

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2012/2013 – II Ciclo

Esercitazione 8

Soluzione numerica di Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali con metodi alle differenze finite

1. Equazione del Potenziale

Realizzare lo script MATLAB **ex1.m** per trovare la soluzione numerica al seguente problema della determinazione del potenziale su di un quadrato unitario $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{su } \Omega \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{su } \mathcal{R}\Omega \end{cases}$$

u continua sulla frontiera, utilizzando $N=18$, stesso passo per entrambe le variabili, $h=k$.

Il metodo utilizza un ordinamento naturale delle incognite e il metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare.

Si realizzi la function **gfun.m** come $g(x,y)$ per sperimentare le seguenti funzioni

(a) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x, y) = 10^{-4} \sinh(3\pi x) \sin(3\pi y).$$

(b) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x, y) = 4xy(x - y)(x + y).$$

Poichè g è anche soluzione al problema, è quindi possibile confrontare la soluzione $u(x_i, y_j)$ calcolata con la soluzione esatta $g(x_i, y_j)$. Calcolare inoltre l'errore che si commette nell'approssimazione.

2. Equazione del trasporto

Realizzare lo script MATLAB **ex2.m** per trovare la soluzione numerica dell'equazione del trasporto in un dominio monodimensionale con metodi alle differenze finite utilizzando lo schema esplicito upwind

$$\begin{cases} u_t + c(x)u_x = 0 & c(x) \text{ velocità di diffusione} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ -3 < x < 3, \quad 0 < t \leq 1 \\ BC : u(-3, t) = 0 \\ u(x, t) = u_0(x - c(x)t) \end{cases}$$

Studiare il comportamento con la propagazione di un'onda sinusoidale ($u_0(x) = \sin(\pi x)$ per x in $[-1, 1]$, 0 altrimenti) e di un'onda a gradino. Verificare le condizioni di stabilità, fenomeni di dissipazione (riduzione di ampiezza della sinusoide) e dispersione (ritardo rispetto alla soluzione esatta).

3. Risoluzione di PDE modello su differenti domini bidimensionali (pdegui.m)

- (a) Sperimentare le PDE di Poisson, calore e onde fornite dal programma pdegui.m su diversi domini bidimensionali
- (b) modificare l'output prodotto dal programma per visualizzare anche in una finestra separata la superficie soluzione del problema PDE.
- (c) verificare le condizioni di stabilità CFL per l'equazione del calore e delle onde.
- (d) Modificare le condizioni iniziali per esempio in $u(x,y)=\sin(x).\cos(y)$
- (e) Creare lo script MATLAB **mano_dati.m** per disegnare il contorno della propria mano.
Inizializzare il file con i seguenti comandi:

```
figure('position',get(0,'screensize'))  
axes('position',[0 0 1 1])  
[x,y]=input;
```

poi appoggiare la mano sullo schermo e utilizzando il mouse selezionare una trentina di punti lungo il profilo della mano. Premere quindi il tasto Enter per salvare ascisse e ordinate dei punti selezionati.

Aggiungere il profilo della propria mano memorizzato precedentemente nel file mano.dat come un'ulteriore dominio gestito dal pdegui.m