

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2012/2013 – II Ciclo

Esercitazione 4 Risoluzione di problemi BVP

1. Modello di combustione spontanea di Bratu. Risolvere il seguente problema BVP con il metodo di collocazione offerto dalla built in function MATLAB **bvp4c()**

$$\begin{cases} y'' = -\lambda \exp(y) \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

A seconda del valore del parametro lambda esistono 1 soluzione, 2 soluzioni (lambda=1) o nessuna.

Attivare la visualizzazione delle statistiche dei costi computazionali con:

```
options = bvpset('stats','on');
```

2. Metodo delle differenze finite per problemi BVP

Realizzare un programma generale **bvp_FD()** per la risoluzione di problemi del secondo ordine BVP lineari con schemi alle differenze finite:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = y_a; y(b) = y_b \end{cases}$$

Utilizzare un solutore per sistemi lineari tridiagonali (**tridiag.m**)

2. Risolvere con il metodo alle differenze finite il problema:

$$\begin{cases} y'' = 2y' - 2y \\ y(0) = 0.1, \quad y(3) = 0.1 \exp(3) \cos(3) \end{cases}$$

Con soluzione esatta $y(x) = 0.1 \exp(x) \cos(x)$

Visualizzare i risultati ottenuti a confronto della soluzione esatta. Per la soluzione del metodo alle differenze, stimare l'errore massimo con $1/h=16,32,64$, valutando la differenza tra la soluzione ottenuta e quella approssimata.

3. Modello della diffusione della temperatura



La *diffusione della temperatura* u all'interno di una sbarra metallica di lunghezza L , collegata ai suoi estremi a due sorgenti termiche a temperatura fissata u_0 e u_L è descritta dal seguente problema ai limiti:

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) & \text{per } x \in (0, L) \\ u(0) = u_0 & \text{e } u(L) = u_L \end{cases}$$

dove $f = f(x)$, il termine sorgente, è una funzione assegnata mentre u_0 e u_L sono condizioni al bordo omogenee ($u_0 = u_L = 0$).

Per semplicità supponiamo $L=1$, mentre per il termine sorgente $f(x)$ sia:

$$f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x).$$

Approssimiamo il problema (1), servendoci del *metodo delle differenze finite*.

Verificare che il metodo comporta la risoluzione di un sistema lineare della forma $Au=b$, dove:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{u_0}{h^2} + f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{98}) \\ \frac{u_L}{h^2} + f(x_{99}) \end{bmatrix}$$

Sapendo infine che la soluzione esatta del problema (1), con condizioni al bordo omogenee, è

$$u(x) = \sin(2\pi x)$$

studiare *l'andamento* dell'errore al crescere del numero di sottointervalli, ($n=100, 200, 400, 800, 1600$).

4. Utilizzando il metodo di shooting **ShootingMethod.m** risolvere i seguenti problemi del secondo ordine **non lineari**: $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$

a. $f(x, y, y') = -2yy'$, $x \in [0, 1], y(0) = 1, y(1) = 1/2$, soluzione analitica $y(x) = \frac{1}{1+x}$

b. $f(x, y, y') = e^y + 2 + e^{x^2}$, $x \in [0, 1], y(0) = 1, y(1) = 1$,