

Laboratorio di Analisi Numerica B

A.A. 2019/2020 – I Ciclo

Esercitazione 2

Soluzione numerica di Problemi ai valori al contorno (BVP) con metodi alle differenze finite

1. Utilizzando il metodo di shooting **ShootingMethod.m** risolvere i seguenti problemi BVP del secondo ordine **non lineari**: $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$

a. $f(x, y, y') = -2yy'$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1/2$, soluzione analitica $y(x) = \frac{1}{1+x}$

b. $f(x, y, y') = e^y + 2 + e^{x^2}$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, confrontare con la soluzione ottenuta con il metodo di collocazione **bvp4c()** di MATLAB

2. Metodo delle differenze finite per problemi BVP

Realizzare un programma generale **bvp_FD()** per la risoluzione di problemi del secondo ordine BVP lineari con schemi alle differenze finite:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_a; y(b) = y_b \end{cases}$$

Utilizzare un solutore per sistemi lineari tridiagonali (**tridiag.m**)

2.2. Risolvere con il metodo alle differenze finite il problema:

$$\begin{cases} y'' = 2y' - 2y \\ y(0) = 0.1, y(3) = 0.1\exp(3)\cos(3) \end{cases}$$

Con soluzione esatta $y(x) = 0.1\exp(x)\cos(x)$

Visualizzare i risultati ottenuti a confronto della soluzione esatta. Per la soluzione del metodo alle differenze, stimare l'errore massimo con $1/h=16,32,64$, valutando la differenza tra la soluzione ottenuta e quella approssimata.

Soluzione numerica di Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali (PDE) con metodi alle differenze finite

3. Equazione del calore monodimensionale

Consideriamo il problema di diffusione lineare monodimensionale (EDP secondo ordine parabolica) con condizioni al contorno di Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = g1(t) \\ u(1,t) = g2(t) \end{cases}$$

Scrivere le seguenti function MATLAB che risolvano la EDP mediante uno schema alle differenze finite esplicito, uno schema implicito e lo schema di Crank-Nicolson, rispettivamente:

```
function w=diffusion1D_EE(f,g1,g2,T,L,M,N,a)
function w=diffusion1D_IE(f,g1,g2,T,L,M,N,a)
function w=diffusion1D_CN(f,g1,g2,T,L,M,N,a)
```

3.1 Scrivere uno script **ex1.m** che calcoli la soluzione numerica per i seguenti due problemi di conduzione del calore mediante i tre metodi realizzati:

a1) $f(x) = \sin(\pi x)$; $g1(t)=0$; $g2(t)=0$; $M=200$, $N=10$, $L=1$, $T=0.5125$

a2) $f(x) = x^4$; $g1(t)=0$; $g2(t)=1$; $N=19$, $L=2$, $M=171$, $T=1.02$.

OSSERVAZIONE: come parametri di diffusività del materiale (variabile a) si considerino i seguenti: argento $a=1.71$; rame $a=1.14$; alluminio $a=0.86$; ferro $a=0.12$

- Calcolare la soluzione in modo stabile per ogni valore del parametro di diffusività con i tre metodi. Verificare che il metodo EE è condizionatamente stabile, mentre CN e IE sono incondizionatamente instabili.

Visualizza la soluzione sia in forma di superficie sia come curva che evolve ad ogni istante di tempo.

- Calcola l'**errore di convergenza sperimentale** per i metodi IE e CN in norma $L^\infty(t_0, T; L^\infty(x_0, x_f))$ rispetto alla soluzione esatta di a1)

$$u(x,t) = \exp(-\pi^2 at) \sin(\pi x)$$

Per i seguenti parametri di discretizzazione (raffinamenti):

$(h=\Delta x, k=\Delta t)$; $(h/2, k/2)$; $(h/4, k/4)$; $(h/8, k/8)$; $(h/16, k/16)$, con $(h,k)=(0.01,0.1)$.

Riportare i risultati in un plot $(x, E(x,t))$ e in una tabella (N punti di discretizzazione p , E_p , Ordine di convergenza).

Per valutare l'ordine di convergenza sperimentale consideriamo l'errore

$$e_{ij} = |u_{exact}(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)| \quad E_j = [e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{Nj}]$$

Per un dato raffinamento p : $E_p = \|E_j\|_\infty$ dove $\|E_j\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{ij}|$ allora $\text{ordine}(p) = \log_2 \left(\frac{E_p}{E_{p+1}} \right)$

- Calcola il numero di condizionamento $K_2(A)$ della matrice A della discretizzazione spaziale di u_{xx} . Valutare empiricamente la dipendenza di $K_2(A)$ da h .

Nota:

Sia $E(h)$ l'errore di calcolo utilizzando una griglia di passo di discretizzazione h , calcolato come scostamento dalla soluzione esatta, tipicamente:

$$E(h) = \|U(h) - U_{exact}(h)\|$$

Se il metodo è accurato di ordine p , allora $E(h) \approx Ch^p$

Se raffiniamo la griglia di un fattore 2, allora $E(h/2) \approx C \left(\frac{h}{2} \right)^p$,

definiamo il rapporto d'errore $R(h) = \frac{E(h)}{E(h/2)}$, ci aspettiamo $R(h) \approx 2^p$

e quindi $p \approx \log_2(R(h))$

4. Eq. del calore 2D e il modello EDP non lineare di Perona Malik nell'elaborazione digitale di immagini

Nelle immagini ottenute o elaborate in formato digitale è possibile riscontrare la presenza di rumore che ne altera l'aspetto originale. Si vuole realizzare un metodo di denoising di immagini mediante le seguenti strategie:

- 1) Utilizzo dell'equazione del calore (diffusione lineare) come filtro di rimozione del rumore nelle immagini.
- 2) Una seconda soluzione invece considera un filtro più sofisticato (introdotto da PIETRO PERONA e JITENDRA MALIK 1987) che permette di preservare le caratteristiche strutturali dell'immagine (edge) utilizzando il principio di diffusione anisotropica. Sulla base di questo lavoro sono poi stati sviluppati ulteriori tecniche di filtraggio sempre più sofisticate che hanno permesso grandi sviluppi nel mondo dell'elaborazione digitale delle immagini.

Il progetto è parzialmente impostato nel file **main.m** e fa uso della routine `addnoise()` per l'aggiunta del rumore all'immagine. Utilizzare tale script per sperimentare vari modelli EDP per il denoising delle immagini mediante metodo alle differenze finite: il modello lineare dell'equazione del calore 2D e il modello nonlineare di Perona-Malik. 2D. Mettere a confronto i risultati di filtraggio ottenuti calcolando anche l'errore relativo nella norma di Frobenius rispetto all'immagine non rumoreggiata.

Si estenda la formula PM per uno stencil più complesso, che considera 8 nodi vicini che oltre alle 4 direzioni N-S-O-E, tenga in considerazione anche le posizioni intermedie NE-SE-NO-SO agli angoli del quadrato dello stencil.