Interpolazione

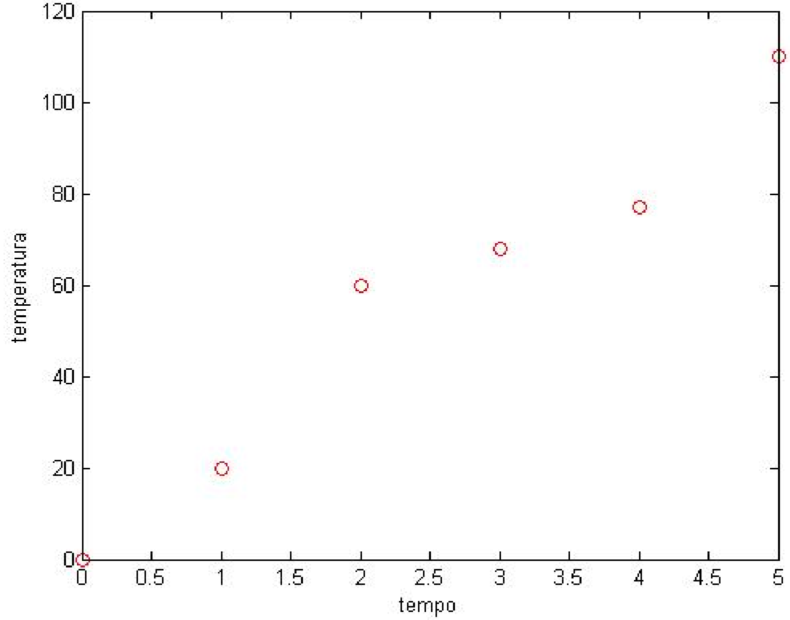
Metodi di interpolazione:

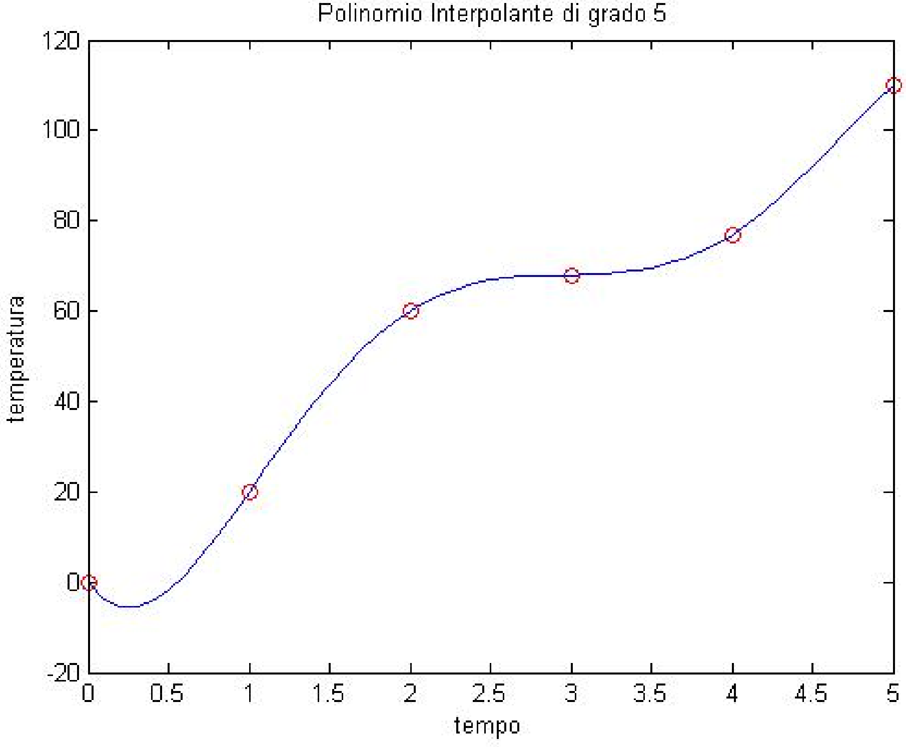
Interpolazione di Lagrange
Interpolazione di Newton
Interpolazione con polinomi a tratti/Spline

Esempio

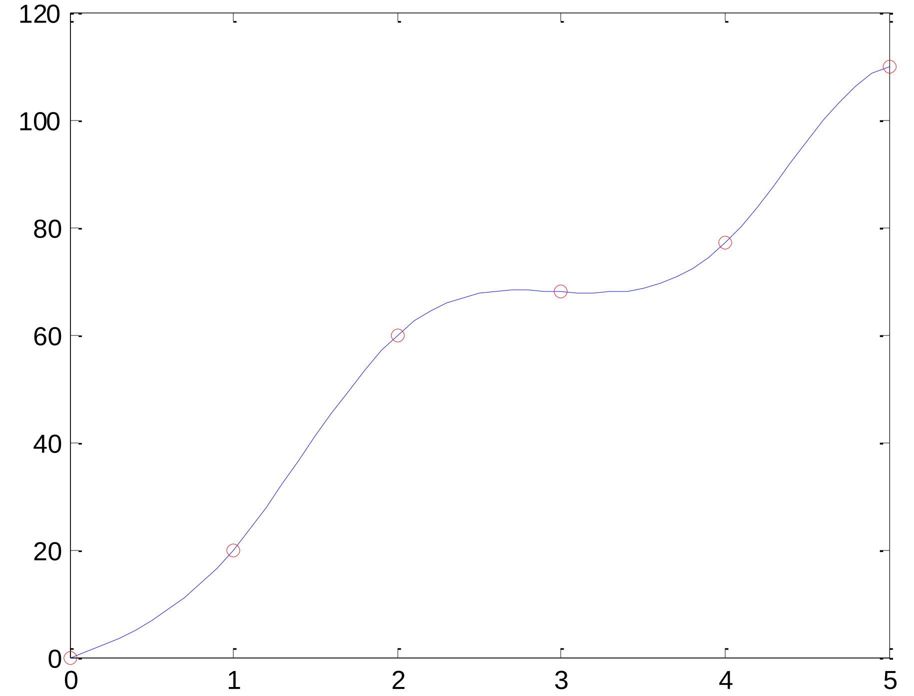
Tempo, sec	Temperatura, °F
0.0	0
1.0	20
2.0	60
3.0	68
4.0	77
5.0	110

- Misure di temperatura sulla testa di un cilindro in un nuovo motore che è messo a punto per un possibile uso in una macchina da corsa
- Determinare il modello (l'equazione analitica) che passi per questi dati esattamente
- Trovare l'istante di tempo nel quale si raggiunge la temperatura dei 75°





Polinomio di grado 3 a tratti

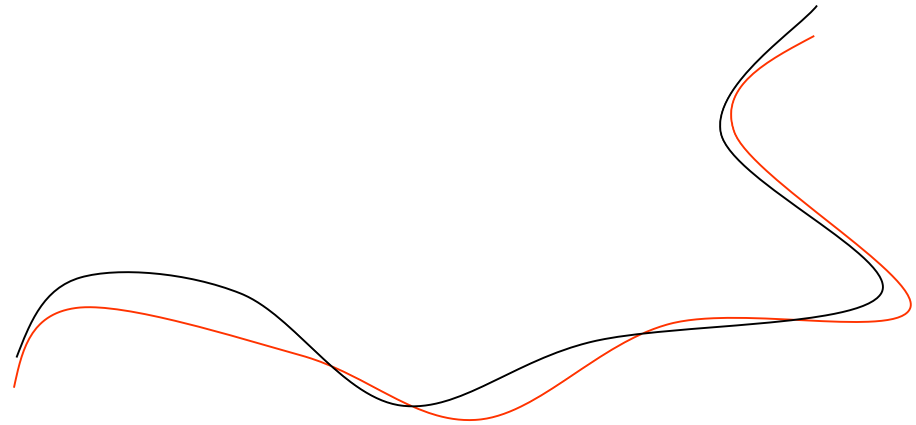


Approssimazione di dati e funzioni

Cosa vogliamo approssimare?

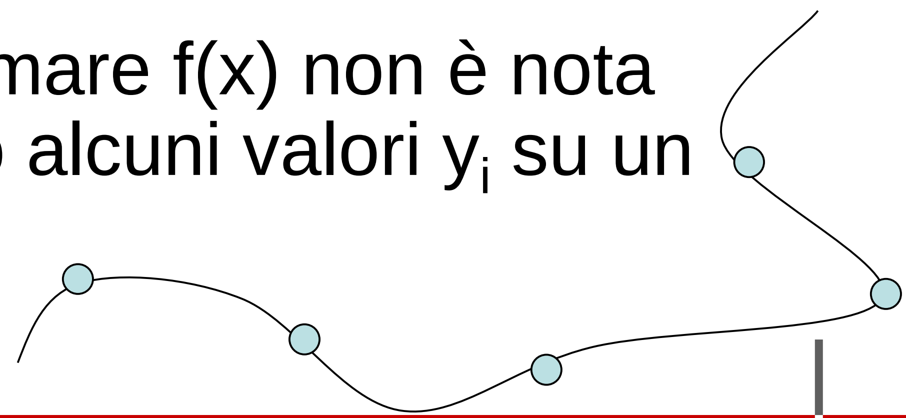
- La funzione è nota in forma analitica ma è una funzione complicata

$$\varphi(x_i) = f(x_i)$$



- La funzione da approssimare f(x) non è nota ma di essa si conoscono alcuni valori y_i su un insieme di punti x_i

$$\varphi(x_i) = y_i$$



- L'*approssimazione* di funzioni consiste nel determinare una funzione $\Phi(x)$, appartenente ad una classe prescelta di funzioni, che meglio approssima una funzione data $f(x)$.

- Nel caso *discreto*, che esamineremo qui, la funzione $f(x)$ è nota su un insieme di n+1 *nodi* $x_0, x_1,\ldots,x_n$, appartenenti ad un intervallo $[a,b]$. Questo è un caso caratteristico dell'analisi di dati sperimentali: talvolta il numero $n + 1$ di dati disponibili è piccolo, come nello studio di certi fenomeni fisici o biologici, talvolta è elevato, come nelle analisi statistiche. Si può anche supporre che i valori $f(x_i)$, in particolare quando sono rilevati in laboratorio, siano affetti da errori di misura.
- Nel caso *continuo*, La funzione $\Phi(x)$ che si costruisce serve per approssimare valori della $f(x)$ in punti diversi dai nodi o per dedurne proprietà di comportamento.

Problema di Interpolazione

Costruire una funzione che passi per tutti i punti assegnati.

Dati i punti **(x_i,y_i), $i=0,..,n$** con

$$x_i \in R^m, m \geq 1, \quad x_i \neq x_j, per\ i \neq j$$

E una famiglia di funzioni

$$\varphi(x; a_0,..,a_n) = y$$

(modello matematico)

Si cercano i valori **$a_0,..a_n$** (parametri o gradi di libertà) tali che

$$\varphi(x_i; a_0,..,a_n) = y_i \quad i = 0,..,n$$

Modello matematico

- **Interpolazione lineare**

$$\varphi(x;a_0,..,a_n)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+..+a_n\varphi_n(x)$$

- **Interpolazione polinomiale**

$$\varphi(x;a_0,..,a_n)=a_0+a_1x+..+a_nx^n$$

- Interpolazione trigonometrica

$$\varphi(x;a_0,..,a_n)=a_0+a_1e^{xi}+a_2e^{2xi}..+a_ne^{nxi} \qquad i=\sqrt{-1}$$

- **Interpolazione polinomiale a tratti/spline**

- Interpolazione razionale

$$\varphi(x;a_0,..,a_n,b_0,..,b_m)=\frac{a_0+a_1x+..+a_nx^n}{b_0+b_1x+..+b_mx^m}$$

Interpolazione **lineare**

La funzione interpolante soddisfa le condizioni di interpolazione nei punti assegnati **(x_i,y_i), $i=0,..,n$** :

$$\Phi(x_i;a_0,..,a_n)=y_i \quad i=0,..,n$$

Poiché la funzione interpolante è lineare, la possiamo scrivere nella forma

$$a_0\varphi_0(x_i)+a_1\varphi_1(x_i)+..+a_n\varphi_n(x_i)=y_i \quad i=0,..,n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i)=y_i \quad i=0,..,n$$

..in forma matriciale

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = y_i \quad i = 0,..,n$$

$$Aa = y$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & & & \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dove la matrice A ha elementi $\varphi_j(x_i)$ e **a** è il vettore dei parametri incogniti dell'interpolante.

Nel caso di interpolazione polinomiale, allora

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \dots, \varphi_n(x) = x^n,$$

Risolubilità del problema di interpolazione polinomiale

TEOREMA

Dati gli n+1 punti di interpolazione DISTINTI

$$(x_i, y_i), i = 0,..,n, \quad x_i \neq x_j, per\ i \neq j$$

esiste ed è unico il polinomio di grado al più n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

che verifica le condizioni di interpolazione

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0,..,n$$

Risolubilità del problema di interpolazione

DIMOSTRAZIONE

Le condizioni di interpolazione $p(x_i) = y_i, \quad i = 0,..,n$

costituiscono un sistema lineare di ordine n+1

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

che si scrive nella forma **Aa=y**

A è la matrice di Vandermonde di elementi x_i^j

Risolubilità del problema di interpolazione polinomiale

DIMOSTRAZIONE (continua)

Poichè $\det(A) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j)$, e i punti x_i sono distinti, allora A è non singolare.

Allora il sistema ha una ed una sola soluzione. #

La soluzione del sistema lineare è il vettore **a** dei coefficienti del polinomio interpolante p(x).

Interpolazione polinomiale nella base delle potenze

-Se si utilizza la base delle potenze per rappresentare il polinomio interpolante

$$p_n(x) = a_0 + xa_1 + x^2 a_2 + .. + x^n a_n$$

- si deve risolvere un sistema lineare $Aa = y,\ A|_{ij} = x_i^j$ con matrice A (Vandermonde) dei coefficienti mal condizionata, specialmente per polinomi di grado elevato,
- costo soluzione sistema lineare è $O(n^3)$

Poichè per n+1 punti distinti passa uno ed un solo polinomio di grado n

Un cambio di base potrebbe fornire lo stesso polinomio interpolante per uno stesso insieme di dati magari ad un costo computazionale inferiore

Esempio

Popolazione degli Stati Uniti dal 1940 al 1990

```
>x=[1940    1950    1960    1970    1980    1990]';
>y=[131.7   150.7   179.0   205.0   226.5   248.7]';

>V=([ones(6,1)   x    x.^2   x.^3   x.^4   x.^5]);

>cond(V)
ans =

  5.8016e+025
```

Metodi di interpolazione polinomiale

- ***Interpolazione di Lagrange*** - un modo semplice ma oneroso di costruire il polinomio di interpolazione.
- ***Interpolazione di Newton*** – richiede differenze divise.

I due metodi producono due polinomi equivalenti, la differenza tra i due consiste nell’approccio per ottenere i coefficienti.

Interpolazione di Lagrange

Introduciamo in P_n un'opportuna base di funzioni:

$$\{L_i(x)\}_{i=0}^{n}$$

Ciascuna risolve un semplice problema di interpolazione

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & se \quad j \neq i \\ 1 & se \quad j = i \end{cases}$$

Il problema iniziale è risolto dal polinomio $p_n(x)$ di grado n:

$$p_n(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + \ldots + L_n(x)\, y_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

Interpolazione di Lagrange

Determiniamo le funzioni $\{L_i(x)\}_{i=0}^{n}$

Ciascuna ha grado al più n ed ha n zeri distinti, allora

$$L_i(x) = k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n) = k\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)$$

Valutiamo k considerando che $L_i(x_i) = 1$

$$L_i(x_i) = 1 = k\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j) \quad da\ cui\ k = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

quindi

$$\boxed{L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}, \quad i = 0,..,n}$$

Il numero di operazioni richieste per calcolare $p_n(x)$ in corrispondenza ad un valore x è dell'ordine di $O(n^2)$.

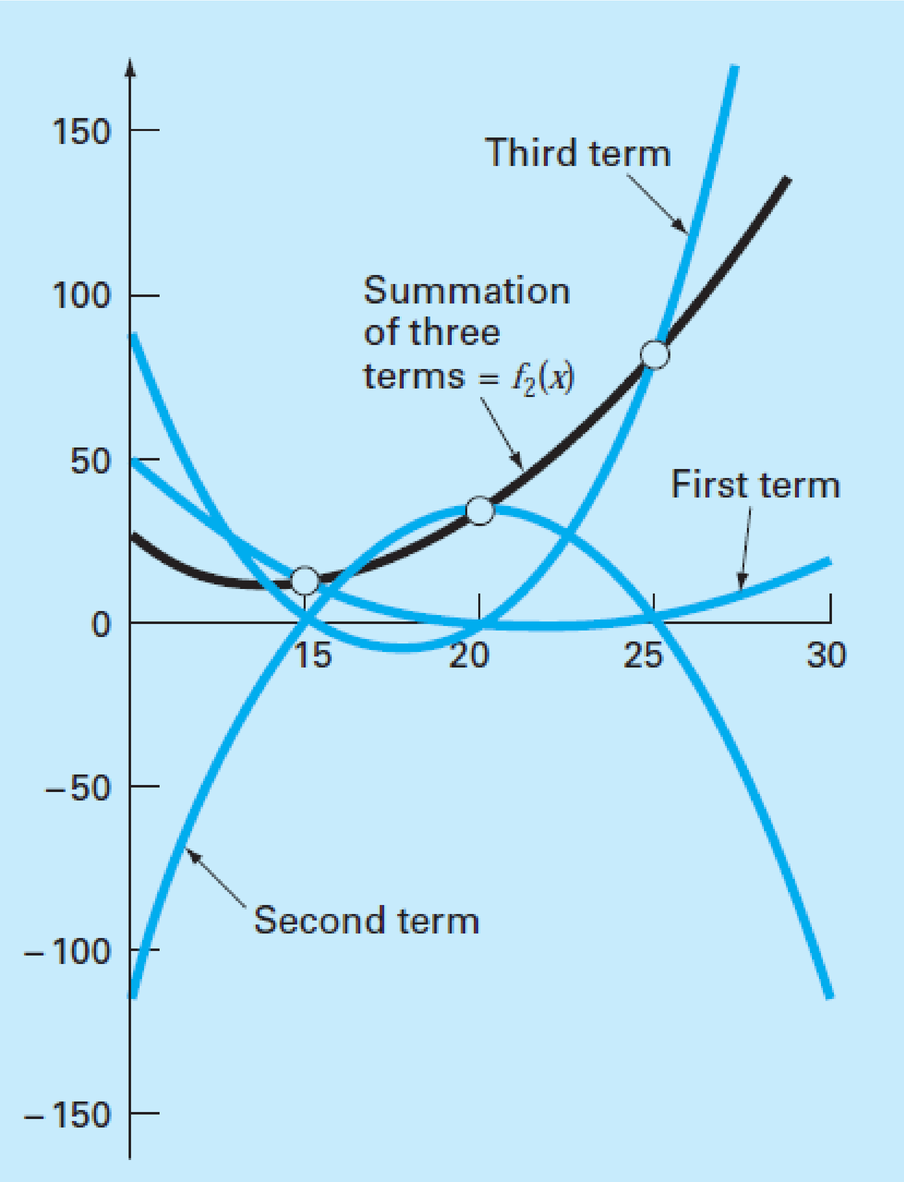
Esempio polinomio di Lagrange del secondo ordine

Ciascuno dei termini

$$\left\{ L_i \left(x \right) \right\}_{i=0}^{2}$$

passa per un punto dato ed è zero negli altri due.

La somma dei tre termini deve perciò essere l'unico polinomio di grado 2, $f_2(x)$, che passa esattamente attraverso I 3 punti.



Caso particolare n=1

Assegnati i punti $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$

Quali sono i coefficienti del polinomio di interpolazione lineare (grado 1)?

$$p_1(x) = L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \qquad p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

retta che passa per i due punti $\quad \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Esempio

Assegnati i punti

x	y
1,1	10,6
1,7	15,2
3	20,3

Quali sono i coefficienti del polinomio di interpolazione di secondo grado?

$$p_2\left(x\right) = L_0\left(x\right)y_0 + L_1\left(x\right)y_1 + L_2\left(x\right)y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(\mathrm{x}-1.7)(\mathrm{x}-3.0)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)} = \frac{(\mathrm{x}-1.7)(\mathrm{x}-3.0)}{\left(1.1-1.7\right)\left(1.1-3.0\right)} = \frac{1}{1.14}(x^2 - 4.7x + 5.1)$$

$$L_1(x) = \frac{(\mathrm{x}-1.1)(\mathrm{x}-3.0)}{\left(1.7-1.1\right)\left(1.7-3.0\right)} = -\frac{1}{0.78}(x^2 - 4.1x + 3.3)$$

$$L_2(x) = \frac{(\mathrm{x}-1.1)(\mathrm{x}-1.7)}{\left(3.0-1.1\right)\left(3.0-1.7\right)} = \frac{1}{2.47}(x^2 - 2.8x + 1.87)$$

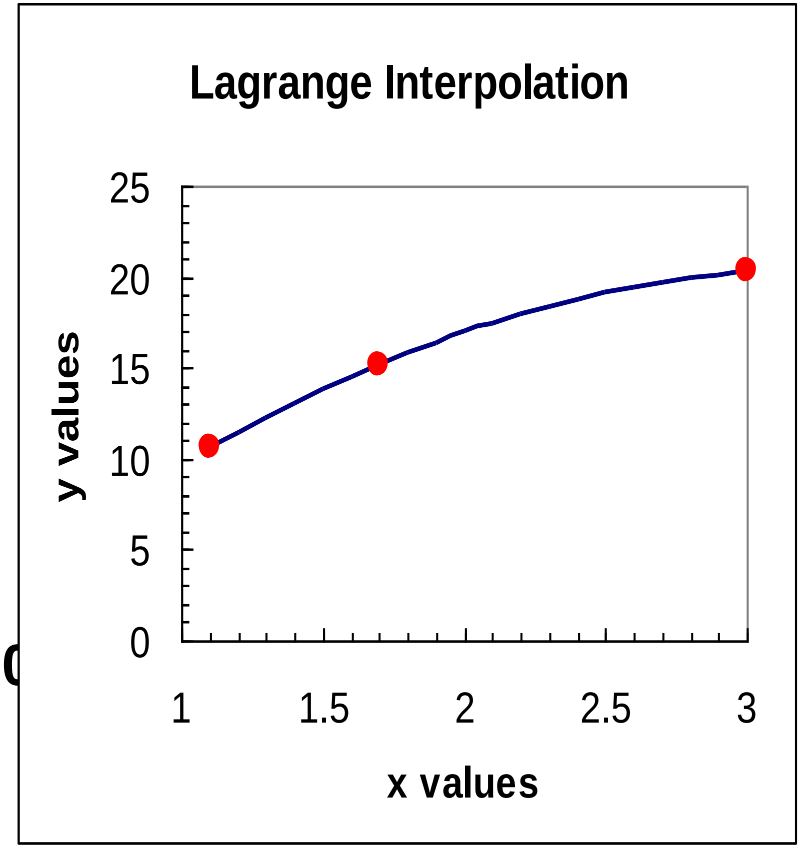
Esempio

$p(x) = 10.6*L_0(x) + 15.2*L_1(x) +$
$+ 20.3*L_2(x)$

È una parabola per i tre punti

Qual è il valore di $p_2(2.3)$?

$p(2.3) = 10.6*L_0(2.3) + 15.2*L_1(2.3) + 20$
= <u>18.3813</u>



Esempio

Cosa succede se incrementiamo il numero dei punti da interpolare?

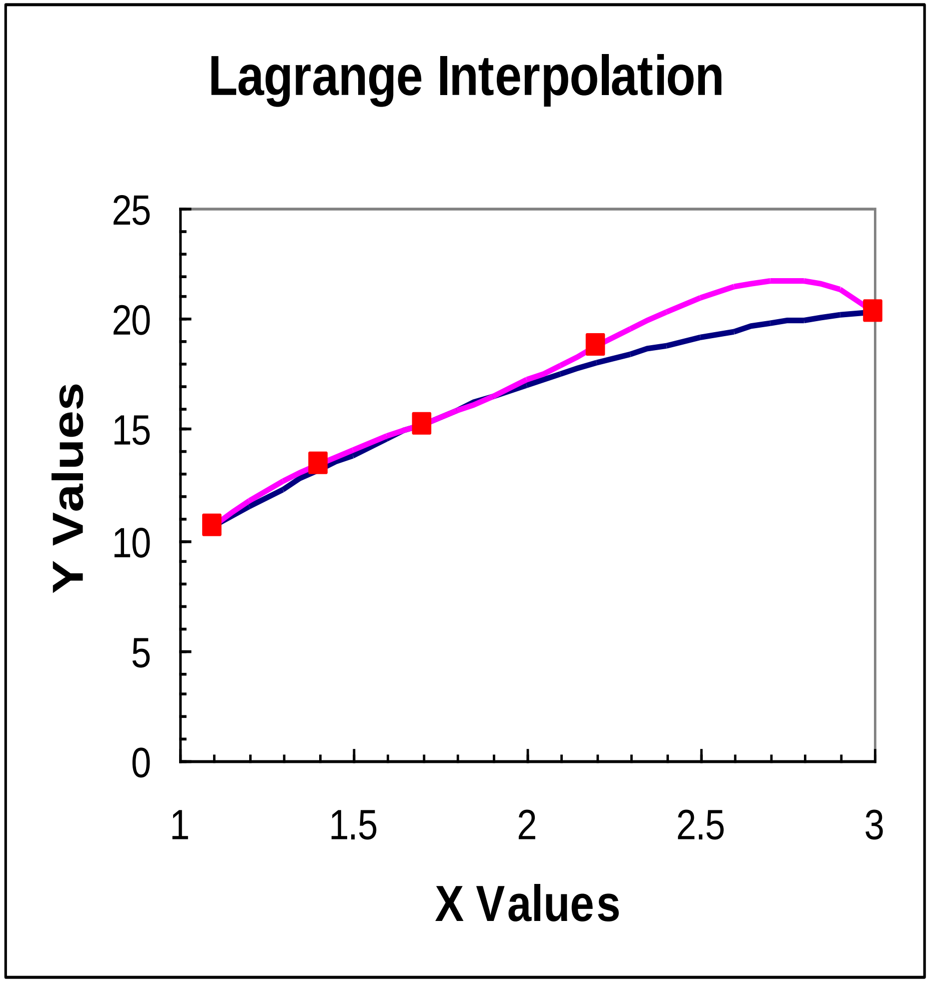
x	y
1,1	10,6
1,7	15,2
3	20,3
1,4	13,4
2,2	18,7

Dobbiamo ricalcolare tutti I polinomi $L_i(x)$

Esempio

Confronto tra l'originale polinomio $p_2(x)$ ed il nuovo polinomio $p_4(x)$

Aumentando il numero di punti, il grado del polinomio aumenta ma si creano delle oscillazioni nel grafico



Interpolazione di Newton

Vorremmo che il metodo permettesse di costruire facilmente il polinomio di interpolazione di n+1 punti a partire dal polinomio di interpolazione di un sottoinsieme di n punti

⇓

Interpolazione di Newton

Interpolazione di Newton

- Funzioni Base di Newton:

$$\phi_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \qquad j = 0,..,n$$

- Polinomio interpolante di Newton

$$p_n(x) = \underbrace{1}_{\phi_0} a_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{\phi_1} a_1 + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)}_{\phi_2} a_2 + .. + \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)}_{\phi_n} a_n$$

- Calcolo dei coefficienti a_i , i=0,..,n risolvendo il sistema lineare:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Aa = y & A|_{ij} = \varphi_j(x_i), \\ \varphi_j(x_i) = 0 \quad if & i < j \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & & & \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Esempio

- Sistema lineare di interpolazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

- Punti da interpolare $(-2,-27),(0,-1),(1,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

coefficienti
a=(-27,13,-4)

$$\sum_{j=0}^{2} a_j \phi_j(x_i) = y_i \quad i = 0,1,2$$

- Polinomio Interpolante

$$p(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

Metodo alternativo per il calcolo dei coefficient: differenze divise

Assegnati i valori della funzione f(x) nei punti $x_0, x_1, .., x_m$ distinti dell'asse reale la differenza divisa di f(x) rispetto agli argomenti x_0, x_1 è definita da

$$F[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = F[x_1, x_0]$$

DIFFERENZA DIVISA DI ORDINE 1

Differenze divise

DIFFERENZA DIVISA DI ORDINE 2

$$F[x_0, x_1, x_2] = \frac{F[x_0, x_1] - F[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

DIFFERENZA DIVISA DI ORDINE m

$$F[x_0, x_1, .., x_m] = \frac{F[x_0, .., x_{m-1}] - F[x_1, .., x_m]}{x_0 - x_m}$$

-La differenza divisa è simmetrica rispetto ai suoi argomenti
-La differenza divisa è un operatore lineare

Schema delle differenze divise

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0)=F[x_0] \searrow & & & & \\
x_1 & f(x_1)=F[x_1] \rightarrow & F[x_0,x_1] & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
x_2 & f(x_2)=F[x_2] \rightarrow & F[x_1,x_2] & \rightarrow & F[x_0,x_1,x_2] & \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
x_3 & f(x_3)=F[x_3] \rightarrow & F[x_2,x_3] & \rightarrow & F[x_1,x_2,x_3] & \\
 & \searrow & & & & \\
.. & .. & .. & & .. & .. \\
 & \searrow & & & & \\
x_m & f(x_m)=F[x_m] \rightarrow & F[x_{m-1},x_m] & & F[x_{m-2},x_{m-1},x_m] \quad .. & F\left[x_0,\ldots,x_m\right]
\end{array}
$$

Differenze divise

- **Teorema del valor medio di Lagrange**

  Sia $f \in C^1[a,b]$ allora $\exists \xi \in [a,b]$ per cui

  è soddisfatta la seguente:

$$F[a,b] = \frac{f(\mathrm{b}) - f(a)}{b-a} = f^{'}(\xi)$$

- Sia $f \in C^n[a,b]$ e siano distinti in [a,b] i punti $x_0,x_1,..,x_m$, allora $\exists \xi \in [a,b]$ per cui

  è soddisfatta la seguente:

$$F[x_0,\dots,x_m] = \frac{f^{n}(\xi)}{n!}$$

TEOREMA
costruzione dell'interpolazione di Newton

Se $p_{n-1} \in P_{n\text{-}1}$ è il polinomio di interpolazione dei punti $(x_i, f(x_i)), i = 0,.., n-1$

allora la funzione

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) F[x_0, x_1,.., x_n]$$

è un polinomio di grado n che soddisfa

$$p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,.., n$$

Iterando la formula si ottiene la **forma di Newton**:

Interpolazione di Newton

Polinomio che soddisfa le condizioni di interpolazione di n+1 punti:

$$(x_i, f(x_i)), i = 0,..,n$$

$$p_n(x) = F[x_0] + (x - x_0)F[x_0, x_1] + .. + \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)F[x_0, x_1,.., x_n]$$

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + d_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$$

Esempio

Assegnati i punti

X	Y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

Quali sono i coefficienti del polinomio di interpolazione di quarto grado?

La funzione originale tra i punti dati è

$$\mathbf{f(x) = 2^x}$$

Esempio

X	Y	d	dd	ddd	dddd
0	1				
		$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-1}{1-0} = 1$			
1	2		$\dfrac{d_2 - d_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{2-1}{2-0} = 0.5$		
		$\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{4-2}{2-1} = 2$		$\dfrac{dd_2 - dd_1}{x_4 - x_1} = \dfrac{1-0.5}{3-0} = 0.1667$	
2	4		$\dfrac{d_3 - d_2}{x_4 - x_2} = \dfrac{4-2}{3-1} = 1$		$\dfrac{ddd_2 - ddd_1}{x_5 - x_1} = \dfrac{0.33-0.167}{4-0} = 0.04167$
		$\dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \dfrac{8-4}{3-2} = 4$		$\dfrac{dd_3 - dd_2}{x_5 - x_2} = \dfrac{2-1}{4-1} = 0.3333$	
3	8		$\dfrac{d_4 - d_3}{x_5 - x_3} = \dfrac{8-4}{4-2} = 2$		
		$\dfrac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} = \dfrac{16-8}{4-3} = 8$			
4	16				

Esempio

I coefficienti **d_j**$=F[x_0,x_1,..,x_j]$ sono definiti nella riga superiore dello schema triangolare

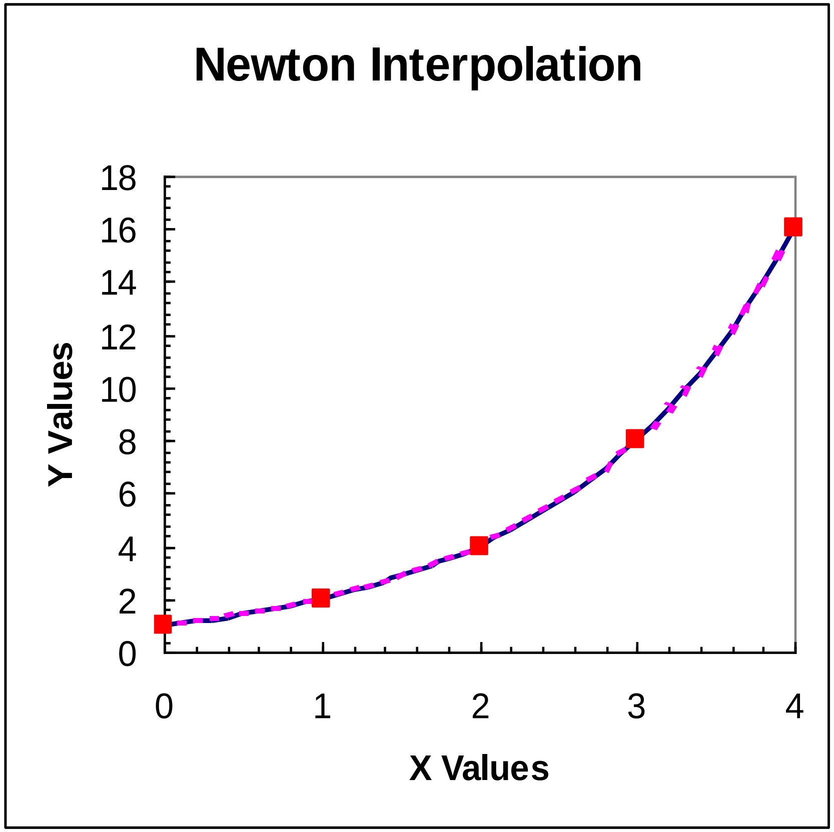
$$
\begin{aligned}
p_4(x) = f(x_0) &+ d_1 * (x - x_0) + d_2 * (x - x_0)(x - x_1) \\
&+ d_3 * (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&+ d_4 * (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = 1 + 1 * (x - 0) &+ 0.5 * (x - 0)(x - 1) \\
&+ 0.1667 * (x - 0)(x - 1)(x - 2) \\
&+ 0.042167 * (x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3)
\end{aligned}
$$

Esempio

p(x) = 1 + (x-0)
+0.5*(x-0)(x-1)
+0.1667*(x-0)(x-1)(x-2)
+0.04167*(x)(x-1)(x-2)(x-3)

p(2.3) = 1 + (2.3)
+ 0.5*(2.3)(1.3)
+ 0.1667*(2.3)(1.3)(0.3)
+ 0.04167*(2.3)(1.3)(0.3)(-0.7)
= <u>4.9183</u> (4.9246)



Valutazione di un polinomio: Ruffini-Horner

- Metodo di Ruffini-Horner per valutare un polinomio in un punto x
- Esempio $p(x) = 1 + x + 3x^2 - 6x^3$

  lo riscriviamo nella forma

  $$p(x) = 1 + x(1 + x(3 - 6x))$$
- [Algoritmo] input : **x**, vettore coefficienti d

  output: p valore del polinomio in x

$$\boxed{\begin{array}{l} p = d(n) \\ for \quad i = n-1 : -1 : 0 \\ \qquad p = p * x + d(i) \\ end \end{array}}$$

Valutazione di un polinomio: algoritmo **tipo** Ruffini-Horner

- Esempio

$$p(x) = 1 + (x-1) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2) + \frac{1}{7}(x-1)(x-2)(x-4)$$

lo riscriviamo nella forma

$$p(x) = 1 + (x-1)(1 + (x-2)(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}(x-4)))$$

- [Algoritmo] input : x, a vettore nodi, vettore coefficienti d

  output: p valore del polinomio in x

$$\boxed{\begin{array}{l} p = d(n) \\ for \quad i = n-1 : -1 : 0 \\ \qquad p = p * (x - x(i)) + d(i) \\ end \end{array}}$$

HornerN.m

Valutazione del polinomio di interpolazione di Newton

La formula di Newton

$$p_n(x) = d_0 + (x - x_0)d_1 + .. + \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)d_n$$

può essere scritta nella forma

$$p_n(x) = d_0 + (x - x_0)[d_1 + (x - x_1)[d_2 + ... + (x - x_{n-2})[d_{n-1} + (x - x_{n-1})d_n]..]]$$

$$d_0 = F[x_0] = f(x_0) \quad d_i = F[x_0, .., x_i], \quad i = 1, 2, .., n$$

per poter valutare il polinomio p(x) con un algoritmo tipo Ruffini-Horner (HornerN.m)

Algoritmo di Interpolazione di Newton

- Calcolare i coefficienti d_k del polinomio di Newton con l'algoritmo per le differenze divise

- Valutare il polinomio di Newton per ogni punto x nell'intervallo di visualizzazione utilizzando l'algoritmo di Horner opportunamente modificato

- Visualizza il polinomio di Newton e i punti interpolati (plot)

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{DIF.DIVISE} + \underbrace{n}_{HORNER} = \frac{n(n+3)}{2}$$

```
function c = InterpN(x,y)
% INPUT      interpolation points (x,y)
% OUTPUT   c:  a column n-vector with the property that  if
%       p(x) = c(1) + c(2)(x-x(1))+...+ c(n)(x-x(1))...(x-x(n-1))
%       p(x(i)) = y(i), i=1:n.
   n = length(x);
   for k = 1:n-1
      y(k+1:n) = (y(k+1:n)-y(k)) ./ (x(k+1:n) - x(k));
   end
   c = y;

function pval = HornerN(c,x,z)
% OUTPUT: pval:   a vector the same size as z with the property that if
%         p(x) = c(1) +  c(2)(x-x(1))+ ... + c(n)(x-x(1))...(x-x(n-1))
%         then pval(i) = p(z(i)) for i=1:m.
  n = length(c);
 pval = c(n)*ones(size(z));
 for k=n-1:-1:1
      pval = (z-x(k)).*pval + c(k);
 end
```

Il fenomeno di Runge

Non è in generale vero che
al crescere del numero dei punti di interpolazione e quindi anche del grado k del polinomio di interpolazione, la successione dei polinomi p_k converga a f(x), per nodi di interpolazione x_i equidistanti.

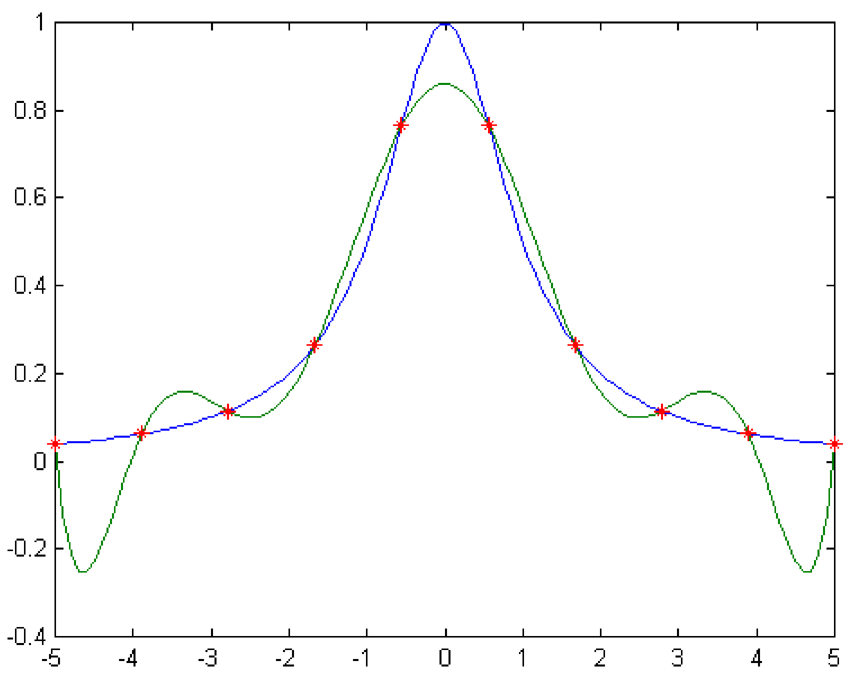
FUNZIONE DI RUNGE

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad [a,b] = [-5,5]$$

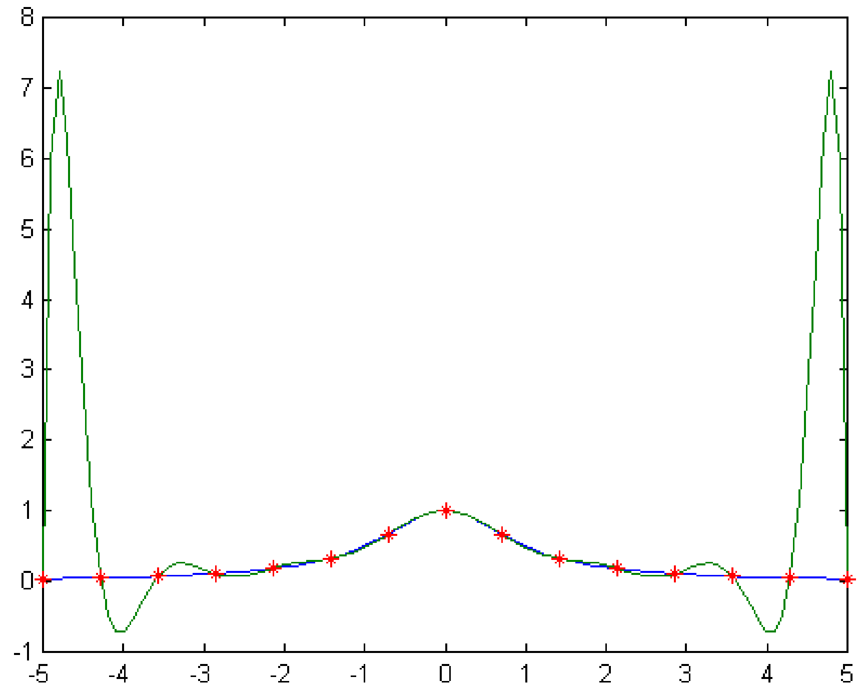
scegliamo punti di interpolazione EQUIDISTANTI

Il fenomeno di Runge

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad [a,b]=[-5,5]$$



Grado 9



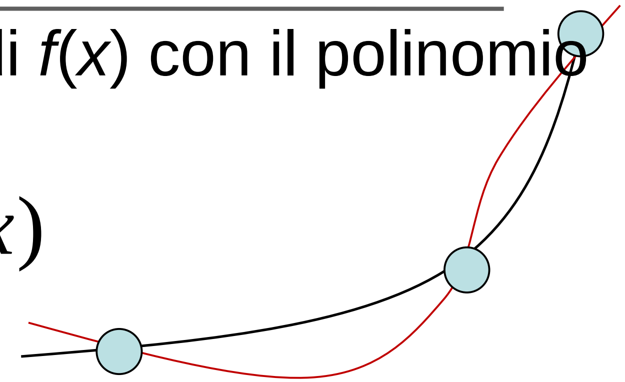
Grado 15

Punti equispaziati. L'errore aumenta all'estremità dell'intervallo

Errore di interpolazione

- Si definisce *resto* dell'interpolazione di $f(x)$ con il polinomio $p_n(x)$ la funzione

$$E(x) = f(x) - p_n(x)$$



- Il resto misura l'errore che si commette quando si approssima $f(x)$ con $p_n(x)$. $E(x)$ è nullo nei nodi x_i.
- **Teorema** **Rappresentazione dell'errore del poly interp. di ordine n**

Se $f \in C^{n+1}[a,b]$ allora esiste un punto $\xi \in (a,b)$, tale che

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\Pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

formula alternativa

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \simeq \Pi_n(x) F[x_0\ x_1\ x_2\ \ldots x_{n+1}]$$

Errore di interpolazione

- Da cosa dipende l'errore di interpolazione?
  - Regolarità della funzione
  - Disposizione dei punti di interpolazione sull'asse delle ascisse

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{\Pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

- Possiamo minimizzare l'errore?

Determinando i punti x_i in modo che risulti minimo, per qualunque x il termine

$$\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Polinomi di Chebychev

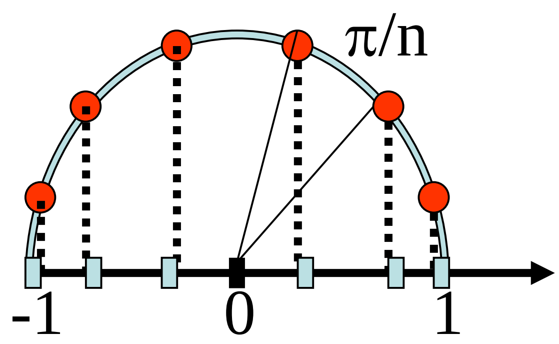
Formula ricorrente a tre termini:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_0(x)=1 \qquad T_1(x)=x \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \\ w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [a,b]\equiv[-1,1] \end{array}}$$

I nodi sono gli zeri $x_0,..,x_n$ reali del polinomio di Chebyshev di grado n+1 definito in [-1,1]:

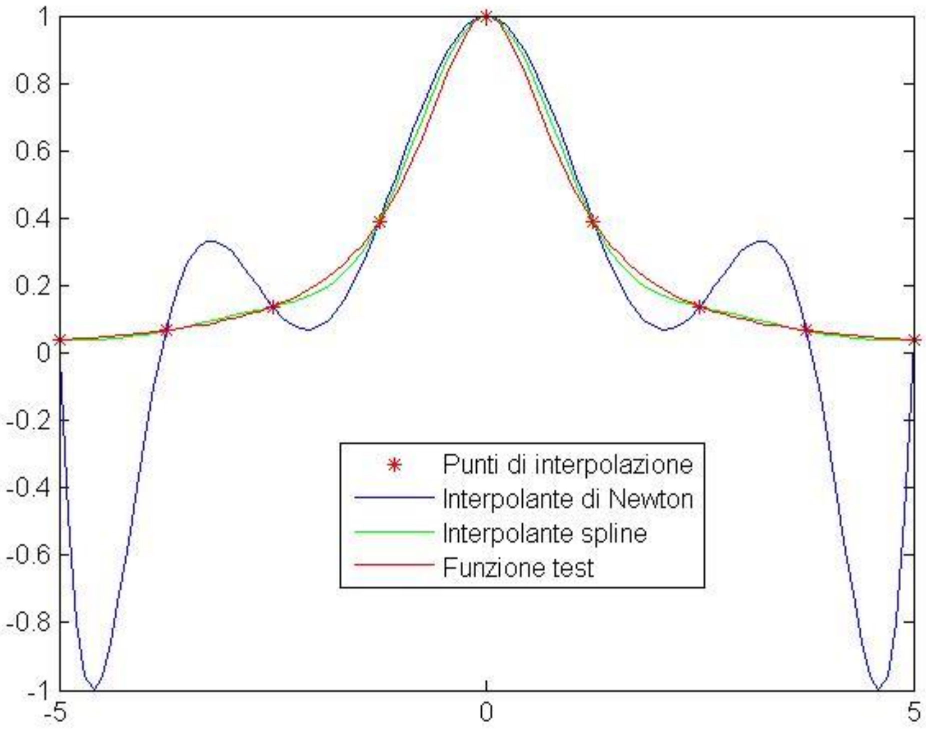
$$x_i=\cos\left[\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2(n+1)}\right]$$

$$i=0,..,n$$

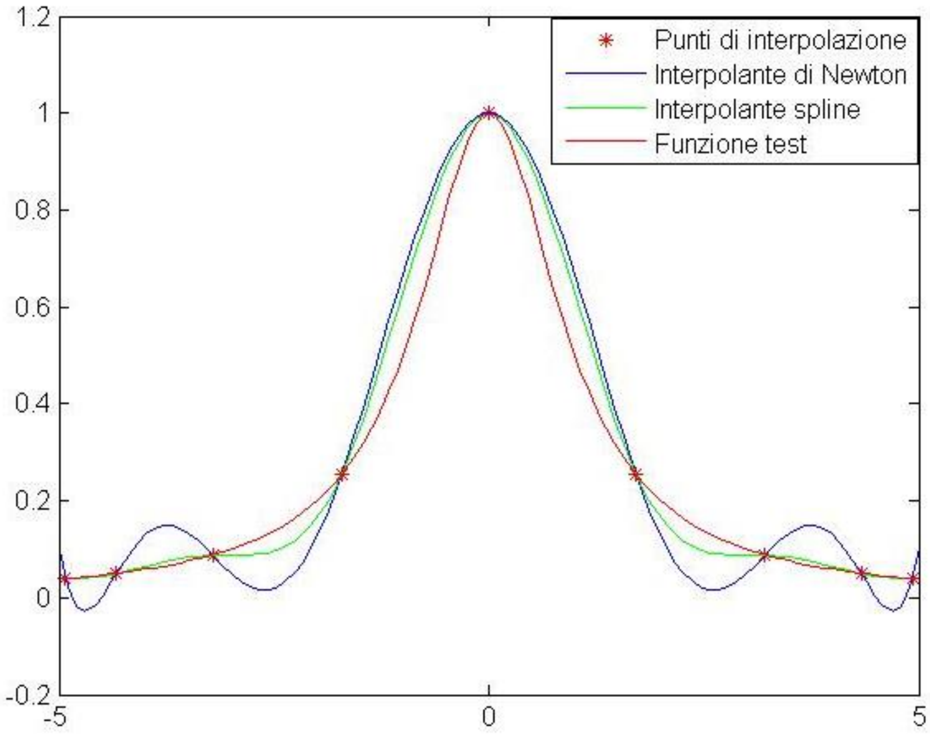


Il fenomeno di Runge

Punti equispaziati



Punti di Chebychev



$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad [a,b] = [-5,5]$$

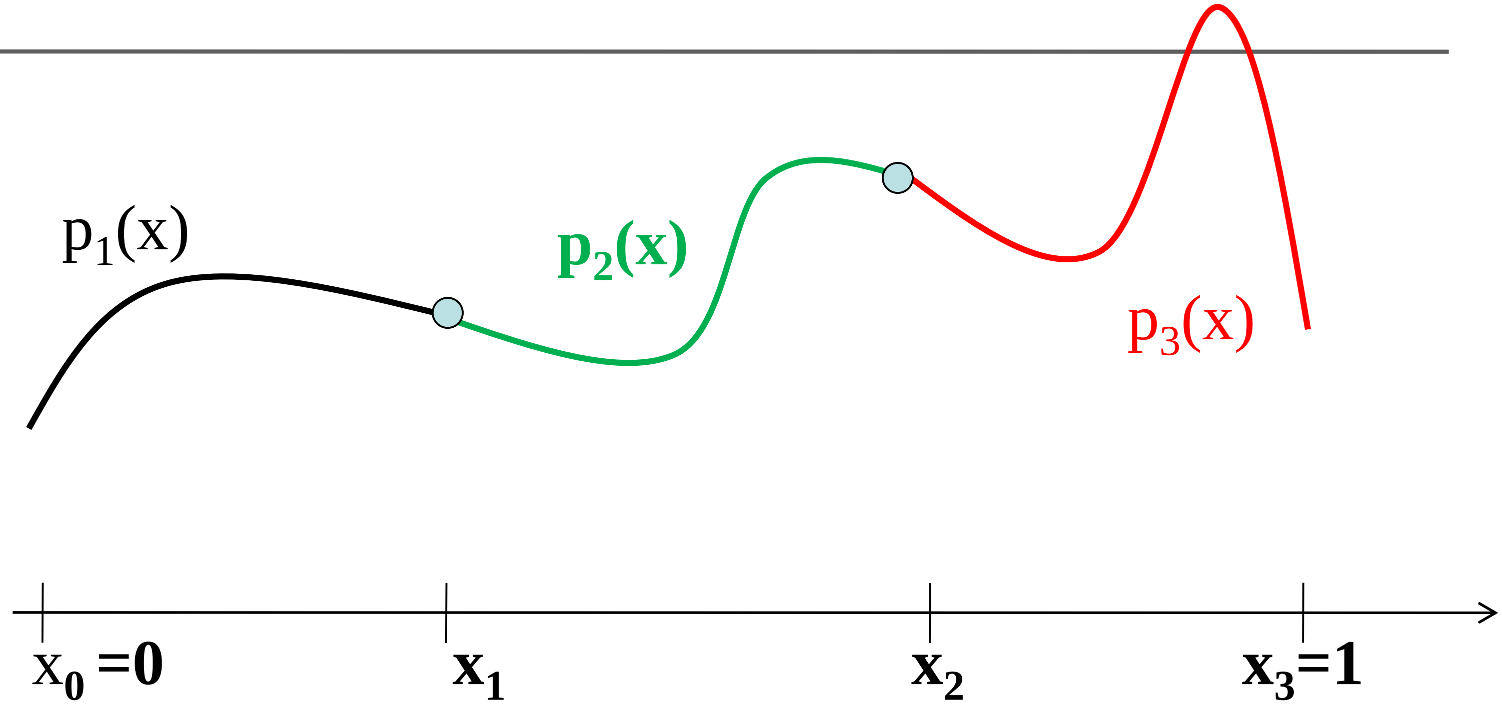
Dai polinomi
ai polinomi a tratti…..

- I polinomi sono funzioni regolari, facilmente calcolabili, con derivata ed antiderivata ancora in forma polinomiale, approssimano funzioni continue..

- I polinomi possono presentare la caratteristica di oscillare all'aumentare del grado;
- Buon comportamento su piccoli intervalli e grado basso (n <4,5);

- Si suddivide l'intervallo in tratti più piccoli e si lavora su questi con polinomi di grado relativamente basso;

Polinomi a tratti



p(x) è definito in [0,1] e consiste di 3 polinomi di grado n
I valori x_i sono detti **NODI**
I vari polinomi si uniscono nei nodi con continuità C^0

Interpolazione polinomiale a tratti

- Siano assegnate m+1 osservazioni y_i, $i=0,..,m$ nei punti (**NODI x_i**):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

- Un polinomio interpolante a tratti consiste di m polinomi di grado n<<m:

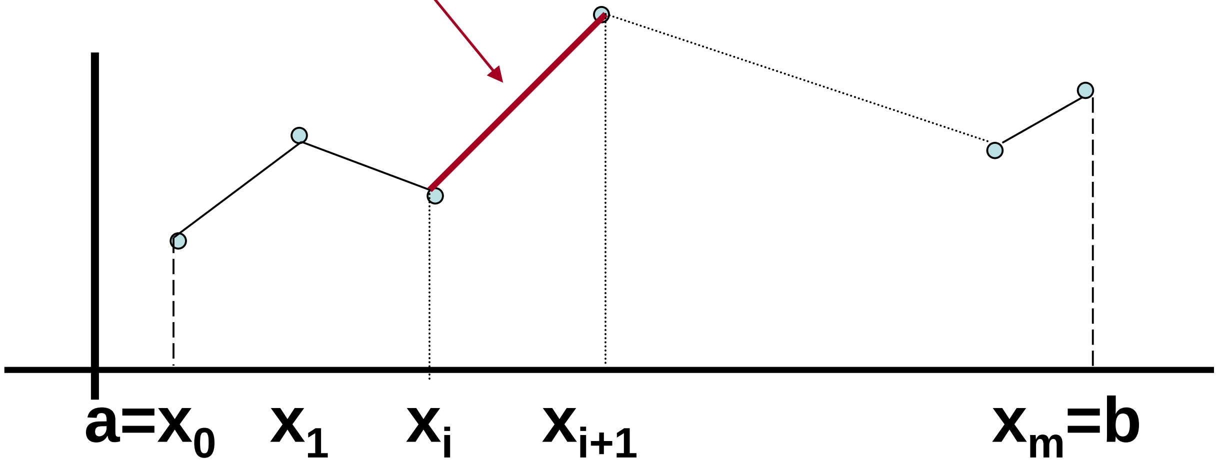
$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{m-1}(x),$$

$$p_i(x) \quad \text{definito} \quad \text{su} \quad [x_i, x_{i+1}]$$

$$\text{soddisfa} \quad p_i(x_i) = y_i \quad p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad i = 0, \ldots, m-1$$

Polinomi a tratti di interpolazione di grado 1

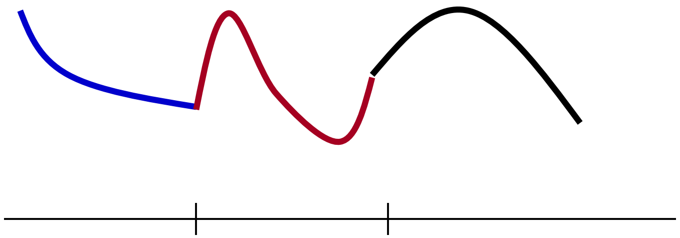
$$p(x) = p_i(x) = y_i + (x - x_i)\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



Polinomi a tratti di interpolazione

- Si è però persa un' importante proprietà:

  I polinomi a tratti non sono necessariamente funzioni regolari (C^1):



- ESEMPIO: se n=1, p(x) è funzione continua, ma p'(x) non è continua, assume un valore costante d_i

$$d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

su ogni sottointervallo, con salti nei nodi.

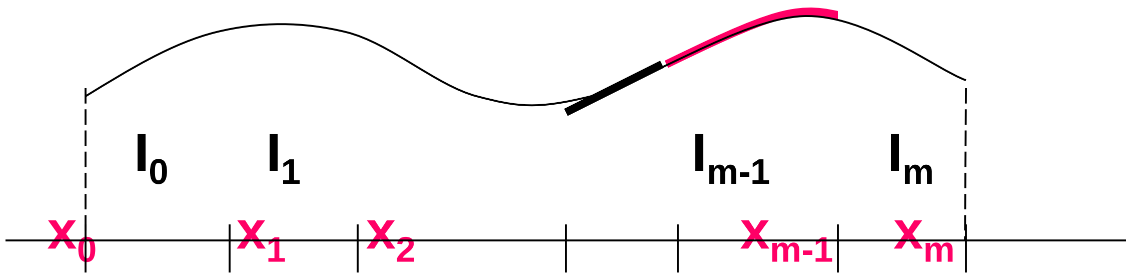
Funzione Spline s(x)

(polinomio a tratti con condizioni di massima regolarità nei nodi)

Definizione

Data la partizione di un intervallo [a,b]:

$$\mathrm{a} = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = \mathrm{b}$$

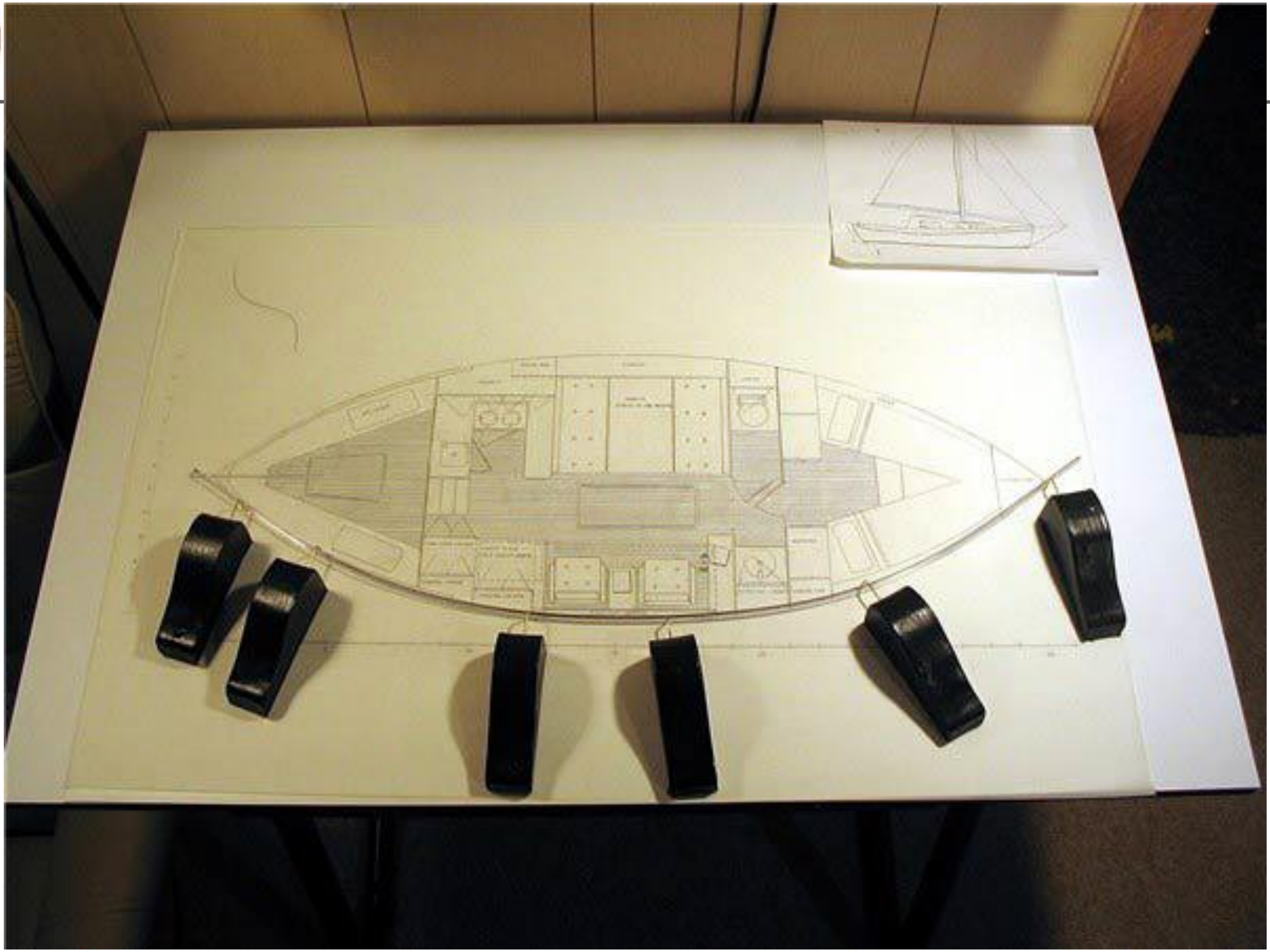


Si definisce spline di grado n una funzione s(x) tale che

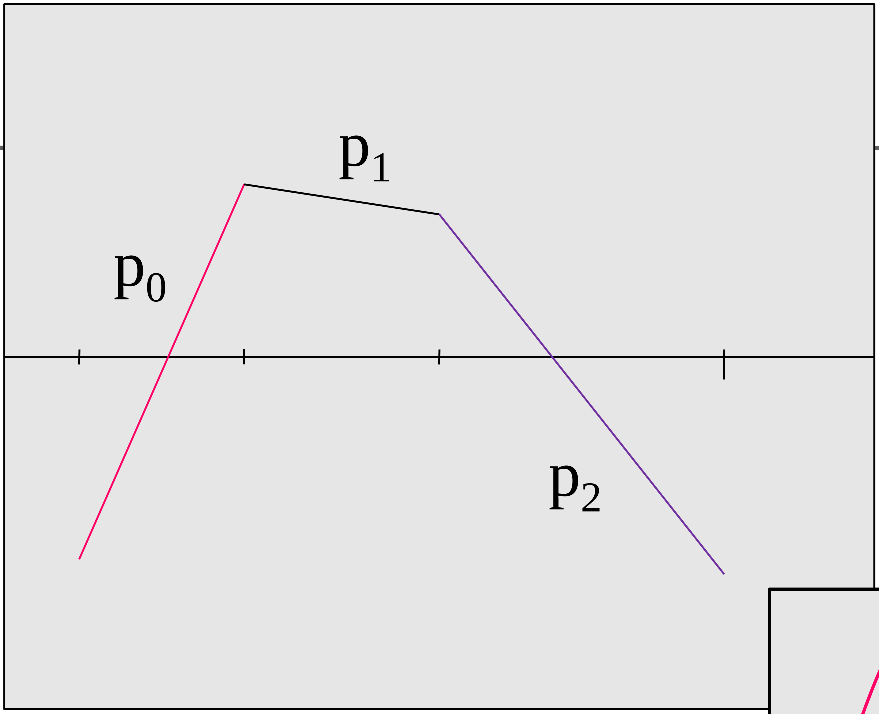
1. $s(x) \equiv p_j(x), \quad x \in I_j, \quad j = 0,..,m-1, \quad p_j(x) \in P_n$

2. $\textit{continuità nei nodi} \quad s(x) \in C^{n-1}:$

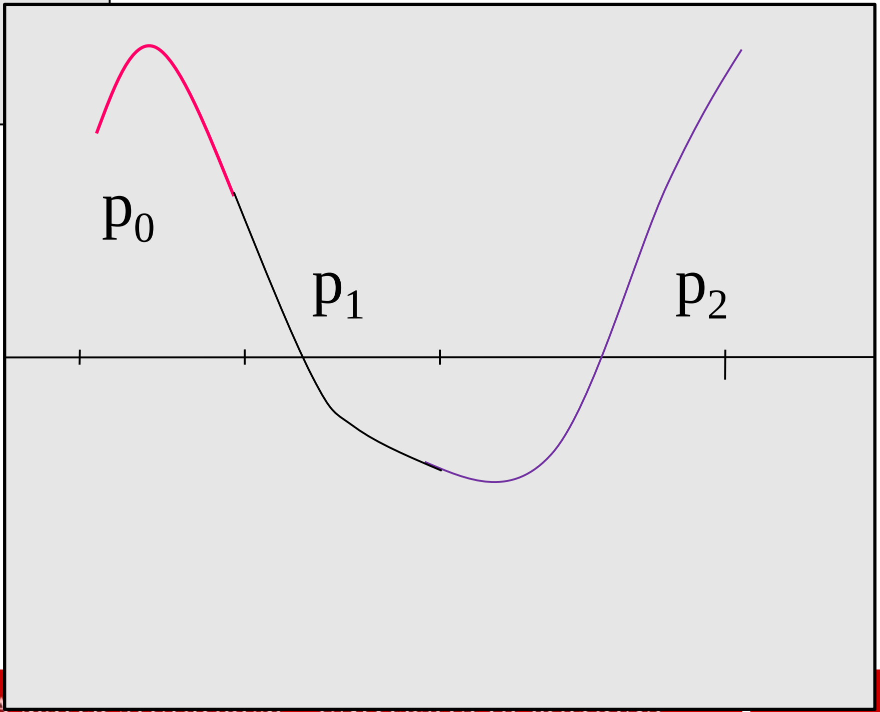
$$D^{(l)} p_{j-1}(x_j) \equiv D^{(l)} p_j(x_j), \quad l = 0,..,n-1, \quad j = 1,..,m-1.$$



Spline lineare n=1



Spline quadratica n=2



Sulla partizione: $[x_0, x_1, x_2, x_4]$

Interpolazione Spline cubica (di grado n=3)

Siano $(x_i,y_i)_{i=0,..,m}$ punti di interpolazione (x_i distinti).

Allora esiste una ed una sola spline s(x) cubica (n=3) che soddisfa le condizioni di interpolazione:

$$\boxed{s(x_i) = y_i \quad i = 0,..,\mathrm{m}}$$

e per cui si verifica una ed una sola delle seguenti condizioni 'al contorno':

$1) s'(x_0) = y_0' \quad s'(x_m) = y_m'$ derivata agli estremi

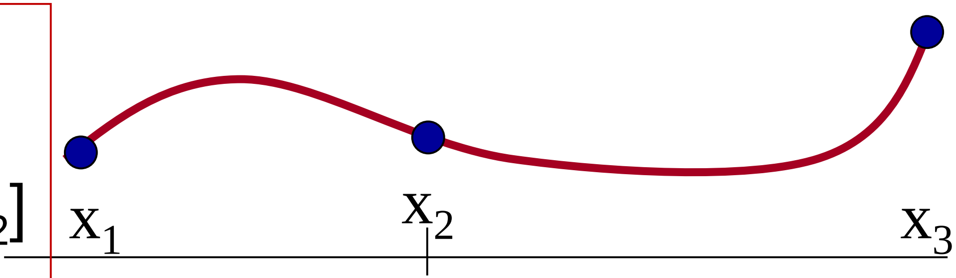
$2) s''(x_0) = 0 \quad s''(x_m) = 0$ naturale

$3) s(x_0) = s(x_m); \quad s'(x_0) = s'(x_m); \quad s''(x_0) = s''(x_m);$

$se\ y_0 \equiv y_m$ periodica

Esempio: interpolante spline cubica naturale

La funzione spline interpolante i dati (x_i,y_i), $_{i=1,..3}$ è definita da due polinomi cubici su intervalli $[x_1,x_2]$ e $[x_2,x_3]$ che si raccordano C^2 .



$$p_1(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \qquad p_2(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3$$

Risolvere il sistema 8 equazioni nelle 8 incognite a_i, b_i, i=1,4

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1^3 = y_1 \quad a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + a_4 x_2^3 = y_2 \\ b_1 + b_2 x_2 + b_3 x_2^2 + b_4 x_2^3 = y_2 \quad b_1 + b_2 x_3 + b_3 x_3^2 + b_4 x_3^3 = y_3 \\ a_2 + 2a_3 x_2 + 3a_4 x_2^2 = b_2 + 2b_3 x_2 + 3b_4 x_2^2 \\ 2a_3 + 6a_4 x_2 = 2b_3 + 6b_4 x_2 \\ 2a_3 + 6a_4 x_1 = 0 \quad 2b_3 + 6b_4 x_3 = 0 \end{cases}$$

Derivate seconde nulle agli estremi

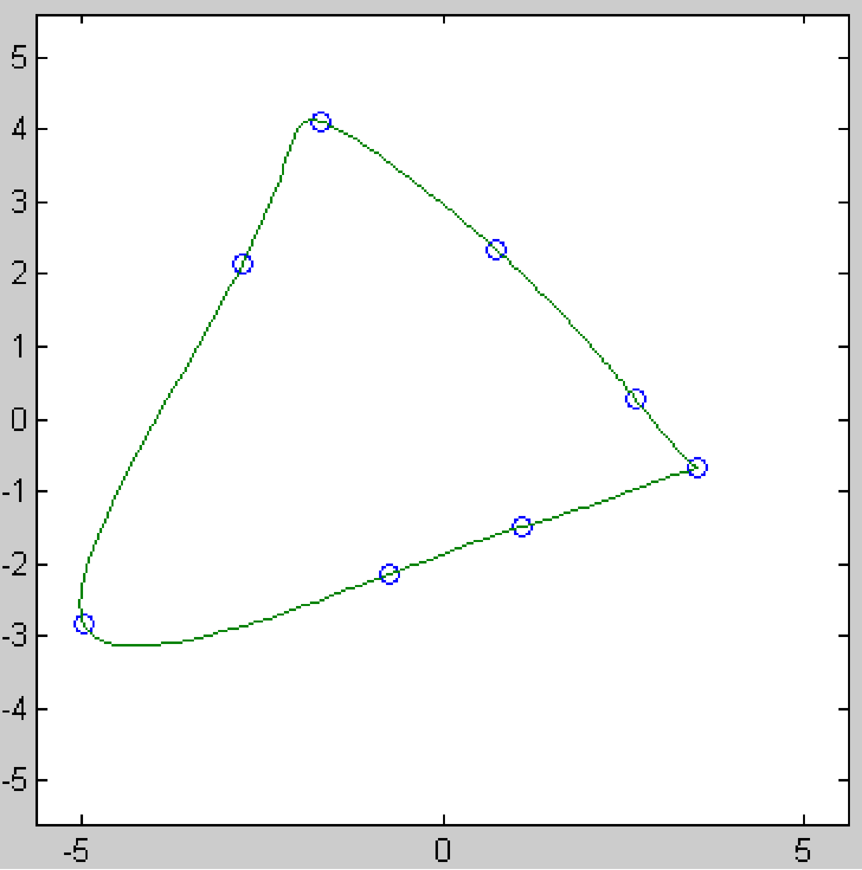
Esempio: spline cubica naturale

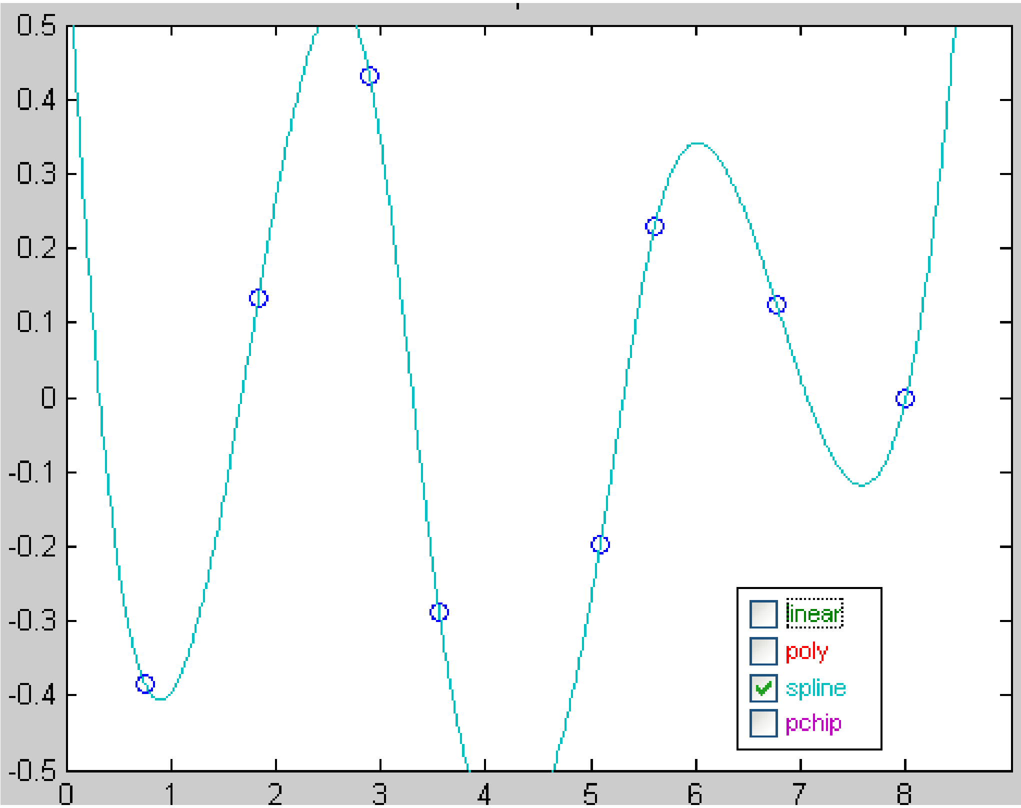
$$p_1(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \qquad p_2(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 0 & -1 & -2x_2 & -3x_2^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_2 & 0 & 0 & -2 & -6x_2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Funzioni di base diverse da quelle polinomiali (B-splines) portano a sistemi lineari con matrici con strutture a banda.

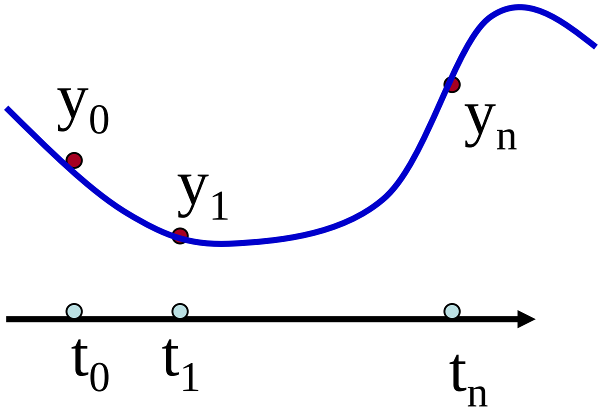
Interpolazione con funzioni e curve





Interpolazione di funzioni

Assegnati i punti (t_i, y_i) trovare la funzione che passa per tali punti



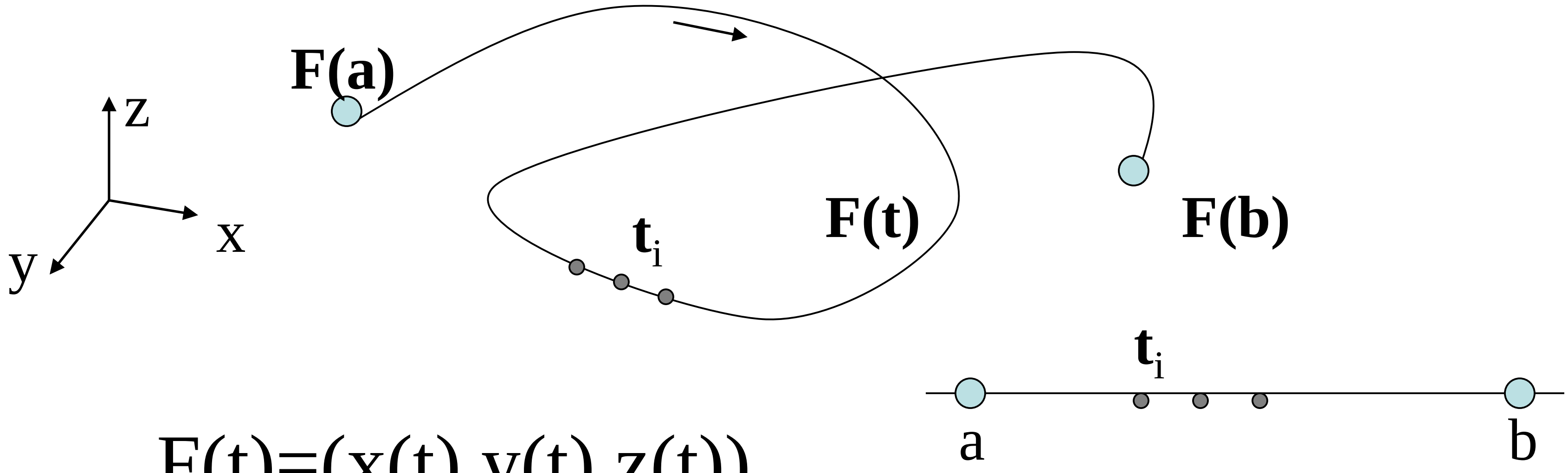
$f(t_i)=y_i \qquad i=0,..,n$

Risolvere il sistema lineare:

$$Aa = Y$$

Curve in forma parametrica

Una curva parametrica nello spazio è definita da tre funzioni x(t) y(t) e z(t) del parametro t. Al variare di t, le coordinate (x(t),y(t),z(t)) individuano un punto che si sposta sulla curva.



$$F(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

t in [a,b] individua un segmento di curva

Interpolazione con curve in forma parametrica

Assegnati i punti $P_i(x_i,y_i)$ trovare la curva

$c(t)=(c_x(t),c_y(t))$

che passa per tali punti.

E' necessario prima associare ai punti P_i, corrispondenti valori dei parametri t_i

$$\boxed{c(t_i)=P_i \Rightarrow \begin{pmatrix} c_x(t_i) \\ c_y(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad i=0,..,m}$$

poi risolvere i due sistemi lineari:

$$Aa_1 = X \qquad Aa_2 = Y$$

dove

$$X = vettore \quad x_i \quad ;Y = vettore \quad y_i$$

Curve spline di interpolazione

- Problema:

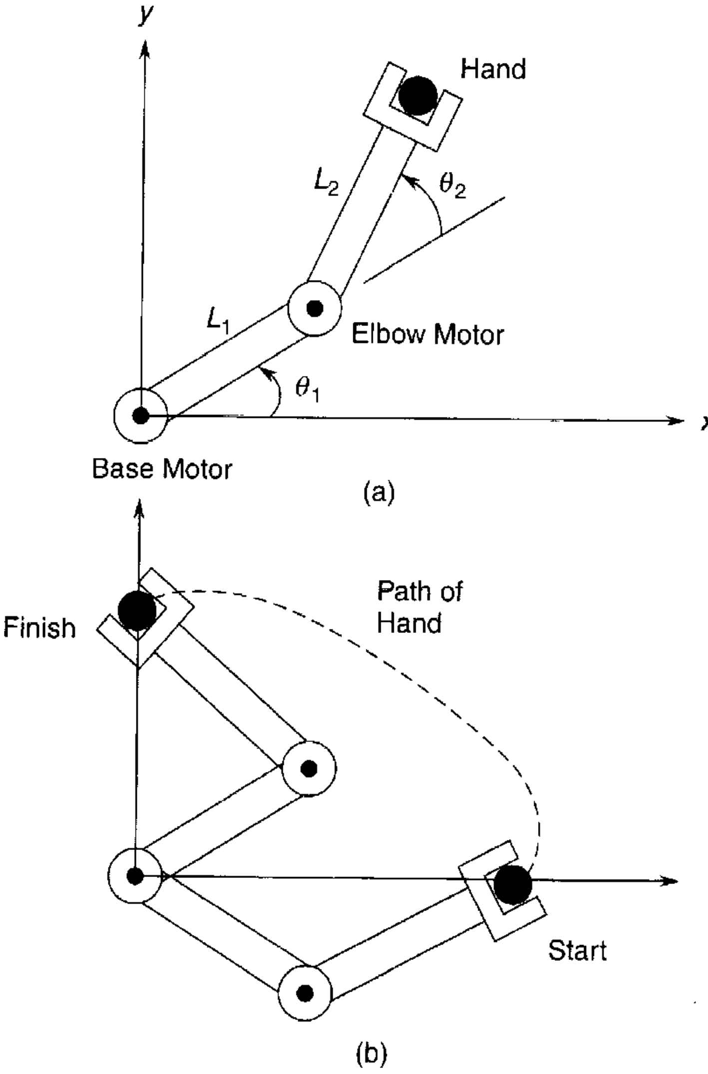
  Determinare una curva spline $s(t)=(s_x(t),s_y(t))$ di grado n tale che passi nell'ordine per m+1 punti $P_i=(x_i,y_i)$ i=0,..,m del piano preassegnati.

$$s(t_i)=P_i \Rightarrow \begin{pmatrix} s_x(t_i) \\ s_y(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad i=0,..,m$$

- Algoritmo:
  – Determinare i valori dei nodi di interpolazione t_i
  – Risolvere separatamente i due problemi di interpolazione con funzioni spline s_x e s_y :

$$\boxed{\begin{array}{ll} s_x(t_i)=x_i & i=0,..,m \\ s_y(t_i)=y_i & i=0,..,m \end{array}}$$

Esempio: Controllo di un robot 2D



Le equazioni che regolano il braccio sono le seguenti:

- posizione della fine del primo link (x_1,y_1)

$$x_1 = L_1 \cos(\theta_1)$$
$$y_1 = L_1 \sin(\theta_1)$$

- posizione della fine del secondo link (x_2,y_2)

$$x_2 = x_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = y_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

quindi, le coordinate (x,y) della mano del robot sono date da

$$x_2 = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_2 = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Esempio: Controllo di un robot 2D

Ricavare da queste due equazioni gli angoli θ_1 e θ_2, in funzione di x ed y, necessari per orientare la mano ad una posizione specificata da (x,y).

Le relazioni risultanti sono le seguenti:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{R^2 - L_1^{\ 2} - L_2^{\ 2}}{2L_1L_2} \qquad \cos(\beta) = \frac{R^2 + L_1^{\ 2} - L_2^{\ 2}}{2L_1R}$$

$$\alpha = \arctan(\frac{y}{x}) \qquad \theta_1 = \begin{cases} \alpha + \beta & se \quad \theta_2 < 0 \\ \alpha - \beta & se \quad \theta_2 \geq 0 \end{cases}$$

Esempio: Controllo di un robot 2D

Assegnate dall'utente m+1 posizioni del link2 del robot **$(x(t_i),y(t_i))$** agli istanti $t_{i,}$

determinare i corrispondenti angoli **$\theta_1(t_i)$ e $\theta_2(t_i)$.**

Soluzione:

- Disegnare la curva passante per i punti dati.
- Definire una discretizzazione di m+1 punti t_i
- Interpolare con funzioni spline i valori di $(t_i,\theta_1(t_i))$ e $(t_i,\theta_2(t_i))$ per determinare un percorso continuo di spostamento del braccio del robot.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi