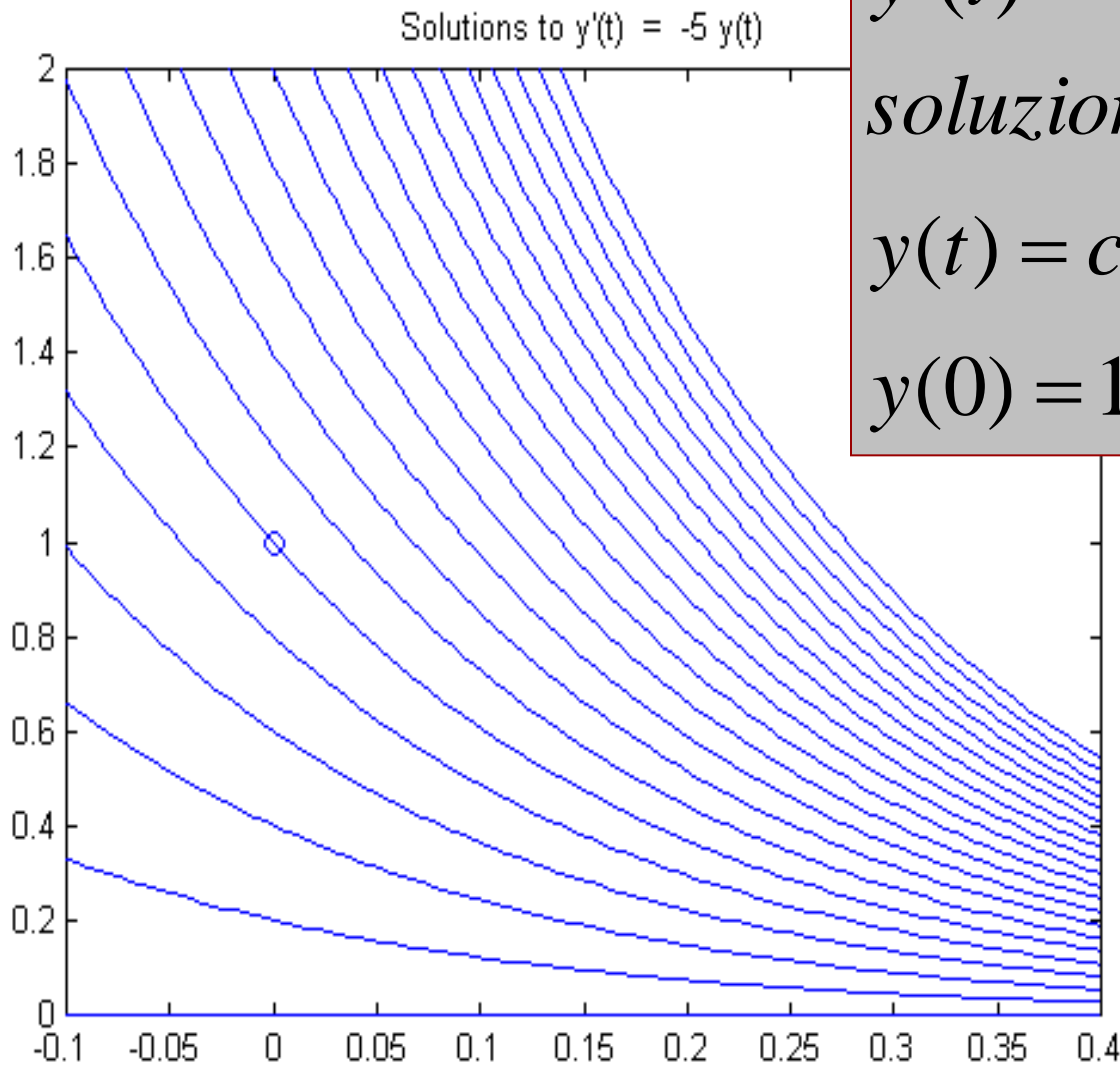
# Equazioni differenziali ordinarie

$$y'(t) = -5y(t)$$

*soluzione*

$$y(t) = ce^{-5t}, c \text{ costante}$$

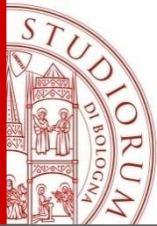
$$y(0) = 1 \rightarrow y(t) = e^{-5t}$$



In generale

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$



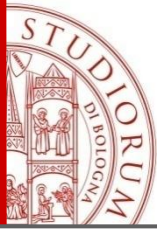
# Equazioni differenziali ordinarie

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I \equiv [a, b]$$

L'equazione differenziale è soddisfatta da una famiglia di funzioni. La *condizione iniziale*

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b]$$

Isola una di queste funzioni  
(soluzione dell'**I**nitial **V**alue **P**roblem **IVP**)



# Problemi a valori iniziali (IVP)

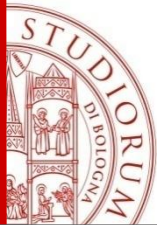
## ***PROBLEMA DI CAUCHY (o IVP)***

Determinare la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria, scalare o vettoriale, completata da opportune condizioni iniziali.

### ***IVP associato ad una ODE del primo ordine***

Determinare una funzione  $y(\mathbf{x})$ , continua e derivabile sull'intervallo  $I$  in  $\mathbf{R}$ , a valori in  $\mathbf{R}^m$ ,  $m=1$ , tale che

$$\begin{cases} y'(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) & \forall \mathbf{x} \in I \equiv [a, b] \\ y(\mathbf{x}_0) = y_0 & \mathbf{x}_0 \in [a, b] \end{cases}$$



# Sistemi di ODE

SISTEMA DI  $m$  EQUAZIONI ORDINARIE del primo ordine:

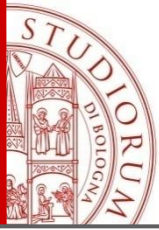
$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \\ \dots\dots\dots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \dots\dots\dots \\ y_m(x_0) = y_{m,0} \end{cases}$$

Ciascuna variabile  $y_j$  dipendente soddisfa un'equazione ordinaria a valori iniziali.

In forma compatta:

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

$$Y'(x) = (y_1'(x), \dots, y_m'(x)) \quad Y_0(x) = (y_{1,0}(x), \dots, y_{m,0}(x))$$



# Equazione differenziale di ordine $m$

Ogni ODE di ordine  $m$ :

$$y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$$

$$y(x_0) = y_{1,0}$$

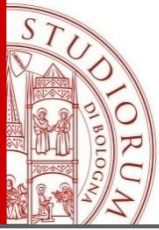
$$y'(x_0) = y_{2,0}$$

....

$$y^{(m-1)}(x_0) = y_{m,0}$$

è equivalente ad un sistema di  $m$  equazioni del primo ordine:



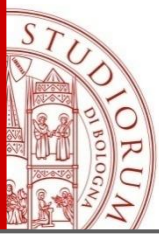


# Equazione differenziale di ordine $m$

Ponendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(x) = y(x) \\ z_2(x) = y'(x) \\ \dots\dots \\ z_m(x) = y^{(m-1)}(x) \end{array} \right.$$

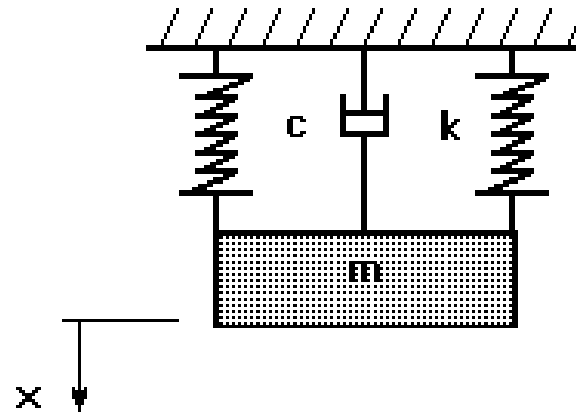
$$\left\{ \begin{array}{l} z_1'(x) = z_2(x) \\ \dots\dots \\ z_{m-1}'(x) = z_m(x) \\ z_m'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_{m-1}(x)) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1(x_0) = y_{1,0} \\ z_2(x_0) = y_{2,0} \\ \dots\dots\dots \\ z_m(x_0) = y_{m,0} \end{array} \right.$$



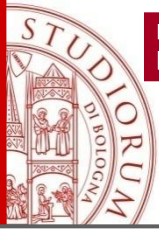
# Equazione differenziale di ordine 2: ESEMPIO lineare

Equazione differenziale del **secondo** ordine per un sistema vibrante con molle.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$



Le condizioni iniziali sono  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = 0$ .



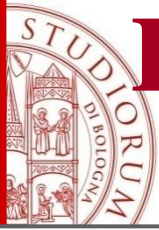
# Equazione differenziale di ordine $m$ : ESEMPIO

Riscriviamo l'equazione:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \left( \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x \right)$$

$$z_1(t) = x(t)$$

$$z_2(t) = \frac{dx}{dt}$$



# Equazione differenziale di ordine $m$ : ESEMPIO

L'equazione può essere riscritta come un sistema di due equazioni del primo ordine

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2(t)$$

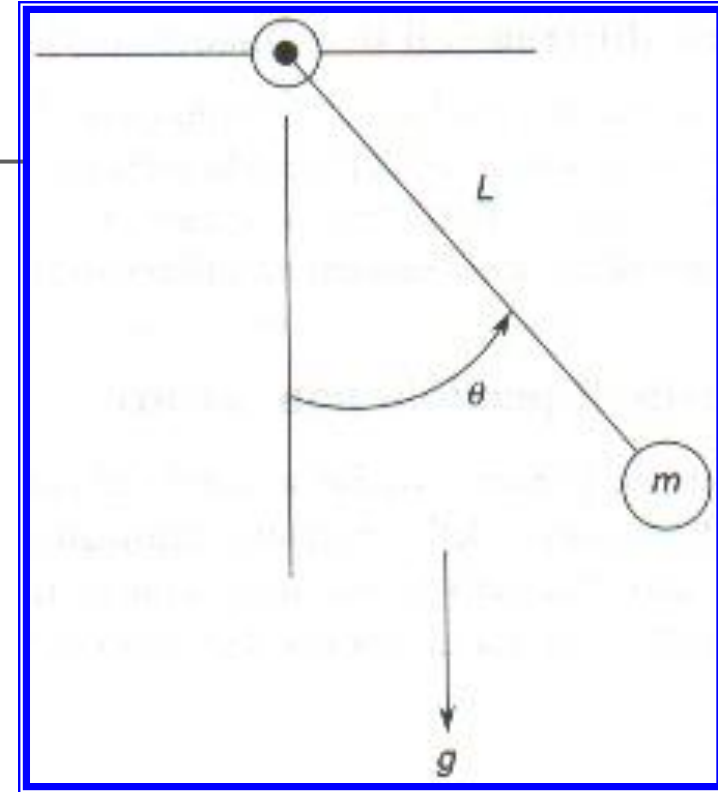
$$\frac{dz_2}{dt} = -\left(\frac{c}{m} z_2(t) + \frac{k}{m} z_1(t)\right)$$

Le condizioni iniziali sono  $z_1(0) = x_0$  and  $z_2(0) = 0$ .

# ESEMPIO non lineare

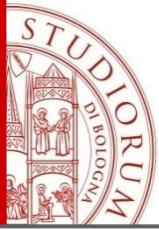
Moto di una massa  $m$  appesa ad un filo di lunghezza  $L$  in assenza di attrito. Equazione del secondo ordine non lineare:

$$\vartheta'' + \frac{g}{L} \sin \vartheta = 0$$



Trasformazione in un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine non lineari

$$\begin{cases} z_1 = \vartheta \\ z_2 = \vartheta' \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \vartheta' = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = -\frac{g}{L} \sin(z_1) \end{cases}$$



# METODI NUMERICI: discretizzazione

Approssimare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

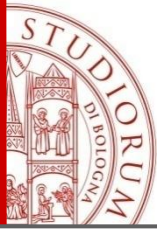
## Idea base

Discretizziamo l'intervallo  $I$  in sottointervalli di ampiezza  $h$ .

Consideriamo la successione di punti  $x_j = x_0 + jh$  con  $j=0, 1, 2, \dots$  che chiameremo **nodi**,  $h$  **passo di discretizzazione**.

Approssimiamo i valori della soluzione  $y(x)$  nei nodi  $x_j$  e chiamiamo tale approssimazione  $u_j$ . Pertanto  $u_j$  sarà un'approssimazione di  $y(x_j)$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$

**La sequenza di punti  $(x_j, u_j)$  approssima la soluzione  $y(x)$  in  $I$**



# Discretizzazione

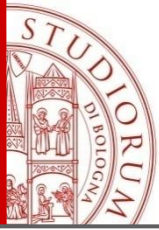
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

## Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$y(x'') - y(x') = \int_{x'}^{x''} f(x, y(x)) dx \quad x_0 \leq x' < x''$$

Possiamo fare in modo che  $x'$  ed  $x''$  coincidano con due nodi della discretizzazione, diciamo  $x' = x_m$   $x'' = x_m + kh$  per un opportuno  $k$ . Quindi si integra numericamente il termine di destra con una formula di integrazione che usi come nodi di quadratura un sottoinsieme dei nodi

$$\{x_m, \dots, x_m + k * h\}$$



# Alcuni Metodi Numerici

$$u_{j+1} - u_j = h f(x_j, u_j)$$

**Eulero in avanti**

$$u_{j+1} - u_j = h f(x_{j+1}, u_{j+1})$$

**Eulero all'indietro**

$$u_{j+1} - u_{j-1} = 2h f(x_j, u_j)$$

**Punto medio**

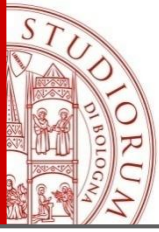
$$u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2} [f(x_j, u_j) + f(x_{j+1}, u_{j+1})]$$

**Trapezi  
(Crank-Nicolson)**

$$u_{j+1} - u_{j-1} = \frac{h}{3} [f(x_{j-1}, u_{j-1}) + 4f(x_j, u_j) + f(x_{j+1}, u_{j+1})]$$

**Simpson**

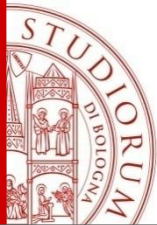




# Criteri di classificazione

---

1. Il numero di *passi*
2. Il carattere *esplicito* o *implicito*
3. La proprietà di *stabilità*
4. La proprietà di *convergenza*
5. Il tipo di *accuratezza*



# Criteri di classificazione

## 1. Il numero di *passi*

Un metodo si dice ad **un passo** se  $\forall j \geq 0$   $u_{j+1}$  dipende solo da  $u_j$ .

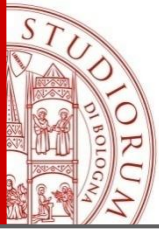


**One step**

Un metodo si dice a **p passi** ( $p \geq 2$ ) se  $\forall j \geq p - 1$   $u_{j+1}$  dipende da  $u_j, u_{j-1}, \dots, u_{j+1-p}$ .



**Multistep**



# Criteri di classificazione

## 2. Il carattere *esplicito* o *implicito*

Un metodo si dice **esplicito** se  $u_{j+1}$  si ricava direttamente in funzione dei valori nei soli punti precedenti.

$$u_{j+1} - u_j = h f(x_j, u_j)$$

Metodo di Eulero in avanti

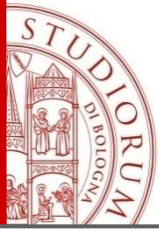
$$u_{j+1} - u_{j-1} = 2h f(x_j, u_j)$$

Metodo del punto medio

Un metodo è **implicito** se  $u_{j+1}$  dipende implicitamente da se stessa attraverso  $f(\dots)$ .

$$u_{j+1} - u_j = h f(x_{j+1}, u_{j+1}) \quad \text{Metodo di Eulero all'indietro}$$

Conseguentemente i metodi impliciti richiedono la soluzione di un problema in generale non lineare ad ogni passo.

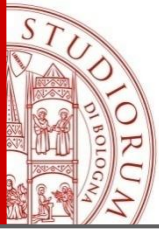


# Criteri di classificazione

## 3. La proprietà di *stabilità*

Un metodo numerico si dice *stabile* se a piccole perturbazioni sui valori iniziali corrispondono piccole variazioni nelle soluzioni.

Se il metodo numerico non fosse stabile, gli errori di arrotondamento introdotti su  $y_0$  e propagati nel calcolo di  $f(x_n, u_n)$  ad ogni passo, renderebbero infatti la soluzione calcolata del tutto priva di significato.



# Criteri di classificazione

## 4. La proprietà di *convergenza*

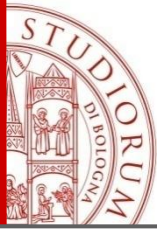
Un metodo si dice *convergente rispetto ad h* se

$$\forall j = 0, 1, 2, \dots \quad \|u_j - y(x_j)\| \leq C(h)$$

dove  $C(h)$  tende a zero quando il passo di discretizzazione  $h$  tende a zero.

Vedremo che un metodo stabile risulta essere convergente se e solo se è anche *consistente*.

**CONVERGENZA = STABILITA' + CONSISTENZA**



# Criteri di classificazione

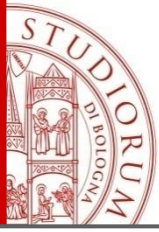
## 5. Il tipo di *accuratezza*

L'accuratezza di un metodo convergente si misura attraverso l'ordine di infinitesimo dell'errore rispetto ad  $h$ .

Precisamente, un metodo *converge con ordine  $p$*  se

$\exists C > 0$  indipendente da  $h$  tale che

$$\|y(x_j) - u_j\| \leq C h^p \quad \forall j \geq 1.$$



# Alcuni Metodi Numerici ad un passo

$u_{n+1}$  dipende solo da  $u_n$  per ogni  $n$

$$u_{n+1} = u_n + h f(x_n, u_n)$$

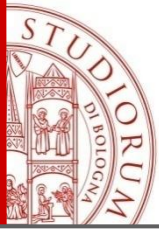
**Eulero in avanti (esplicito)**

$$u_{n+1} = u_n + h f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

**Eulero all'indietro  
(implicito)**

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]$$

**Trapezi (Crank-Nicolson)**



# Metodo di Heun

Un metodo implicito può essere sempre modificato in modo da ottenere un metodo esplicito.

**Es.** A partire dal metodo dei trapezi

$$\begin{aligned}y(x_n + h) - y(x_n) &\cong \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \\ &\cong \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \end{aligned}$$

Utilizzo del metodo di Eulero in avanti per il calcolo di  $y_{n+1}$ . Il metodo che si ottiene è detto **metodo di Heun** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_n + hf(x_n, u_n))]$$

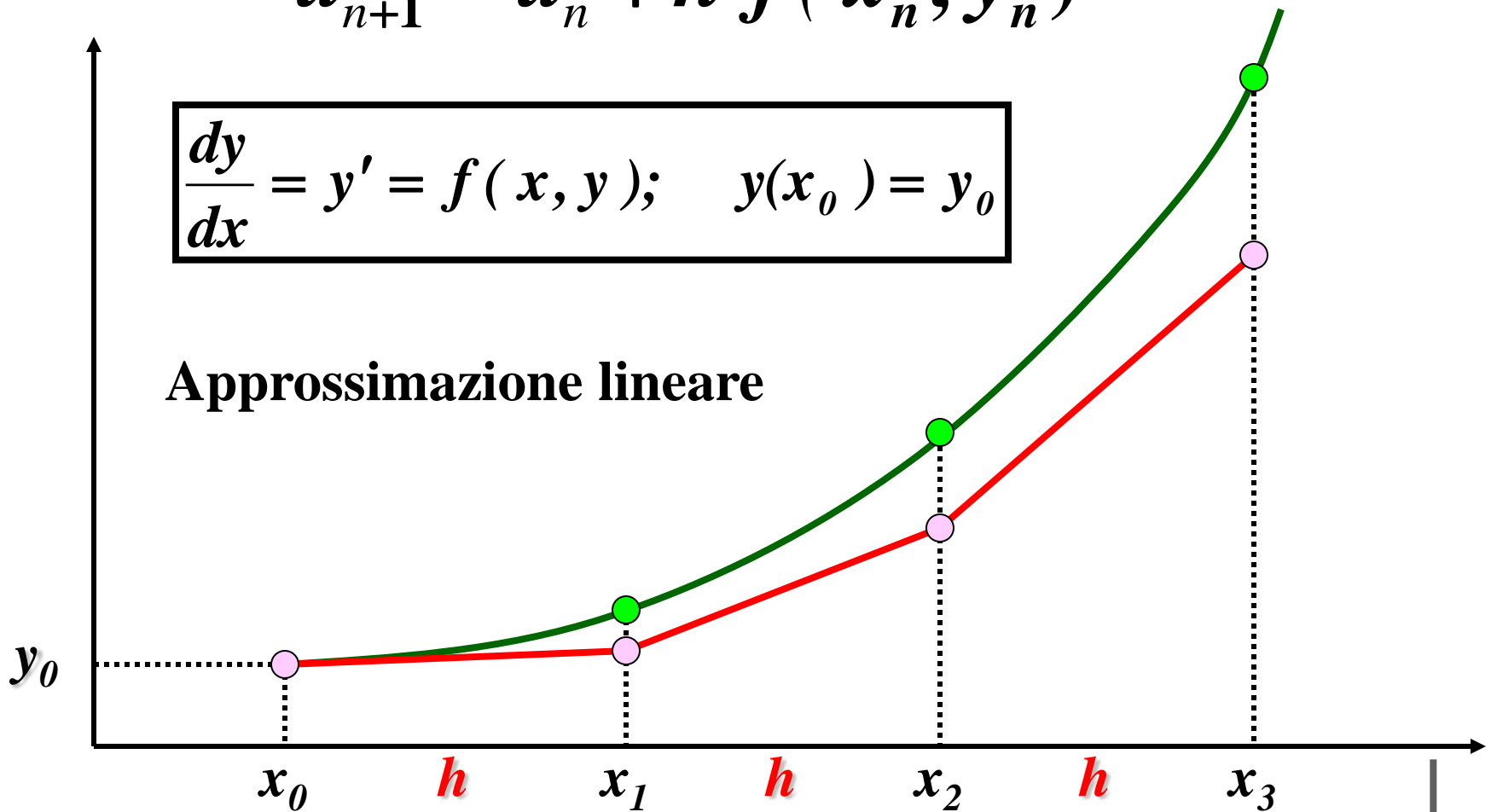


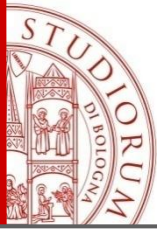
# Metodo di Eulero esplicito

$$u_{n+1} = u_n + h f(x_n, y_n)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

Approssimazione lineare

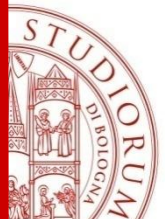




# Metodo di Eulero esplicito: algoritmo

Valuta  $f$  nel  
punto  $(x_n, y_n)$  usa  
questa  
informazione di  
pendenza per  
ottenere  $y_{n+1}$

```
 $n = 0$   
for each  $x_n, n = 0, \dots, N$   
→  $f_n = f(x_n, u_n)$   
   $x_{n+1} = x_n + h$   
   $u_{n+1} = u_n + hf_n$   
   $n = n + 1$   
end
```



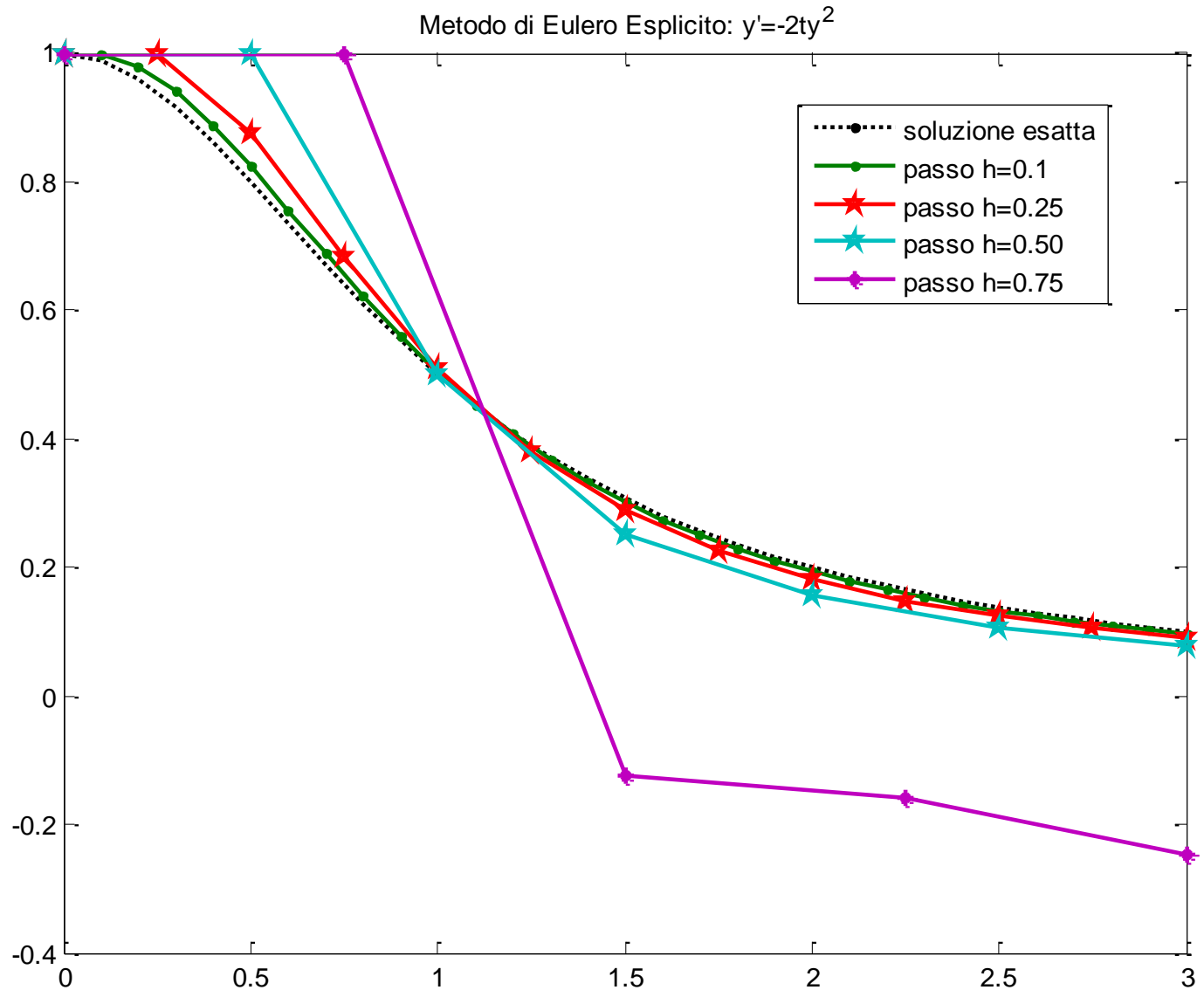
# Esempio

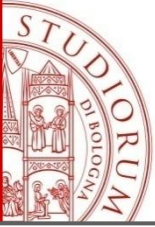
$$y' = -2ty^2$$

$$y(0) = 1$$

Soluzione  
analitica

$$y(x) = \frac{1}{1+t^2}$$





# Metodo di Eulero esplicito

---

## Problemi del metodo

- Mancanza di accuratezza
- Ampiezza del passo piccola

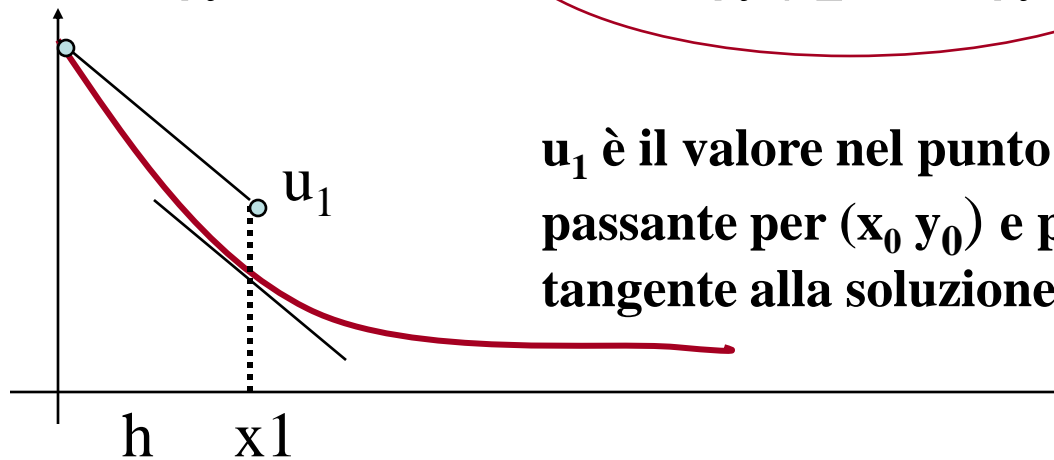
**Nota:** usiamo la pendenza della retta tangente all'inizio dell'intervallo per determinare l'incremento della funzione, ma questo è inesatto. Se la pendenza fosse costante, la soluzione sarebbe lineare.

# Metodo di Eulero all'indietro (implicito)

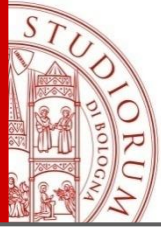
Si ottiene approssimando la derivata prima di  $y$  in  $x_{n+1}$  con una differenza finita all'indietro.

$$u_{n+1} = u_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$y'_{n+1}$



$u_1$  è il valore nel punto  $x_1$  della retta passante per  $(x_0, y_0)$  e parallela alla tangente alla soluzione nel punto  $x_1$ .



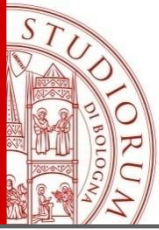
# Metodo di Crank-Nicolson (trapezi)

Il metodo di Crank-Nicolson è un metodo implicito ad un passo.

$$u_{n+1} = u_n + h \left( \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \right)$$

Il metodo usa la pendenza media delle pendenze ai due punti.

**Come altri metodi impliciti utilizza il metodo di Newton per calcolare la soluzione del sistema non lineare, richiede perciò lo jacobiano della funzione f.**



# Comportamento locale dei metodi ad un passo: accuratezza

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a, b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

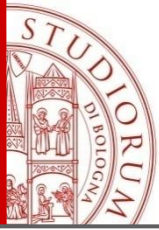
## Metodo esplicito ad un passo

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, f_n; h) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \quad u_0 = y_0$$



Funzione di incremento

posto  $f_n = f(x_n, u_n)$



# Comportamento locale dei metodi ad un passo

## Metodo esplicito ad un passo

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, f_n; h) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \quad u_0 = y_0$$

**Soluzione esatta della ODE** Ponendo  $y_n = y(x_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, f(x_n, y_n); h) + \varepsilon_{n+1} \quad 0 \leq n \leq N_h - 1$$

$\varepsilon_{n+1}$  è il residuo che si genera nel punto  $x_{n+1}$  calcolando la soluzione numerica  $u_{n+1}$  a partire dalla soluzione esatta  $y_n$  al tempo  $x_n$ .

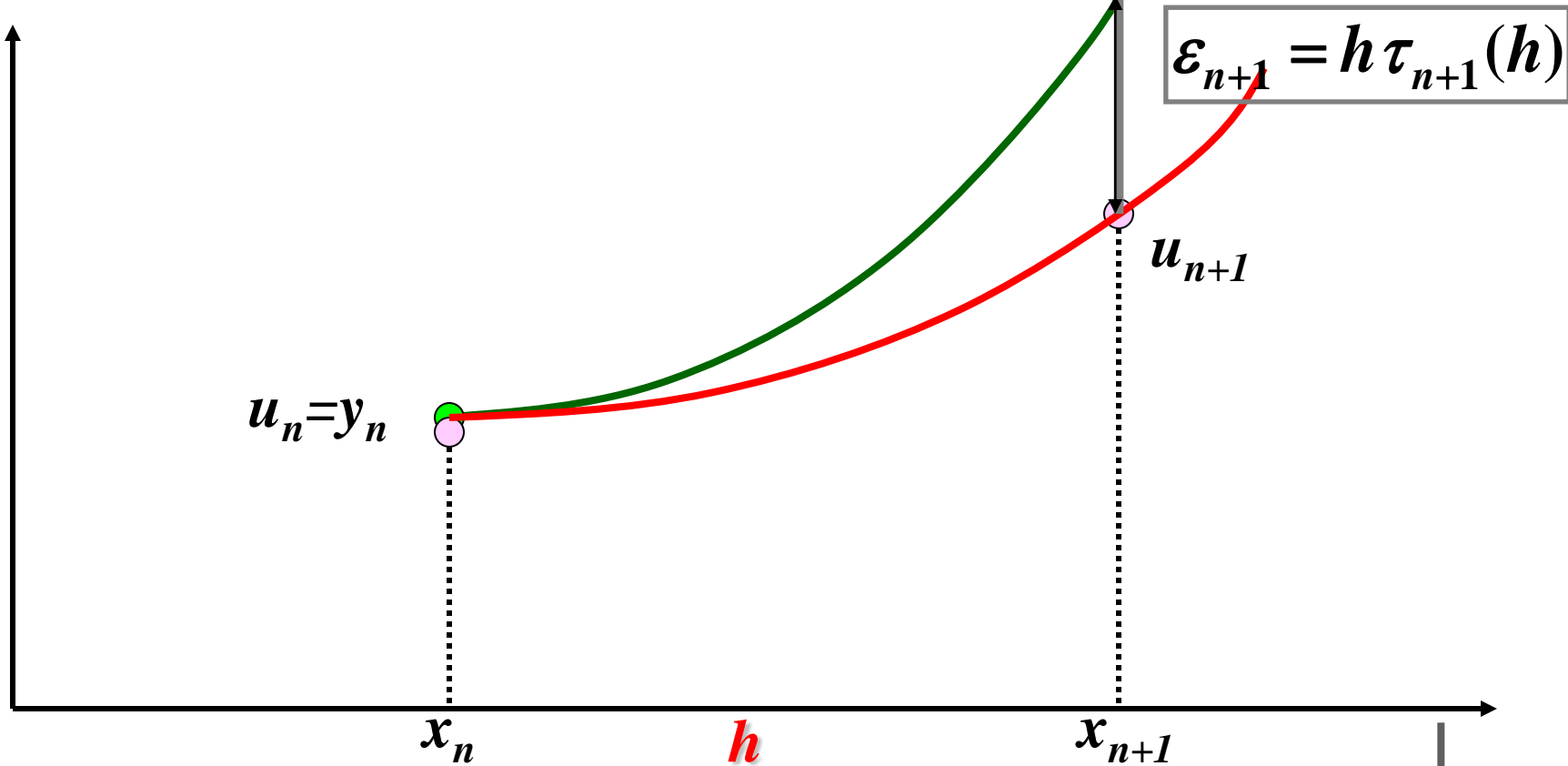
Riscriviamo il residuo nella forma  $\varepsilon_{n+1} = h\tau_{n+1}(h)$

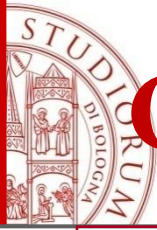
$\tau_{n+1}(h)$  errore di troncamento locale nel punto  $x_{n+1}$



# Errore Locale di Troncamento (ELT)

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h} [y_{n+1} - y_n - h\Phi(x_n, y_n, f(x_n, y_n); h)] = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{h}$$





# Consistenza dei metodi ad un passo

$$\tau(h) = \max_{0 \leq n \leq N_h - 1} |\tau_{n+1}(h)| \quad \text{errore di troncamento globale}$$

**Definizione.** Un metodo ad un passo si dice **consistente** con il problema di Cauchy

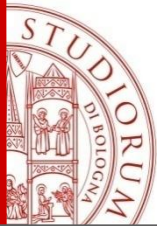
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a, b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

quando il suo errore di troncamento locale è infinitesimo rispetto ad  $h$ , cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$$

Inoltre, uno schema è consistente di **ordine  $p$** , se  $\forall x \in I$  la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy soddisfa la condizione

$$\tau(h) = O(h^p) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$



# Analisi del Metodo di Eulero

Il metodo è **consistente**, infatti :  $\Phi = f$

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h} [y_{n+1} - y_n] - f(x_n, u_n)$$

$$f(x_n, u_n) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$$

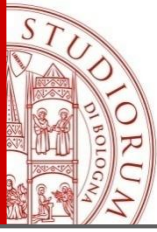
Formula di Taylor per  $y_{n+1}$

$$\tau_{n+1}(h) \cong \frac{1}{h} [y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(\eta) - y(x_n)] - y'(x_n)$$

$$= \frac{1}{2}h y''(\eta) \quad x_n < \eta < x_{n+1}$$

$$\Rightarrow \tau_{n+1}(h) = O(h) \quad \forall n \Rightarrow \tau(h) = O(h)$$

**allora il Metodo di Eulero è di ordine 1**



# Ordine dei metodi ad un passo

$$\Phi(x_n, u_n, f_n; h) = f(x_n, u_n)$$

**Metodo di Eulero**

$$\Phi(x_n, u_n, f_n; h) = \frac{1}{2} [f(x_n, u_n) + f(x_n + h, u_n + hf_n)]$$

**Metodo di Heun**

$$\Phi(x_n, u_n, f_n; h) = \frac{1}{2} [f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]$$

**Metodo dei trapezi  
(Crank-Nicolson)**

Usando gli sviluppi di Taylor, si può stabilire che

**Metodo di Eulero**

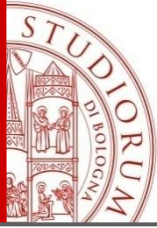
**ordine 1**

**Metodo di Heun**

**ordine 2**

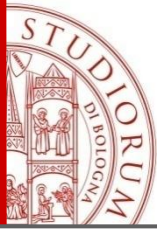
**Metodo dei trapezi  
(Crank-Nicolson)**

**ordine 2**



# Assoluta stabilità (h fissato)

- La convergenza non è una garanzia perché il metodo numerico fornisca dei risultati “accettabili”. Non è accettabile che il passo debba essere reso piccolissimo per garantire la stabilità.
- Necessità di una nuova definizione di stabilità nella quale si pensi fissato il passo  $h$  e si richieda che l'errore si propaghi in maniera limitata per  $N_h \rightarrow \infty$
- La proprietà di **assoluta stabilità** è in un certo senso speculare rispetto alla zero-stabilità, per quanto riguarda il ruolo di  $h$  e dell'insieme di integrazione  $I$ .
- Tale proprietà ha a che vedere con il **comportamento asintotico di  $u_n$** , a differenza della zero-stabilità nella quale, fissato l'intervallo, si studia l'andamento di  $u_n$  per  $h \rightarrow 0$



# Assoluta stabilità (h fissato)

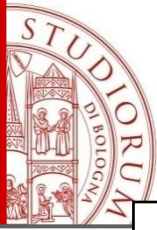
Definizione più precisa:

**problema modello – problema di Cauchy lineare**

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & x > 0, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0 \quad \text{se } \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Nello studio della stabilità si cerca di vedere se anche la soluzione numerica decresce nel tempo



# Assoluta stabilità

## Definizione:

Un metodo numerico per l'approssimazione di

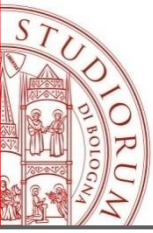
$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & x > 0, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è **assolutamente stabile** se  $|u_n| \rightarrow 0$  per  $x_n \rightarrow +\infty$

Sia  $h$  il **passo di discretizzazione**. La soluzione  $u_n$  dipende ovviamente da  $h$  e da  $\lambda$ . Si definisce **regione di assoluta stabilità** del metodo numerico il seguente sottoinsieme del piano complesso

$$A = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : |u_n| \rightarrow 0 \text{ per } x_n \rightarrow +\infty\}$$

Dunque  $A$  è l'insieme dei valori del prodotto  $h\lambda$  per i quali il metodo numerico produce soluzioni che tendono a zero quando  $x_n$  tende all'infinito.



# Assoluta stabilità: Metodo di Eulero in avanti

$$u_{n+1} = u_n + hf_n$$

Applicato al problema modello  $u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$ , per  $n \geq 0$ , con  $u_0 = 1$

Procedendo ricorsivamente rispetto a  $n$  si ricava  $u_n = (1 + h\lambda)^n u_0$ ,  $n \geq 0$

La condizione  $|u_n| \rightarrow 0$  per  $x_n \rightarrow +\infty$  è verificata se e soltanto se

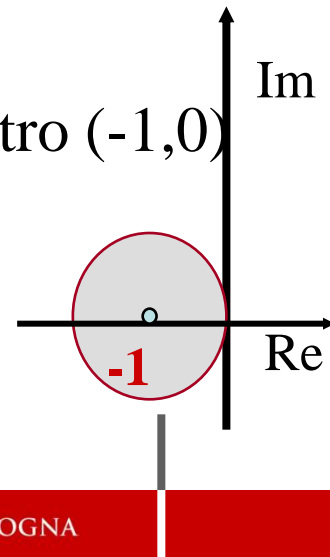
$$|1 + h\lambda| < 1$$

ovvero se  $h\lambda$  appartiene al cerchio di raggio unitario e centro  $(-1, 0)$

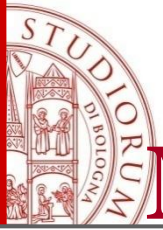
Tale richiesta equivale a

$$h\lambda \in C^- \quad \text{e} \quad 0 < h < -\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2}$$

$$\text{essendo} \quad C^- = \{z \in C : \operatorname{Re}(z) < 0\}$$





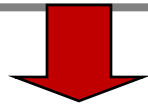


# Assoluta stabilità: Metodi di Eulero in avanti, esempio

$$u_{n+1} = u_n + hf_n$$

$$y'(x) = -5y(x) \text{ per } x > 0 \text{ con } y(0) = 1.$$

$$h\lambda \in C^- \text{ e } 0 < h < -\frac{2 \operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2}$$



$$0 < h < \frac{2}{5}$$

# Assoluta stabilità - esempi

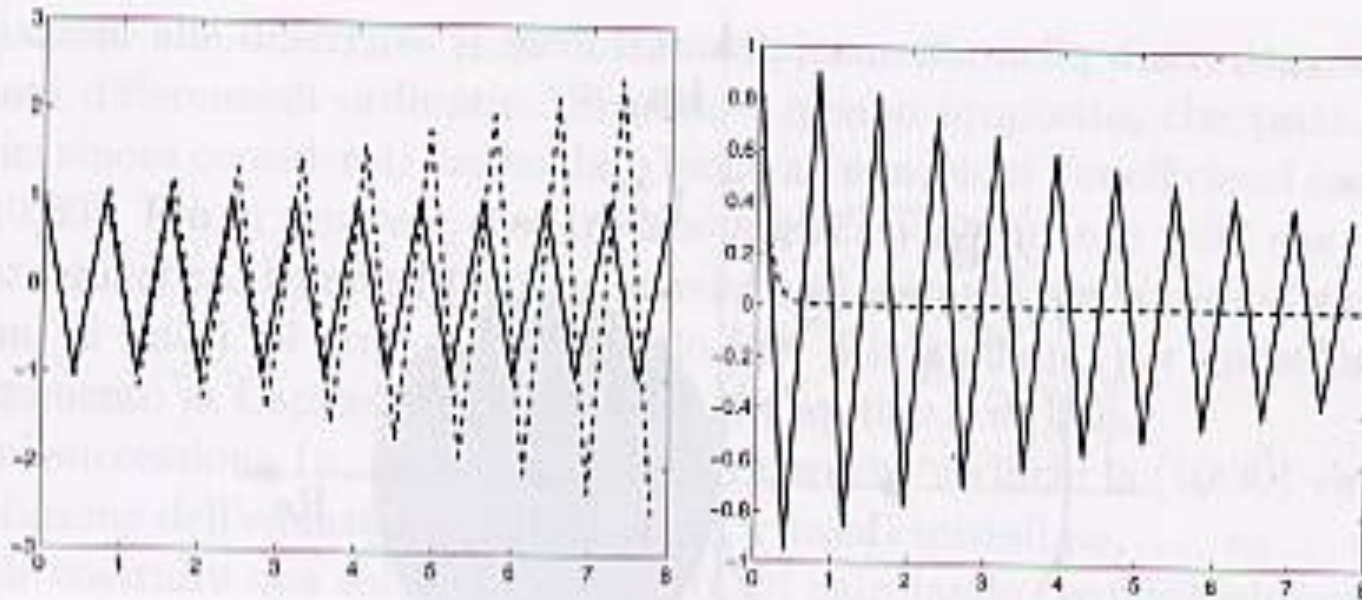
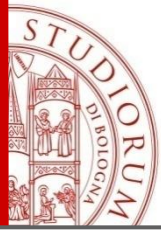


Fig. 10.2. A sinistra: soluzioni ottenute per  $h = 0.41 > 2/5$  (in linea tratteggiata), per  $h = 2/5$  (a tratto pieno). Si noti come nel caso limite  $h = 2/5$  le oscillazioni presenti non si amplificano, nè si smorzano. A destra, vengono riportate invece due soluzioni ottenute per  $h = 0.39$  (a tratto pieno) e per  $h = 0.15$  (in linea tratteggiata)



# Assoluta stabilità: Metodo di Eulero all'indietro

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$$

Analogamente si ottiene

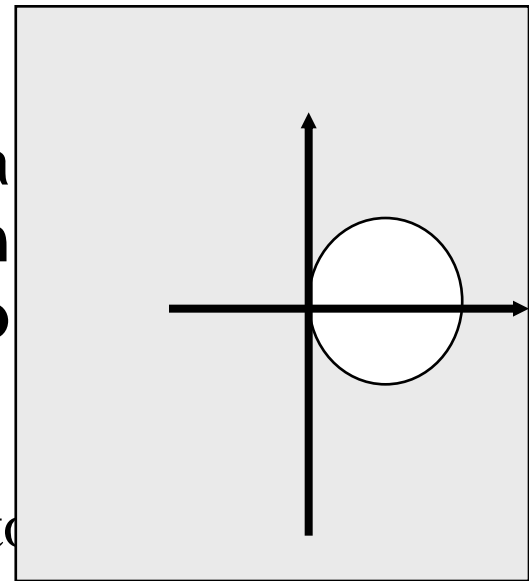
$$(1 - h\lambda)u_{n+1} = u_n$$



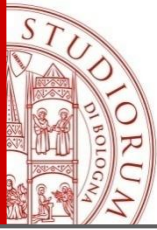
$$u_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} u_0, \quad n \geq 0$$

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| \leq 1$$

In questo caso la proprietà di assoluta stabilità è soddisfatta per **ogni valore di  $h/$  che non appartiene al cerchio del piano complesso di centro  $(1,0)$  e raggio unitario.**



La soluzione numerica del metodo di Eulero implicito nell'esempio precedente non presenta oscillazioni per alcun valore di  $h$



# Assoluta stabilità:

## Metodi dei trapezi (Crank-Nicolson)

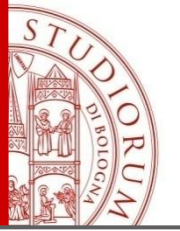
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}]$$

Si ottiene:

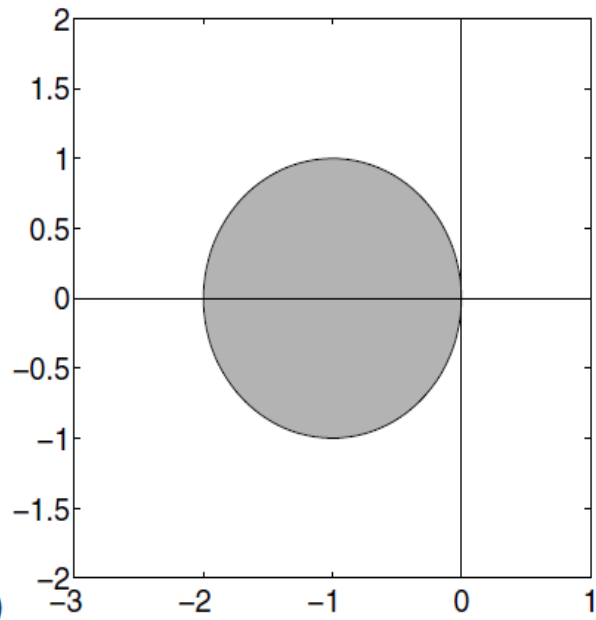
$$u_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}h\lambda\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{2}h\lambda\right)^n} u_0, \quad n \geq 0$$

Pertanto la condizione di assoluta stabilità è verificata **per ogni**

$$h\lambda \in C^-$$

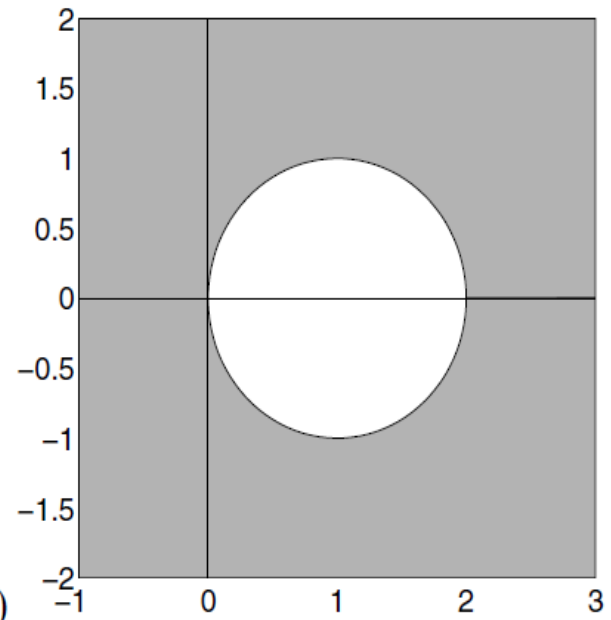


Forward Euler



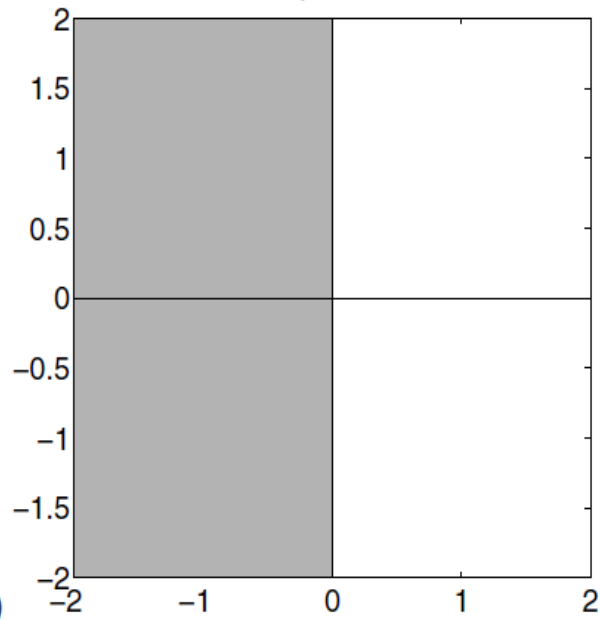
(a)

Backward Euler



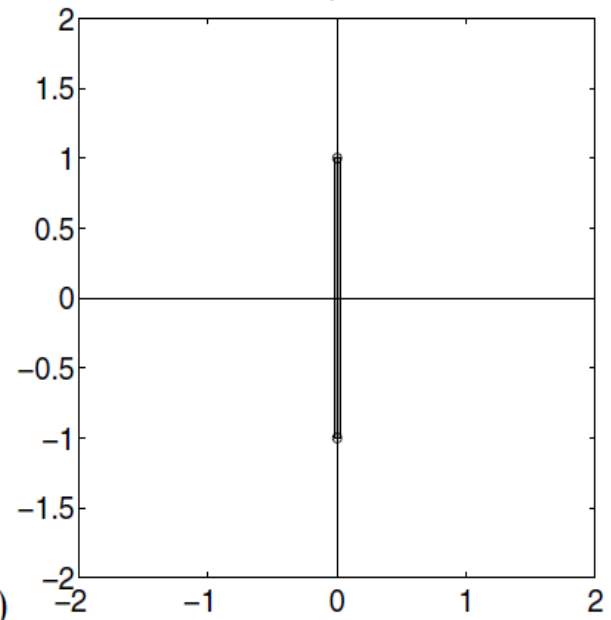
(b)

Trapezoidal

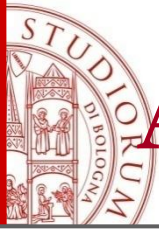


(c)

Midpoint



(d)



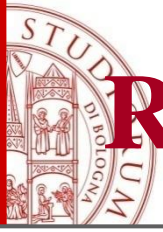
# Assoluta stabilità: Metodo di Heun

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f_n + f(x_{n+1}, u_n + hf_n)]$$

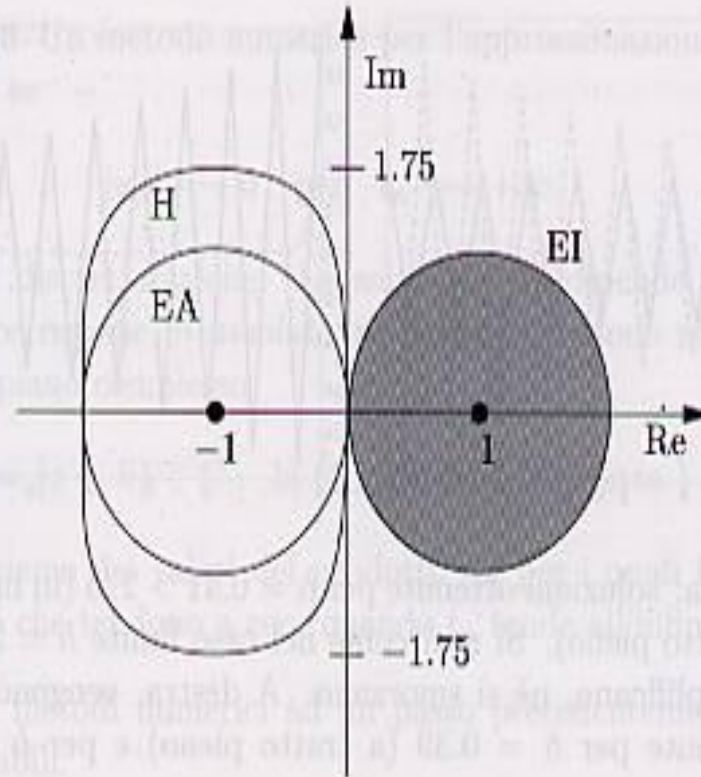
Si ottiene

$$u_n = \left[ 1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right]^n, \quad n \geq 0$$

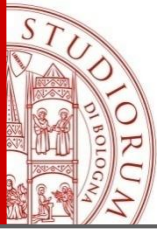
La regione di assoluta stabilità del metodo di Heun è più ampia di quella del metodo di Eulero in avanti. Soltanto la sua restrizione all'asse reale è la stessa.



# Regioni di assoluta stabilità - esempi



**Fig. 10.3.** Le regioni di assoluta stabilità per il metodo di Eulero in avanti (EA), di Eulero all'indietro (EI) e per il metodo di Heun (H). Si noti che la regione di assoluta stabilità per il metodo EI è il complementare del cerchio unitario di centro (1, 0) (in grigio)



# Metodi A-stabili

Nei casi limite in cui  $A$  coincide con l'intero semipiano complesso negativo, il metodo si dice *A-stabile*

in tal caso il metodo soddisfa la condizione di stabilità  $|u_n| \rightarrow 0$  incondizionatamente rispetto a  $h$ .

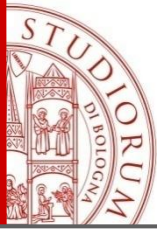
*A-stabili:*

Metodi dei trapezi e Eulero all'indietro

$$r_0(h\lambda) = \frac{\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)}{\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)}$$

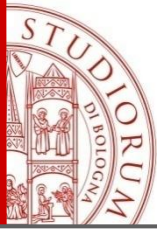
$$r_0(h\lambda) = \frac{1}{(1 - h\lambda)}$$





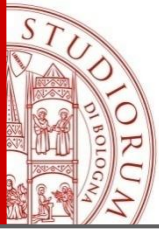
# Metodi A-stabili

- **Metodo di Eulero in avanti** *non è A-stabile*: la sua regione di assoluta stabilità coincide con il cerchio di raggio unitario avente come centro il punto di coordinate  $(-1,0)$
- Tra i metodi sono da preferire quelli per i quali la regione di assoluta stabilità  $A$  è molto estesa o addirittura illimitata.
- Più grande è la regione di assoluta stabilità, meno restrittiva sarà la condizione da richiedere su  $h$ .



# Metodi Runge-Kutta (1905)

- I metodi di Runge-Kutta sono famosi grazie alla loro efficienza; sono inseriti in quasi tutti i pacchetti software per ODE.
- Sono metodi ad un passo, come i metodi di Eulero, ma sono più accurati (ordine  $p \geq 2$ )
- Aumenta però il numero di valutazioni di funzione per ogni passo.



# Metodi Runge-Kutta

Forma generale dei metodi ad un passo:

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, h; f)$$

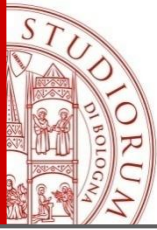
**Idea:** si determina calcolando numericamente l'integrale

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Consideriamo una partizione di  $[x_n, x_{n+1}]$ :

$$x_n \leq x_n + hc_1 \leq x_n + hc_2 \leq \dots \leq x_n + hc_m \leq x_{n+1}$$

Approssimiamo l'integrale con una formula di quadratura su ***m*** nodi:



# Metodi Runge-Kutta a m stadi

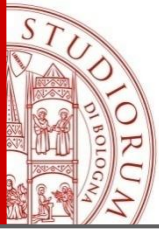
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \sum_{r=1}^m b_r \underbrace{f(x_n + hc_r, y(x_n + hc_r))}_{K_r}$$

NON E' NOTO IL VALORE DI  $y(x)$  NEI NODI  $x_n + hc_r$ ,  
approssimiamolo con  $v_r$ .

Ogni stadio calcola un'approssimazione  $K_r$  calcolando  $f(t, y)$   
come combinazione lineare delle stime ottenute agli stadi  
precedenti, ponendo  $y(x_n) = v_1 = u_n$

$$y(x_n + hc_r) \approx v_r \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$v_r = u_n + h \sum_{s=1}^{r-1} a_{rs} f(x_n + hc_s, v_s)$$



# Metodi Runge-Kutta a m stadi

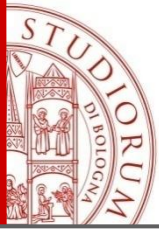
Formula generale dei metodi RK:

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{r=1}^m b_r K_r$$

$$K_r = f \left( x_n + c_r h, u_n + h \sum_{s=1}^{m-1} a_{rs} K_s \right) \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$\{a_{rs}\}, \{c_r\}, \{b_r\}$$

Caratterizzano il metodo  
m = numero degli stadi



# Metodi Runge-Kutta a m stadi Espliciti ed Impliciti

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{r=1}^m b_r K_r$$

$$K_r = f \left( x_n + c_r h, u_n + h \sum_{s=1}^m a_{rs} K_s \right) \quad r = 1, 2, \dots, m$$

A callout bubble labeled "r-1" points to the summation index 's' in the equation above.

$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\cdot$	$a_{1s}$
$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\cdot$	$a_{2s}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\cdot$	$a_{ss}$
	$b_1$	$b_2$	$\cdot$	$b_s$

**Matrice di Butcher**

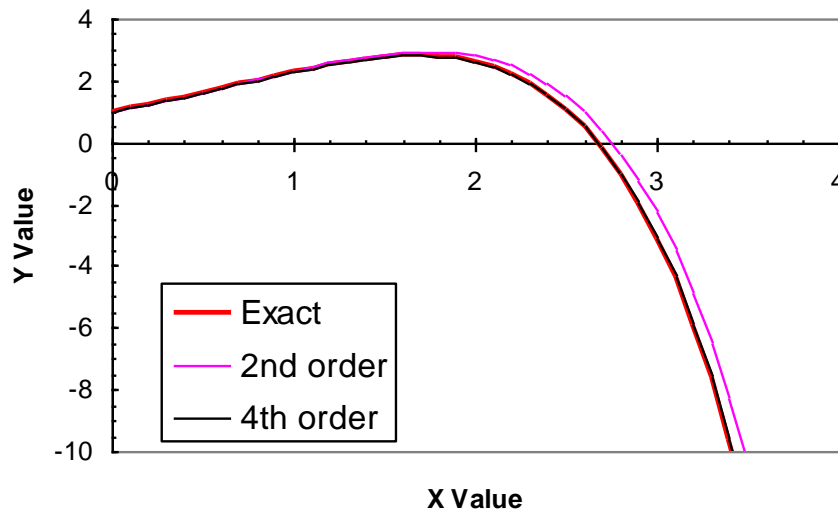
Se  $a_{ij} = 0$  per  $j \geq i$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$  allora ogni  $K_r$  può essere calcolato esplicitamente in funzione dei soli  $r-1$  coefficienti  $K_1, K_2, \dots, K_{r-1}$  già precedentemente calcolati.

In tal caso lo schema è **esplicito**. In caso contrario è **implicito** (il calcolo dei  $K_i$  richiede in generale sistema non lineare).

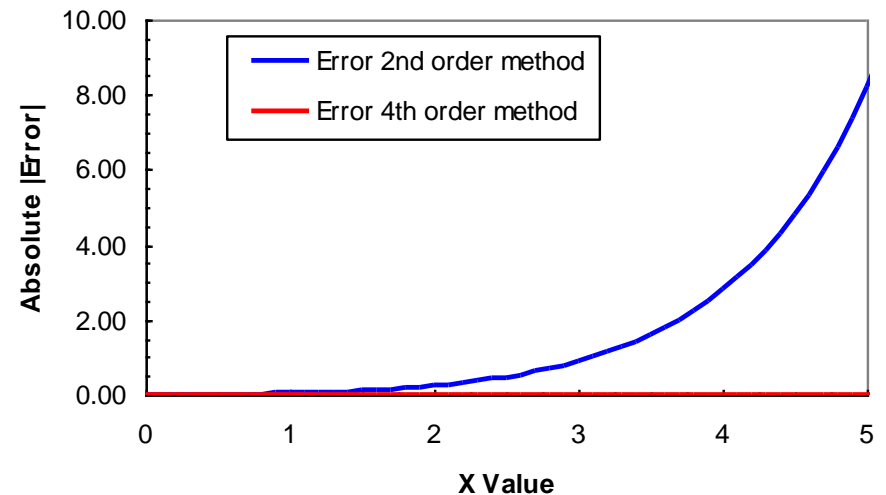
# Metodi RK : esempio

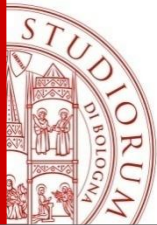
Confronto tra un metodo di Runge-Kutta del 2° ordine e del 4° ordine.

Runge Kutta Comparison



Error of the Methods





# Metodi Runge-Kutta a m stadi

La relazione tra il numero di valutazioni della funzione  $f$  ( $m$ ) e l'ordine dell'errore locale di troncamento ( $p$ ) è data dalla seguente tabella:

## RK Espliciti

Ordine $p$	1	2	3	4	5	6	7	8
stadi $m$	1	2	3	4	6	7	9	11

Ordine<sub>max</sub> =  $m$  per  $m=1,2,3,4$

Ordine<sub>max</sub> =  $m-1$  per  $m=5,6,7$

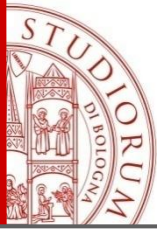
Ordine<sub>max</sub> =  $m-2$  per  $m=8,9$

Ordine<sub>max</sub> =  $m-3$  per  $m \geq 10$

**Proposizione:** per  $p \geq 8$  non esiste alcun metodo esplicito di ordine  $p$  con  $m=p+2$  stadi

## RK Impliciti m passi massimo ordine $2m$





# Scelta del passo di integrazione $h$

$$h_n = x_{n+1} - x_n$$

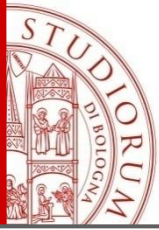
$h$  grande

basso costo ma grande errore  
di discretizzazione

$h$  piccolo

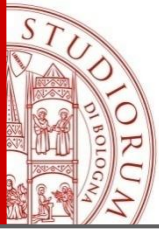
dispendio di calcolo ma  
maggior accuratezza

Determinare il più grande incremento del passo  $h$  in modo tale che l'errore di discretizzazione, dopo aver eseguito un passo con tal incremento, rimanga ancora al di sotto di una certa tolleranza



# Adattività del passo

- Essendo ad un passo, i metodi Runge-Kutta ben si prestano al cambio del passo di integrazione  $h$ , purchè si disponga di uno stimatore efficiente dell'errore locale commesso al singolo passo.
- Strategie per la stima dell'errore locale di troncamento
  - 1) utilizzando lo stesso metodo Runge-Kutta con due passi diversi (tipicamente  $2h$  e  $h$ );
  - 2) impiegando contemporaneamente due metodi Runge-Kutta di ordine diverso, ma con lo stesso numero  $m$  di stadi.



# Stima dell'errore LT

## 2. Strategia con ordini diversi

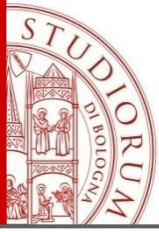
Utilizziamo simultaneamente **due metodi RK a  $m$  e  $m^*$  stadi**, di **ordine  $p$  e  $p+1$**  rispettivamente, che presentino lo **stesso insieme di valori  $K_i, i=1,\dots,m$**

Si assume la seguente stima dell'ELT:

$$\tau_n \cong \frac{u_{n+1} - \widehat{u}_{n+1}}{h}$$

$u_{n+1}$  : metodo di *ordine  $p$*  ad  $m$  stadi

$\widehat{u}_{n+1}$  : metodo di *ordine  $p+1$*  a  $m^*$  stadi



# Verifica

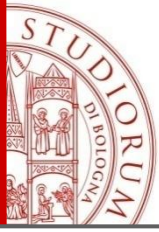
$$u_{n+1} = u_n + h_n \Phi(x_n, u_n, f_n; h) \quad \text{Ordine } p, \text{ errore locale di troncamento } \tau_n$$

$$\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + h_n \hat{\Phi}(x_n, \hat{u}_n, f_n; h) \quad \text{Ordine } p+1, \text{ errore locale di troncamento } \hat{\tau}_n$$

Supponiamo

$$u_n = \hat{u}_n = y(x_n) \quad \longleftarrow \quad \text{Soluzione analitica uscente dal punto } x_n.$$

$$\begin{aligned} O(h^p) \quad \tau_n &= \frac{1}{h} [y(x_{n+1}) - u_{n+1}] = \frac{1}{h} [y(x_{n+1}) - \hat{u}_{n+1}] + \frac{1}{h} [\hat{u}_{n+1} - u_{n+1}] = \\ &= \hat{\tau}_n + \frac{1}{h} [\hat{u}_{n+1} - u_{n+1}] \\ O(h^{p+1}) \end{aligned}$$



# Adattività del passo: algoritmo

Fissata una tolleranza  $\varepsilon$

Ad ogni passo:

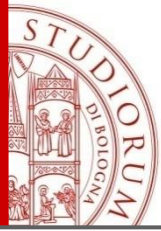
- calcolo

$$\hat{u}_{n+1}, u_{n+1}$$

- stima errore locale di troncamento  $\tau_n \approx \frac{1}{h} [\hat{u}_{n+1} - u_{n+1}]$

- Se  $|\tau_n| > \varepsilon$  allora  $u_{n+1}$  non è accettato,  
diminuisce il passo  $h$ , ricalcolo,

- Altrimenti,  $u_{n+1}$  accettato si prosegue



# Metodo RKF45:

## Runge-Kutta Fehlberg del 4° ordine

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	0	0	0	0
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$	0	0	0
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	0
<b>RK 4</b>	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
<b>RK 5</b>	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
	$\frac{1}{360}$	0	$-\frac{128}{4275}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{55}$

Runge-Kutta del 4° ordine accoppiato con uno schema del 5° ordine, stesso numero di stadi:

routine con passo adattivo con controllo automatico dell'ELT. Per questo motivo è noto come

**RKF45**

**b**

**b1**

**E=b-b1**

**Attenzione: l'esistenza di punti di singolarità nella soluzione sono segnalati dalla presenza di passi eccessivamente piccoli**

**RK23**

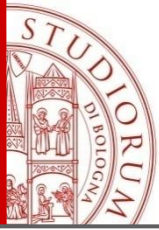
# Problemi stiff

**STIFF**: Indica una sorta di mal condizionamento capace di rendere instabili quasi tutti i metodi alle differenze visti

Un sistema ODE e' detto **stiff** se, approssimato con un metodo numerico caratterizzato da una regione di assoluta stabilita' di estensione finita, **obbliga** quest'ultimo, per ogni condizione iniziale per la quale il problema ammetta soluzione, **ad utilizzare un passo di discretizzazione eccessivamente piccolo** rispetto a quello necessario per descrivere ragionevolmente l'andamento della soluzione esatta.



Consideriamo per questi problemi metodi caratterizzati da una zona "larga" di assoluta stabilita'



# Come individuare un Problema stiff

- Sistema di ODE lineari a coefficienti costanti

$$y'(x) = Ay(x) + \phi(x) \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \phi \in \mathbb{R}^m$$

- Supponiamo che **A** abbia **m autovalori distinti**
- Soluzione

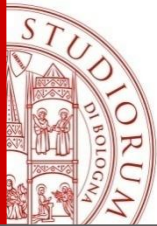
$$y(x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{\lambda_j x} v_j + \psi(x)$$

$c_1, c_2, \dots, c_m$  costanti

$\{v_j\}$  base formata da autovettori di A associati ai  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, m$

$\psi(x)$  soluzione particolare della ODE.





# Esempio

- Problema 1

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin(x) \\ 2(\cos(x) - \sin(x)) \end{pmatrix}$$

**condizioni iniziali**  $\begin{pmatrix} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 3 \end{pmatrix}$

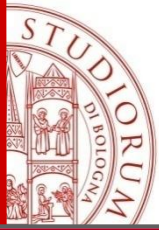
- Problema 2

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin(x) \\ 999(\cos(x) - \sin(x)) \end{pmatrix}$$

**condizioni iniziali**  $\begin{pmatrix} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 3 \end{pmatrix}$

***Stessa soluzione:***

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = 2e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$



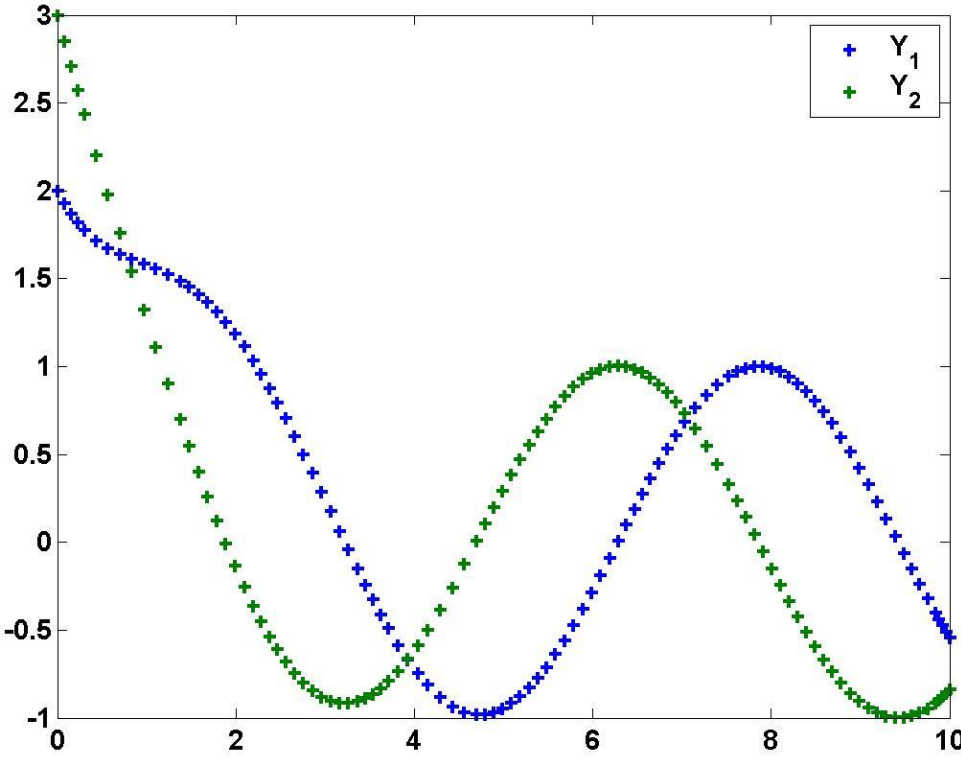
# Soluzione numerica

- Problema 1
- Metodo RK ordine 45  
Con passo adattivo con  $\text{toll}=0.01$ , in  $[0,10]$ .
  - **25** passi
  - **169** valutazioni di funzione
- Metodo implicito ordine 4
  - **41** passi
  - **90** valutazioni
- Problema 2
- Metodo RK ordine 45  
Con passo adattivo con  $\text{toll}=0.01$ , in  $[0,10]$ .
  - **3015** passi
  - **18769** valutazioni di funzione
- Metodo implicito ordine 4
  - **48** passi
  - **112** valutazioni

Con passo fissato  $h=0.1$ : non otteniamo soluzione (overflow)

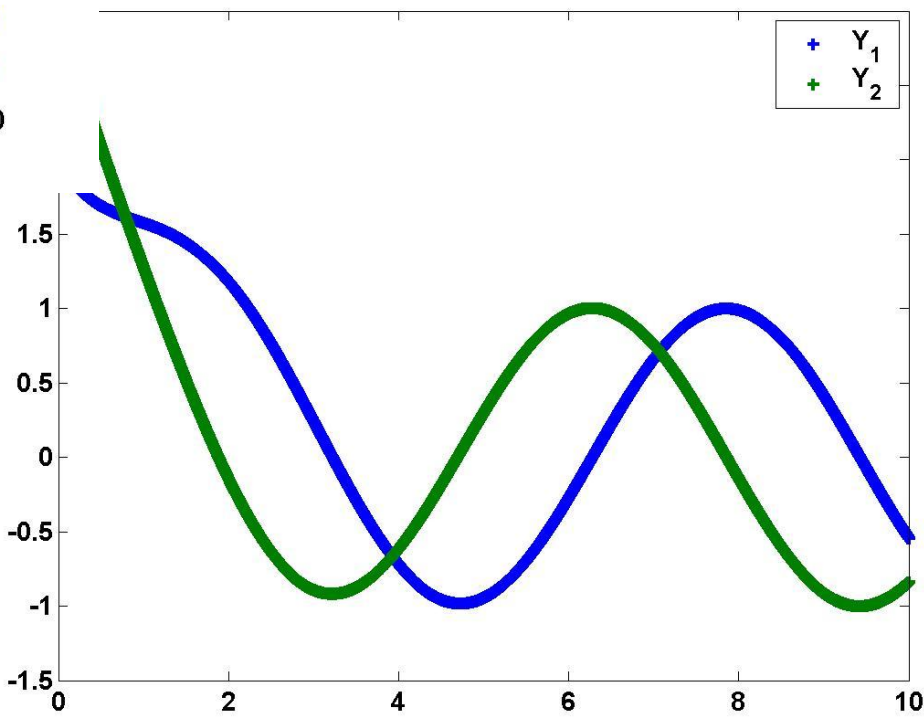
# Problema 1

ode45 hmin=0.039663

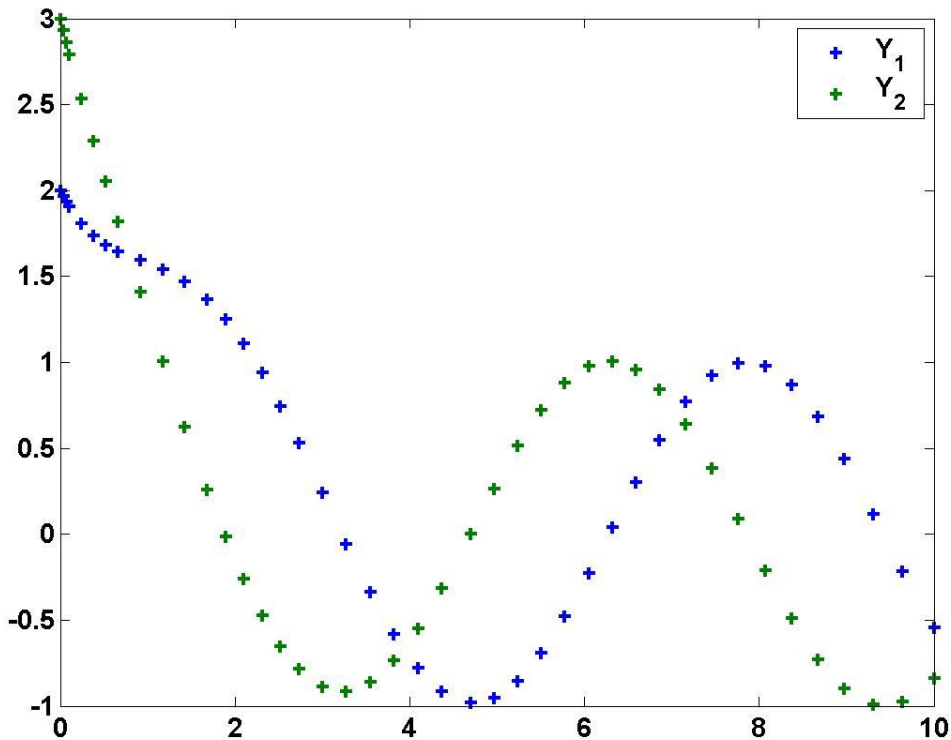


# Problema 2

ode45 hmin=0.00056656



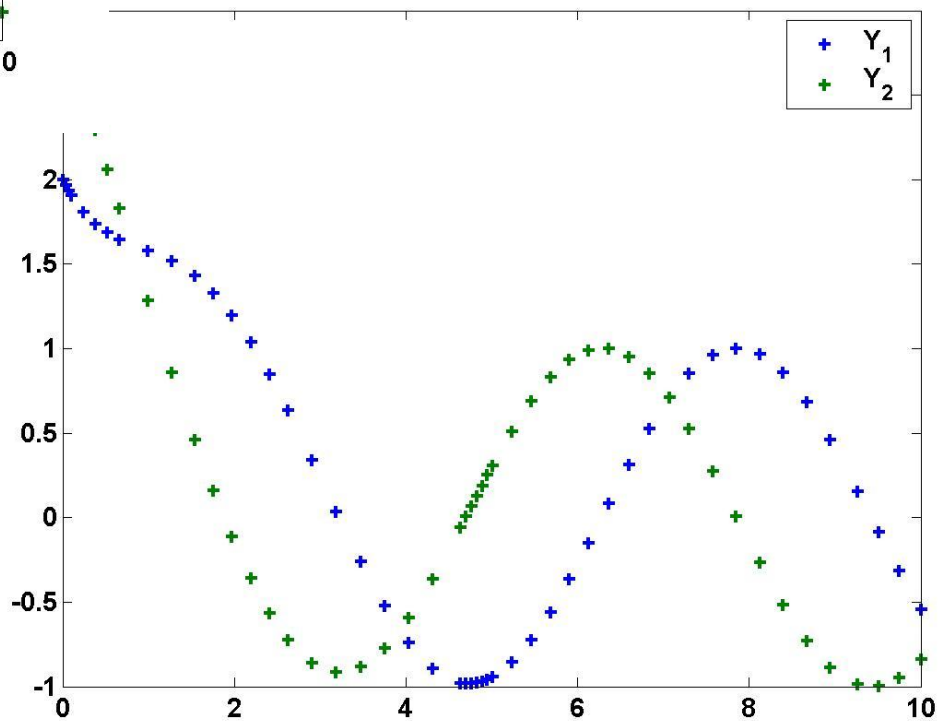
ode13s hmin=0.035777



# Problema 1

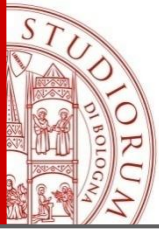


ode13s hmin=0.035777



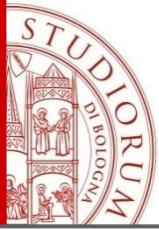
# Problema 2





# Osservazioni

- Il fenomeno che si presenta è una sorta di mal condizionamento noto come **STIFFNESS**
- Il problema 2 è detto stiff, mentre il problema 1 è non stiff.
- Non è una proprietà dipendente dalla soluzione, è una proprietà del sistema stesso.



# Come individuare un Problema stiff

Soluzione generale

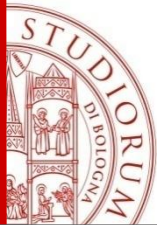
$$y(x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{\lambda_j x} v_j + \psi(x)$$

Nell'esempio

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-1000x} \begin{pmatrix} 1 \\ -998 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

- $c_1$  e  $c_2$  sono costanti. Allora per  $x \rightarrow +\infty$  la soluzione  $y$  tende alla soluzione particolare  $\Psi$ , in quanto ciascuna delle soluzioni particolari  $e^{\lambda_j x}$  tende a zero per  $x$  tendente all'infinito.
- Una spiegazione può essere data in termini di teoria della stabilità.



**PROBLEMA 1** autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \{\lambda = -1, \lambda = -3\}$$

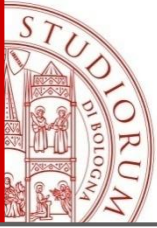
**PROBLEMA 2** autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \quad \{\lambda = -1, \lambda = -1000\}$$

**Metodo RK 45** ha intervallo di assoluta stabilità  $(-3,0)$ :

- per il **problema 1** si ha assoluta stabilità se  $-3 \cdot h \in (-3,0)$  quindi deve essere  $h < 1.0$
- per il **problema 2** si ha assoluta stabilità se  $-1000 \cdot h \in (-3,0)$  quindi deve essere  $h < 0.003$  e questo vincola notevolmente il passo.

**Metodo IMPLICITO 4 ordine** ha intervallo di assoluta stabilità che include il semiasse negativo del piano complesso, quindi  $h\lambda \in \mathbb{R}_a$  per ogni passo  $h$ , quando  $\lambda$  ha parte reale negativa.



# La natura della stiffness

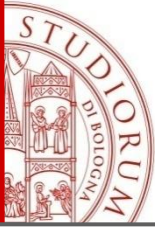
Soluzione:  $y(x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{\lambda_j x} v_j + \psi(x)$

Ipotesi:  $\text{Re } \lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$

Allora per  $x \rightarrow +\infty$  la soluzione  $y$  tende alla soluzione particolare  $\Psi$ , in quanto ciascuna delle soluzioni particolari  $e^{\lambda_j x}$  tende a zero per  $x$  tendente all'infinito.

- $\Psi$  soluzione del sistema allo **stato stazionario**  
(cioè per tempi infiniti)
- $a$  soluzione nello **stato transitorio** (per tempi finiti).



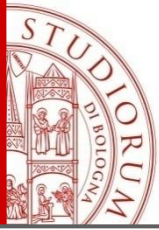


# La natura della stiffness

- Se  $|\operatorname{Re} \lambda_j|$  è grande allora  $\mathbf{a}$  decade velocemente e si ha un veloce transitorio
- Se  $|\operatorname{Re} \lambda_j|$  è piccolo allora  $\mathbf{a}$  decade lentamente e si ha un lento transitorio

Sia 
$$\operatorname{Re} \underline{\lambda} \leq |\operatorname{Re} \lambda_j| \leq \operatorname{Re} \bar{\lambda}$$

- Se siamo interessati a raggiungere la soluzione allo stato stazionario  $\Psi$  allora dobbiamo continuare ad integrare fino a che il più lento transitorio non sia trascurabile. **Più piccolo  $|\operatorname{Re} \underline{\lambda}|$  e più a lungo dovremo continuare ad integrare.**
- Se usiamo uno schema numerico con regione di assoluta stabilità ( $h^* \lambda \in \mathbb{R}_a$ ) e  $|\operatorname{Re} \bar{\lambda}|$  è grande allora il passo  $h$  dovrà essere molto piccolo per un periodo di tempo molto lungo per poter ottenere la soluzione stazionaria.
- **Allora il passo  $h$  risulta avere delle limitazioni che dipendono dal massimo modulo degli autovalori di  $A$ .**



# Come individuare un Problema stiff

Sembra quindi che si abbia stiffness quando:

$|\operatorname{Re} \underline{\lambda}|$  è molto piccolo

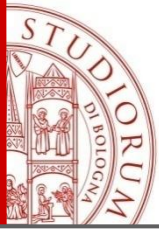
$|\operatorname{Re} \bar{\lambda}|$  è molto grande

Quoziente di stiffness

$$r_s = \frac{|\operatorname{Re} \bar{\lambda}|}{|\operatorname{Re} \underline{\lambda}|}$$

Un sistema di ODE lineare a coefficienti costanti e' **stiff** se gli autovalori della matrice A hanno tutti parte reale negativa e

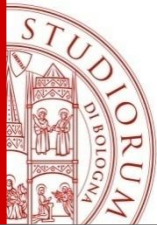
$$r_s \gg 1$$



# Metodi numerici per problemi stiff

---

- Nessun metodo condizionatamente assolutamente stabile risulta adatto per approssimare un problema stiff.
- Ciò rivaluta i metodi impliciti, multistep o Runge-Kutta, più costosi degli schemi espliciti, ma aventi regioni di assoluta stabilità infinite.



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**Serena Morigi**

Dipartimento di Matematica

[morigi@dm.unibo.it](mailto:morigi@dm.unibo.it)

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>