

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2012/2013 – II Ciclo

Esercitazione 2

Singular Value Decomposition

1) Approssimazione SVD di un'immagine

La decomposizione in valori singolari si può applicare alla compressione di immagini. Per approfondimenti si consulti [1].

Esempio di lettura di un'immagine in MATLAB:

```
>>clf
>>load clown
% in alternativa
% X=imread('nomefile','jpg') o altro formato immagine se presente Imagetoolbox
>>image(X)
>>colormap(gray)
>>axis equal
>>axis off
```

Creare uno script **main_imageSVD.m** con le seguenti funzionalità:

- Deomposizione in valori singolari della matrice immagine X (nxm) (utilizzo della routine **svd(X)** di MATLAB). Visualizzare il grafico dei valori singolari in funzione di $i=1,\dots,\min(m,n)$ e calcolo del rango r della matrice.
- Ricostruzione dell' immagine con solo k diadi ($k < r$) (approssimazione di rango k di A). Visualizzare le risultanti immagini X_k per alcuni differenti valori k.
- Calcolo dell'errore di compressione introdotto mediante norma di Frobenius,(in MATLAB **norm(X,'fro')**):

$$E_{rel} = \frac{\|I - I_c\|_{Fro}}{\|I\|_{Fro}} \quad \|I\|_{Fro} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |I_{ij}|^2} .$$

dove I_c è la versione compressa di I.

[1] Dan Kalman *A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix*, The College Mathematics Journal, Vol. 27, NO. 1, January 1996

2) Elaborazione di segnali via TSVD

Quasi tutti i metodi di acquisizione segnali hanno l'effetto di perturbare il segnale originale, sia mediante sfocamento (effetto 'smoothing' sui dati) sia con rumore aggiuntivo. Quindi il modello del degrado del segnale è

$$\mathbf{y}_{mis} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

dove \mathbf{y}_{mis} è il segnale rilevato, A matrice di sfocamento, w rumore casuale additivo, x segnale esatto definito da una sequenza temporale discreta di n campioni. Dato \mathbf{y}_{mis} si vuole trovare un'approssimazione di x.

La function $[A,b,x]=\text{signalrec}(n)$ costruisce la matrice A ($n \times n$) tale che $b=Ax$, e il segnale x

$$\text{costante a tratti nel seguente modo: } x_k = \begin{cases} 1 & 50 \leq k < 100 \\ 4 & 100 \leq k < 150 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Creare uno script **main_signalSVD.m** che costruisca il sistema e il termine noto perturbato $y_{\text{mis}}=Ax+w$ dove w è un rumore casuale $w=0.01*\text{randn}(n,1)$; visualizzare il grafico del segnale y_{mis} insieme al segnale originale x . Ricostruire il segnale mediante le due tecniche:

a) Risolvere il problema di approssimazione minimi quadrati di x dato y_{mis} ovvero risolvere

$$A x = y_{\text{mis}}.$$

Spiegare quanto succede.

b) Molti valori singolari di A sono molto piccoli. La regolarizzazione del segnale mediante Truncated SVD (TSVD) di A prevede di considerare solo le prime r componenti della approssimazione SVD di A . Consideriamo quindi A_r come l'approssimazione di rango r di A e calcoliamo l'approssimazione di x risolvendo

$$A_r x = y_{\text{mis}},$$

per valori di $r=5,10,15,30,50$. Visualizzare il grafico delle soluzioni x ottenute.

NOTA a **signalrec()**

Il processo di smoothing è simulato mediante la convoluzione di x con una Gaussiana. I coefficienti della convoluzione sono:

$$c_k = \frac{1}{b} e^{-k^2/2\gamma^2} \quad \text{per } -h \leq k \leq h \quad h = 20; \gamma = 6; n = 200$$

b scelto in modo da normalizzare i coefficienti della convoluzione: $\sum_{k=-h}^h c_k = 1$

Il segnale in output y è ottenuto dalla convoluzione di x con c : $y_i = \sum_{k=-h}^h c_k x_{i+k} \quad i = 1, \dots, n$

Con la convenzione che $x_i = 0$ per $i < 1$, o $i > n$