Laboratorio di Analisi Numerica BSB
A.A. 2019/2020 – I Ciclo

Esercitazione 3

Soluzione numerica di Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali con metodi alle differenze finite

1. **Equazione del Potenziale**

Realizzare lo script MATLAB **ex1.m** per trovare la soluzione numerica al seguente problema della determinazione del potenziale su di un quadrato unitario $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad su \quad \Omega \\ u(x,y) = g(x,y) \quad su \quad \partial\Omega \end{cases}$$

u continua sulla frontiera, utilizzando N=18, stesso passo per entrambe le variabili, h=k.
Il metodo utilizza un ordinamento naturale delle incognite e il metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare.
Si realizzi la function **gfun.m** come g(x,y) per sperimentare le seguenti funzioni

(a) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x,y) = 10^{-4}\sinh(3\pi x)\sin(3\pi y).$$

(b) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x,y) = 4xy(x-y)(x+y).$$

Poichè g è anche soluzione al problema, è quindi possibile confrontare la soluzione $u(x_i, y_j)$ calcolata con la soluzione esatta $g(x_i, y_j)$. Calcolare inoltre l'errore che si commette nell'approssimazione della soluzione per valori crescenti del passo di discretizzazione.

(c) Modificare ex1.m per risolvere il seguente problema su una griglia 12x12 (n=10 nodi interni):

$$\begin{cases} -\Delta u + 2u = f(x,y) & \text{in R} \\ u(x,y) = g(x,y) \equiv e^{x+y} & \text{su } \partial R \end{cases}$$

dove R è il quadrato $[0,1]\times[0,1]$ e f(x,y)=0

2. **Equazione del trasporto**

Le tre MATLAB function ***Upwind.m***, ***Lax-Friedrichs.m*** e ***Lax-Wendroff.m*** realizzano tre differenti schemi numerici alle differenze finite per risolvere l'equazione del trasporto in un dominio monodimensionale con velocità c(x):

$$\begin{cases} u_t + c(x)u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad -3 < x < 3, \quad 0 < t \le 1$$

$$BC : u(-3,t) = 0$$

$$u(x,t) = u_0(x - c(x)t)$$

Studiare il comportamento con la propagazione di un’onda $u_0(x)$:
a) $u_0(x)=\sin(\pi x)$ solo per $x\in[-1,1]$, 0 altrove;
b) funzione a gradino per $x\in[-1,1]$.

Verificare le condizioni di stabilità, fenomeni di dissipazione (riduzione di ampiezza della sinusoide) e dispersione (ritardo rispetto alla soluzione esatta).