

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Laboratorio di Algebra Lineare Numerica

A.A. 2018/2019 – I Ciclo

Esercitazione 5

Singular Value Decomposition

1) Approssimazione SVD di un'immagine

Si vuole studiare come la decomposizione in valori singolari possa essere utilizzata nell'analisi di immagini ed in particolare nella compressione di immagini. Per approfondimenti si consulti [1].

Esempio di lettura di un'immagine in MATLAB:

```
>>clf
>>load clown
% in alternativa
% X=imread('nomefile','jpg') o altro formato immagine se presente Imagetoolbox
>>image(X)
>>colormap(gray)
>>axis equal
>>axis off
```

Creare uno script **main_imageSVD.m** con le seguenti funzionalità:

- a) Decomposizione in valori singolari della matrice immagine X (nxm) (utilizzo della routine **svd(X)** di MATLAB). Visualizzare il grafico dei valori singolari in funzione di $i=1,...,\min(m,n)$ e calcolo del rango r della matrice.
- b) Ricostruzione dell'immagine con solo k diadi ($k \leq r$) (approssimazione di rango k di A). Visualizzare le risultanti immagini X_k per alcuni differenti valori k.
- d) Calcolo dell'errore di compressione introdotto mediante norma di Frobenius,(in MATLAB **norm(X,'fro')**):

$$E_{rel} = \frac{\|I - I_c\|_{Fro}}{\|I\|_{Fro}} . \qquad \|I\|_{Fro} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |I_{ij}|^2} .$$

dove I_c è la versione compressa di I.

- e) Valutare la qualità della ricostruzione attraverso il calcolo del valore di PSNR o SNR. (Vedi OSSERVAZIONE 1)

[1] Dan Kalman *A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix*, The College Mathematics Journal, Vol. 27, NO. 1, January 1996

2) Elaborazione di segnali via TSVD/Regolarizzazione di Tikhonov

Quasi tutti i metodi di acquisizione segnali hanno l'effetto di perturbare il segnale originale, sia mediante sfocamento (effetto 'smoothing' sui dati) sia con rumore aggiuntivo. Si vuole simulare tale comportamento su un segnale a gradini affetto da sfocamento e rumore additivo casuale, e ricostruire mediante minimi quadrati un'approssimazione il più possibile fedele al segnale originale senza smoothing.

Supponiamo di avere un segnale \mathbf{x} definito da una sequenza temporale discreta di n campioni.

Sia $n=200$. Si consideri il segnale \mathbf{x} costante a tratti definito nel seguente modo:

$$x_k = \begin{cases} 1 & 50 \leq k < 100 \\ 4 & 100 \leq k < 150 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il processo di sfocamento (smoothing) è simulato mediante la convoluzione di \mathbf{x} con una PSF Gaussiana. I coefficienti della convoluzione sono:

$$c_k = \frac{1}{b} e^{-k^2/2\gamma^2} \quad \text{per} \quad -h \leq k \leq h \quad h=20; \gamma=6; n=200$$

il coefficiente b è scelto in modo da normalizzare i coefficienti della convoluzione: $\sum_{-h}^h c_k = 1$

Il segnale in output \mathbf{y} è ottenuto dalla convoluzione di \mathbf{x} con \mathbf{c} : $y_i = \sum_{k=-h}^h c_k x_{i+k} \quad i=1, \dots, n$

Con la convenzione che $x_i = 0$ per $i < 1$, o $i > n$

La function $[H, y, x] = \text{signalrec}(n)$ costruisce la matrice H ($n \times n$) tale che

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x}$$

Creare uno script **main_signalSVD.m** che crei il sistema e il termine noto perturbato

$$\mathbf{y}_{\text{mis}} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

dove \mathbf{w} è un rumore casuale $\mathbf{w} = \text{sigma} * \text{randn}(n,1)$, con $\text{sigma}=0.1$; visualizzare il grafico del segnale \mathbf{y}_{mis} e del segnale originale \mathbf{x} .

Ricostruire il segnale mediante le seguenti tecniche:

a) Risolvere il sistema lineare $\mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{y}_{\text{mis}}$ mediante metodo numerico senza regolarizzazione. Spiegare quanto succede.

b) Molti valori singolari di \mathbf{A} sono molto piccoli. La regolarizzazione del segnale mediante **Truncated SVD** (TSVD) di \mathbf{A} prevede di considerare solo le prime r componenti della approssimazione SVD di \mathbf{H} . Consideriamo quindi \mathbf{H}_r come l'approssimazione di rango r di \mathbf{H} e calcoliamo l'approssimazione di \mathbf{x} risolvendo $\mathbf{H}_r \mathbf{x} = \mathbf{y}_{\text{mis}}$, per valori di $r=5,10,15,30,50$. Visualizzare il grafico delle soluzioni \mathbf{x} ottenute.

c) Mediante **regolarizzazione di Tikhonov**.

Calcolare la soluzione del seguente sistema regolarizzato facendo uso della fattorizzazione di Cholesky

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}_{\text{mis}}$$

dove il parametro di regolarizzazione γ è scelto in input (suggerimento: lo si scelga appartenente ad un piccolo intervallo attorno a sigma)

Visualizzare l'approssimazione del segnale ideale di \mathbf{x} .

OSSERVAZIONI

1) Aggiungere rumore additivo ad un'immagine memorizzata in un vettore

Per aggiungere ad un array b rumore Gaussiano w con un livello di rumore relativo $\delta(x) = \frac{\|w\|}{\|b\|}$

randn genera numeri casuali da una distribuzione normale con media zero e deviazione standard 1.

```
randn('seed',0);  
e = randn(size(b));  
e = e / norm(e); % si normalizza a 1 l'array e  
w = delta*norm(b)*e;  
b_noise = b+w
```

Qualità dell'immagine misurata in termini di SNR o PSNR:

Signal-to-Noise Ratio:

$$SNR(b_noise, b) = 10 \log_{10} \frac{\|b - E(b)\|_2^2}{\|b_noise - b\|_2^2} \quad (dB)$$

b = immagine non corrotta da rumore

b_noise = immagine perturbata da rumore oppure immagine ricostruita

Peak Signal to Noise ratio (PSNR) dà informazioni sulla qualità dell'immagine ricostruita b_k di dimensione $m \times n$, rispetto all'immagine originale b :

$$\begin{aligned} RMSE &= \sqrt{\text{sum}(\text{sum}((b - b_k).^2))/(m*n)); \\ PSNR &= 20 * \log_{10}(255/RMSE); \end{aligned}$$

2)Regolarizzazione di problemi inversi mal posti

In questa esercitazione simuleremo un problema di ricostruzione di un segnale reale a partire da dati misurati tramite uno strumento di acquisizione e implementeremo due strategie di regolarizzazione, precisamente il metodo della decomposizione in valori singolari troncata (**TSVD**) e il metodo di **regolarizzazione di Tikhonov**.

Il modello matematico che lega il segnale acquisito al segnale ideale incognito, che vogliamo ricostruire, come avete visto a lezione, è l'equazione integrale

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t) f(t) dt$$

dove $f(x)$ rappresenta il segnale incognito, $g(x)$ il segnale misurato mediante lo strumento di acquisizione e $h(x,t)$ il nucleo della funzione integrale, caratteristica dello strumento di acquisizione. La forma discreta è

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^n h(x_i, t_j) f(t_j) \quad i=1,...,M$$

che in formato matriciale si può scrivere come:

$$Hf = g \quad (1)$$

dove

$$g = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

e H è la matrice $n \times n$ i cui elementi sono $h_{i,j} = h(x_i, t_j)$.

Ricostruire f , cioè il segnale ideale, è un problema inverso, equivale a risolvere il sistema (1).

La matrice H risulta in genere molto mal condizionata e la soluzione del sistema (3) è estremamente sensibile a perturbazioni, anche relativamente piccole, sul termine noto g .

Se cerchiamo di risolvere direttamente, con il metodo di Gauss con pivot, il sistema lineare

$$Hf = g + \varepsilon = g_\varepsilon \quad (4)$$

la soluzione che troviamo è completamente dominata dall'amplificazione del rumore e non ha nessuna somiglianza con la soluzione vera.

Per trovare una soluzione che sia *vicina* alla soluzione vera (che comunque non potremo mai ottenere partendo da dati perturbati) dobbiamo utilizzare un **metodo di regolarizzazione**.

I metodi di regolarizzazione infatti rinunciano a trovare la soluzione esatta del problema (4), ma invece calcolano la soluzione di un problema leggermente diverso ma meglio condizionato. Quest'ultimo viene chiamato **problema regolarizzato**.