

IL Θ -METODO

Abbiamo visto come l'uso di metodi impliciti consente di prendere passi Δt arbitrariamente grandi.

Il metodo di Eulero implicito però non è sufficiente ai nostri scopi in quanto per $\Delta t > \Delta x^2$ abbiamo un deterioramento dell'accuratezza complessiva del metodo che abbiamo visto essere di ordine $O(\Delta t + \Delta x^2)$.

Una tecnica naturale per ovviare questo problema è quella di utilizzare metodi impliciti di ordine più elevato, ad esempio Crank-Nicolson.

Una generalizzazione di tale idea è fornita dal Θ -metodo definito dalla discretizzazione

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda \Theta \left[u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} \right] + \lambda (1-\Theta) \left[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n \right] \quad i=2, \dots, N-1$$

dove $0 \leq \Theta \leq 1$.

N.B. $\Theta = 0$ Eulero esplicito
 $\Theta = 1$ Eulero implicito
 $\Theta = \frac{1}{2}$ Crank-Nicolson

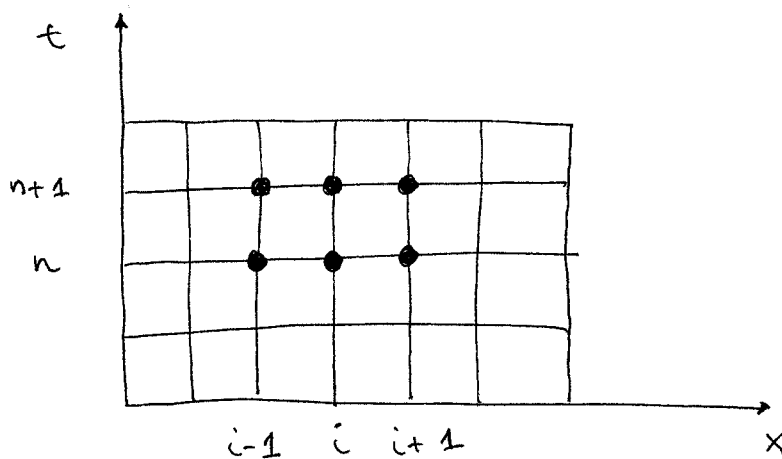
Θ	$\Theta = 0$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = 1$
1	1-0 0	1-0 0	1-0 0
1	1-0 0	1-0 0	1-0 0

Tableau RK

In particolare lo schema può essere risolto come l'applicazione del metodo di Eulero esplicito con passo $(1-\theta)\Delta t$ seguita da un metodo di Eulero implicito con passo $\theta\Delta t$ nella forma per $i=2, \dots, N-1$

$$\begin{cases} u_i^{n+1/2} = u_i^n + \lambda(1-\theta) [u_{i-1}^n + u_{i+1}^n - 2u_i^n] \\ u_i^{n+1} = u_i^{n+1/2} + \lambda\theta [u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}] \end{cases}$$

Tale forma rende il metodo facilmente implementabile sfruttando i risolutori sviluppati per il metodo esplicito e implicito.



Si noti che lo schema fa intervenire 6 diversi nodi, quindi valori, della nostra griglia $u_i(x, t)$.

STABILITA' DEL θ -METODO

Possiamo utilizzare l'analisi di Fourier per ottenere

posteriore $u_i^n = \sum_k e^{I k \Delta x}$

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \lambda \theta \xi \left[e^{I k \Delta x} + e^{-I k \Delta x} - 2 \right] + \\ &\quad + \lambda (1-\theta) \left[e^{I k \Delta x} + e^{-I k \Delta x} - 2 \right] \\ &= 1 + \lambda \left[\theta \xi + (1-\theta) \right] \left(e^{I k \Delta x} + e^{-I k \Delta x} - 2 \right) \\ &= 1 + \lambda \left[\theta \xi + (1-\theta) \right] \left(-4 \sin^2 \frac{k \Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

N.B. $2 (\cos k \Delta x - 1) = -2 \left(2 \sin^2 \frac{k \Delta x}{2} \right)$

quindi

$$\xi = \frac{1 - 4(1-\theta) \lambda \sin^2 \frac{k \Delta x}{2}}{1 + 4\theta \lambda \sin^2 \frac{k \Delta x}{2}}$$

ξ non e' mai > 1 , poiche' $0 \leq \theta \leq 1$ e $\lambda > 0$ ed il denominatore e' sempre maggiore del numeratore. Quindi l'instabilita' puo' essere generata solo da $\xi < -1$, ossia se

$$1 - 4(1-\theta) \lambda \sin^2 \frac{k \Delta x}{2} < - \left[1 + 4\theta \lambda \sin^2 \frac{k \Delta x}{2} \right]$$

ossia

$$4 \lambda (1-2\theta) \sin^2 \frac{k \Delta x}{2} > 2$$

tale quantità in x e' varia per $\kappa \Delta x = \pi$ per cui

$$4\lambda (1-2\Theta) > 2 \Leftrightarrow \lambda (1-2\Theta) > \frac{1}{2}.$$

N.B. $\Theta = 0$ otteniamo ancora che il metodo esplicito e' instabile per $\lambda > \frac{1}{2}$, $\Theta = 1$ la condizione non e' mai verificata per ogni valore di λ .

Non solo, e $\Theta \geq \frac{1}{2}$ la condizione non e' mai verificata per ogni valore di λ .

Abbiamo quindi che

$$\begin{cases} 0 \leq \Theta < \frac{1}{2} & \text{stabile} \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2(1-2\Theta)} \\ \frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1 & \text{stabile per ogni } \lambda \end{cases}$$

In particolare per $\Theta = \frac{1}{2}$ sappiamo che il metodo e' stabile per ogni λ ed ha un errore di troncatura

$$O(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

Oss: Un'altra scelta interessante di Θ e'

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6(1-2\bar{\Theta})}$$

con $\lambda \geq \frac{1}{6}$ affinché $\bar{\Theta} \geq 0$.

In questo caso l'errore di troncatura e' $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$.

Si noti che $\bar{\theta}$ è $< 1/2$ e che per $\theta = 0$ si ha
 $\lambda = 1/6$ già visto nel metodo esplicito.

CONDIZIONI AL CONFINAMENTO DI TIPO NEUMANN

Se consideriamo il problema ai valori iniziali per l'equazione del calore con le condizioni al contorno
addizionali in $x=0$, $x=L$

$$u_x(0,t) = \alpha(t) u(0,t) + g(t), \quad \alpha(t) \geq 0$$

$$u_x(L,t) = \beta(t) u(L,t) + g(t), \quad \beta(t) \geq 0$$

un metodo naturale di approssimare è di utilizzare
differenze in avanti in $x=0$, e all'indietro in $x=L$.

Ad esempio in $x=0$ otteniamo

$$\frac{u_2^n - u_1^n}{\Delta x} = \alpha^n u_1^n + g^n$$

risolvendo in u_1^n fornisce

$$u_1^n = \frac{1}{1 + \alpha^n \Delta x} (u_2^n - g^n \Delta x)$$

che può essere utilizzato come valore al bordo di u_1^n .

OSS: In pratica si applicano i metodi precedenti dopo avere imposte le condizioni al contorno.

Poiché le differenze in avanti sono del primo ordine in Δx , ossia l'errore di troncamento è $O(\Delta x)$

lo stesso risultato sarà di ordine uno in Δx , anche

se l'errore di troncamento nei nodi interni è $O(\Delta x^2)$.

Tale problema può essere risolto tramite un piccolo accorgimento.

Supponiamo che i punti griglia siano disposti in modo che il contorno $x=0$ si trovi a metà strada tra i punti $i=1$ e $i=2$.



Possiamo a questi punti utilizzare le differenze centrali per la derivate approssimando il valore di $u(x,t)$ nel punto $x=0$ come $u_{3/2}^n = \frac{1}{2} (u_1^n + u_2^n)$.

Tale approssimazione ha ordine due in Δx in fatti

$$u_{3/2}^n = u_1^n + \Delta x \left(u_{3/2}^n \right)_x + \frac{\Delta x^2}{2} \left(u_{3/2}^n \right)_{xx}$$

$$u_{3/2}^n = u_2^n + \Delta x \left(u_{3/2}^n \right)_x + \frac{\Delta x^2}{2} \left(u_{3/2}^n \right)_{xx}$$

da cui sommando si ha

$$2u_{3/2}^n = u_1^n + u_2^n + O(\Delta x^2)$$

Abbiamo quindi la relazione

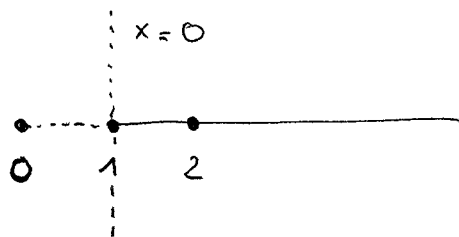
$$\frac{u_2^n - u_1^n}{\Delta x} = \alpha^n \left(\frac{u_1^n + u_2^n}{2} \right) + g^n$$

da cui otteniamo

$$u_1^n = \frac{1 - \frac{\alpha^n \Delta x}{2}}{1 + \frac{\alpha^n \Delta x}{2}} u_2^n - \frac{\Delta x}{1 + \frac{\alpha^n \Delta x}{2}} g^n$$

da risulta ora passare ad un errore complessivo $O(\Delta x^2)$.

Un metodo alternativo, convenientemente utilizzato, è quello di utilizzare i nodi originali con il contorno in $i=1$ e di introdurre un valore fittizio u_0^n (ghost point)



$$\frac{u_2^n - u_0^n}{2\Delta x} = \alpha^n u_1^n + g^n$$

da cui

$$u_0^n = u_2^n - 2\Delta x (\alpha^n u_1^n + g_1^n)$$

lo schema può poi essere applicato anche nei nodi $i=1$ e $i=N$ utilizzando i valori fittizi così ottenuti.

Per il Θ -metodo ad esempio si avrà a $i=1$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \lambda(1-\Theta) \left[u_0^n + u_2^n - 2u_1^n \right] \\ + \lambda\Theta \left[u_0^{n+1} + u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} \right]$$

dove u_0^n e u_0^{n+1} sono calcolati tramite le precedenti relazioni.

PROBLEMI PARABOLICI PIÙ GENERALI

a

$$u_t = D u_{xx}$$

D coefficienti di diffusione, $D > 0$.

D costante poche differenze $\Delta t \leq \frac{D}{(\Delta x)^2}$ metodo

esplicito. Stesse funzioni con $D\Delta t$ al posto di Δt .

$D = D(x, t) > 0$, dipendente da x e t .

• Metodo esplicito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda D_i^n (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n)$$

$$\Delta t \leq \frac{D_i^n}{(\Delta x)^2}, \quad \Delta t \leq \frac{\bar{D}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \bar{D}^n = \max_i D_i^n$$

calcola ad ogni passo.

Le funzioni vanno cambiate di poco.

• Metodo implicito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda D_i^{n+1} (u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1})$$

algoritmo le considerazioni nell'implementazione con un sistema
tri diagonale. Funzioni vanno cambiate in quanto le
matrice del sistema dipende da D_i^{n+1} .

Θ METODO :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (1-\Theta) \delta_c^2 u_i^n + \Delta t \Theta \delta_c^2 u_i^{n+1}$$

alternativa

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t D_i^{n+1/2} \left[(1-\Theta) \delta_c^2 u_i^n + \Theta \delta_c^2 u_i^{n+1} \right]$$

con $D_i^{n+1/2}$ o calcolato oppure $D_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (D_i^n + D_i^{n+1})$.

(b)

$$u_t = (D(x,t) u_x)_x$$

corrisponde a $u_t = D(x,t) u_{xx} + D_x(x,t) u_x$

Viene discretizzata applicando le differenze centrali due volte. Il metodo esplicito diventa:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i+1/2}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - D_{i-1/2}^n (u_i^n - u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}$$

$$D_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (D_i^n + D_{i+1}^n), \quad D_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} (D_i^n + D_{i-1}^n)$$

Analoghi per lo schema implicito.

(c)

$$u_t = P(u)_{xx}$$

$P(u)$ non lineare EX: $P(u) = u^2$

Può essere riscritto nella forma (b) infatti

$$u_t = (p'(u) u_x)_x$$

Se $z = p(u)$ allora dallo sviluppo in serie di Taylor

$$\begin{aligned} z_i^{n+1} &= z_i^n + (u_i^{n+1} - u_i^n) z_i'^n \\ &= p(u_i^n) + (u_i^{n+1} - u_i^n) p'(u_i^n) \end{aligned}$$

e lo stesso uplemti può essere linearizzato e dunque implementato.

(d)
$$u_t = a(x,t) u_{xx} + b(x,t) u_x + c(x,t) u + d(x,t)$$

tutto centrale quindi

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu |a_i^n| \leq \lambda D_i^n \\ 2 \lambda D_i^n - \Delta t b_i^n \leq 1 \end{cases} \quad \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$c_i^n \leq 0, \quad D_i^n \geq 0, \quad a_i^n \text{ arbitrarie}$$

$$\Delta x \leq \frac{2 D_i^n}{|a_i^n|}$$

Condizioni per la stabilità L_1 del metodo.

PROBLEMI DI TIPO ELLITTICO

Consideriamo il problema prototipo in \mathbb{R}^2

$$(1) \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u|_{\partial\Omega} = \bar{u}(x, y) & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Allo scopo di evitare problemi con la geometria del dominio computazionale consideriamo il semplice dominio

$$\Omega = (0, L) \times (0, L')$$

dunde $\partial\Omega$ è il bordo del rettangolo con definite.

Consideriamo inoltre $\bar{u} \equiv 0$ in $\partial\Omega$.

Introduciamo una griglia cartesiana di angustia

Δx e Δy con

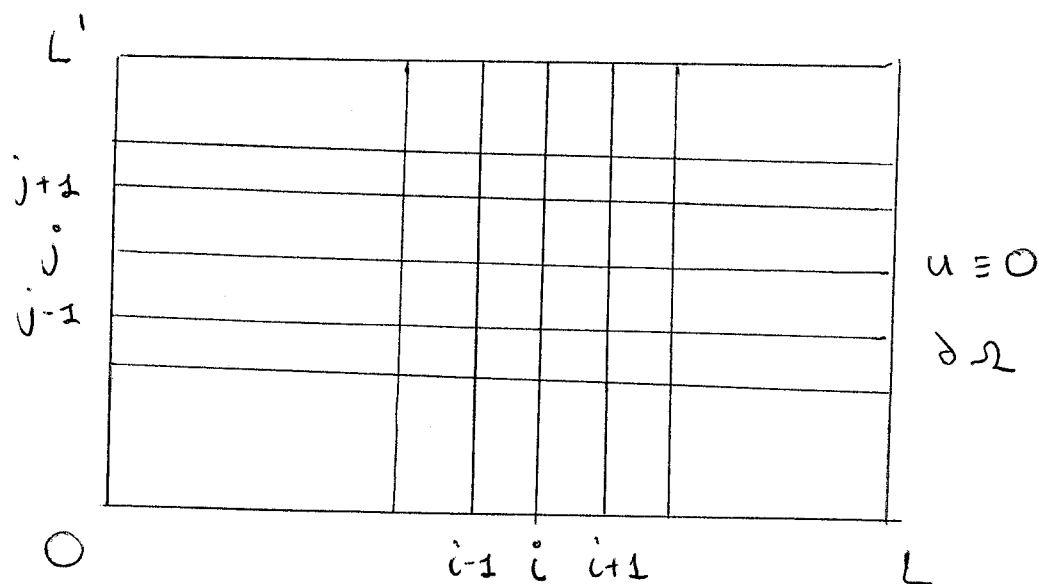
$$\Delta x = \frac{L}{N-1}, \quad \Delta y = \frac{L'}{M-1}$$

ed indicano con

$$x_i = (i-1) \Delta x, \quad i = 1, \dots, N$$

$$y_j = (j-1) \Delta y, \quad j = 1, \dots, M$$

i punti nel nostro dominio computazionale



Discretizziamo dunque l'operatore di Laplace in \mathbb{R}^2 tramite differenze centrali. Ricordando che

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

abbiamo la discretizzazione del problema (1)

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta y^2} = f_{i,j}$$

dove $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ e $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$.

Chiaramente l'errore di troncamento del metodo così costruito sarà $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.

Supponiamo per semplicità $\Delta x = \Delta y = \Delta$, $L = L'$, $n = N$ ossia consideriamo il problema in un quadrato con mesh regolare.

Otteniamo la discretizzazione per $i, j = 2, \dots, N-1$

$$u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = \Delta^2 f_{i,j}$$

Il problema sopra corrisponde ad un sistema lineare le cui incognite sono gli elementi $u_{i,j}$ nei nodi interni al quadrato. Abbiamo dunque $(N-2)^2$ incognite. Se le ordiniamo per colonne nel vettore

$$U = (u_{22}, \dots, u_{N-2,2}, u_{23}, \dots, u_{N-2,3}, \dots, u_{2N-1}, \dots, u_{N-1,N-1})^T$$

e con F indichiamo il vettore

$$F = \Delta^2 (f_{22}, \dots, f_{N-2,2}, f_{23}, \dots, f_{N-2,3}, \dots, f_{2N-1}, \dots, f_{N-1,N-1})^T$$

otteniamo il sistema lineare

$$AU = F$$

con A matrice a blocchi nella forma tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} G & I & & & \\ I & G & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I & G & I \\ & & & I & G \end{pmatrix}$$

con I matrice identità di dimensione $(N-2)$
e G la matrice tridiagonale di dimensione $(N-2)$

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

A è una matrice quadrata composta da $N-2$ blocchi sulla diagonale di dimensione $N-2$. Ha dunque $(N-2)^4$ elementi. È inoltre simmetrica, a diagonale dominante e definita positiva.

A causa del grande numero di elementi non è conveniente una sua risoluzione diretta, e sono quindi preferiti metodi iterativi in grado di trarre vantaggio della struttura sparsa della matrice.

RICHIANI SUI METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI

Dato il sistema $Ax = b$ l'idea dei metodi iterativi è quella di decomporre A nella forma

$$A = E - H,$$

dove E è una matrice facile da invertire, e risolvere il sistema iterativamente nella forma

$$x^{(n+1)} = E^{-1} H x^{(n)} + E^{-1} b$$

La matrice $B = E^{-1}H$ e' detta matrice di iterazione. L'iterazione inizia a partire da una stima $x^{(0)}$ della soluzione cercata.

Esempio (metodo di Jacobi)

Si scompone A nella forma

$$A = D - L - R$$

con D diagonale delle matrici, R e L matrici triangolari superiore ed inferiore con elementi nulli sulla diagonale.

Il metodo di Jacobi e' molto semplice e si basa sulla sola inversione delle diagonali

$$x^{(n+1)} = D^{-1}(L+R)x^{(n)} + D^{-1}b$$

la sua velocita' di convergenza e' piuttosto lenta ed esistono metodi piu' efficienti.

Nel caso del nostro problema il metodo di Jacobi assume la forma

$$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} \right) - \frac{\Delta^2}{4} f_{ij}$$

per $i, j = 2, \dots, N-1$

Il metodo è stato ideato da Jacobi nel 1844 ed ha la caratteristica di essere facilmente parallelizzabile in quanto gli aggiornamenti convergono simultaneamente.

Se il calcolatore non è parallelo l'ordine dei calcoli avviene per $i = 2, \dots, N-1$ e $j = 2, \dots, N-1$ dunque utilizzando i valori $u_{i-1}^{(n+1)}$ e $u_{i,j-1}^{(n+1)}$ nell'iterazione si ha comunque un'iterazione esplicita nella forma

$$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} \right) - \frac{\Delta^2}{4} f_{ij}$$

per $i, j = 2, \dots, N-1$.

Tale metodo è noto come metodo di Gauss-Seidel e corrisponde nelle notazioni usate a precedente all'iterazione

$$x^{(n+1)} = (D-L)^{-1} R x^{(n)} + (D-L)^{-1} b$$

Una modifica del metodo di Gauss-Seidel è data dal metodo SOR (successive over relaxation)

$$u_{ij}^{(n+1)} = (1-\omega) u_{ij}^{(n)} + \frac{\omega}{4} \left[\left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} \right) - \Delta^2 f_{ij} \right]$$

Per $\omega = 1$ abbiamo il metodo di Gauss-Seidel, per $\omega > 1$ il metodo SOR.

In notazione vettoriale corrisponde a

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} &= (1-\omega)I x^{(n)} + \omega \left[(D-L)^{-1} R x^{(n)} + (D-L)^{-1} b \right] \\&= \left[(1-\omega)I + \omega (D-L)^{-1} R \right] x^{(n)} + \omega (D-L)^{-1} b\end{aligned}$$

I metodi iterativi appena visti sono tutti nella forma

$$x^{(n+1)} = B x^{(n)} + C$$

Dunque se poniamo $e^{(n)} = x^{(n)} - x$, con x sol. esatta, abbiamo l'errore dopo n iterazioni. Ricorrendo si ha

$$e^{(n+1)} = B e^{(n)} = B^2 e^{(n-1)} = \dots = B^{n+1} e^{(0)}$$

Abbiamo il seguente risultato

Teorema: Il processo iterativo $x^{(n+1)} = B x^{(n)} + C$

converge per $n \rightarrow \infty$ per un qualunque valore iniziale $x^{(0)}$

se e solo se

$$\rho(B) < 1$$

dove $\rho(B)$ è il raggio spettrale di B , ossia

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i|, \text{ con } \lambda_i \text{ autovaleori di } B.$$

Dim

Per semplicità supponiamo che la matrice B sia diagonalizzabile, ossia

$$B = S \Lambda S^{-1}$$

con S matrice invertibile degli autovettori e

$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i \}$ matrice diagonale degli autovalori.

Allora

$$B^n = \underbrace{S \Lambda S^{-1} \cdot S \Lambda S^{-1} \cdot \dots \cdot S \Lambda S^{-1}}_{n\text{-volte}} = S \Lambda^n S^{-1}$$

Ora Λ^n è la matrice diagonale con elementi le potenze n -esime degli autovalori e $\Lambda^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$
 $\Leftrightarrow \lambda_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i$ ossia $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i$.



OSS: Una matrice è detta a diagonale dominante in senso stretto se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i$$

È possibile dimostrare che per matrici che soddisfanno l'ipotesi sopra il procedimento iterativo di Jacobi converge.

OSS: Il metodo di Gauss-Seidel ha una velocità di convergenza doppia rispetto al metodo di Jacobi.

Il metodo SOR converge per $0 < \omega < 2$ per matrici

A diagonale dominante in senso stretto.

EQUAZIONE DEL CALORE IN PIÙ DIMENSIONI

Considero il caso dell'eq. del calore

$$u_t = \Delta u \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \quad d=2, 3$$

in particolare per $d=2$ considero il problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ u|_{\partial\Omega} = \bar{u}(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Come vedremo la risoluzione di tali problemi è strettamente collegata ai metodi iterativi visti in precedenza per problemi ellittici.

Considero dunque anche in questo caso il semplice dominio $\Omega = [0, L] \times [0, L']$. Nelle soluzioni viste in precedenza l'applicazione del metodo delle linee porta al sistema di eq. diff. ordinarie

$$(u_{ij})_t = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{ij}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{ij}}{\Delta y^2}$$

per $i = 2, \dots, N-1$ e $j = 2, \dots, n-1$.

L'applicazione del metodo di Eulero esplicito non comporta difficoltà e conduce alla schema

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)$$

Ragionando analogamente a quanto fatto nel caso unidimensionale e' immediato determinare che l'errore di troncamento e' $O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$ e che il metodo risulta stabile per

$$\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Il metodo implicito al contrario conduce ad un sistema lineare di grandi dimensioni analogo a quello che abbiamo dovuto affrontare nella risoluzione dei problemi ellittici.

OSS: Il metodo di Eulero esplicito per $\Delta x = \Delta y = \Delta$

$$\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\Delta t}{\Delta^2} = \frac{1}{4} \quad \text{corrisponde}$$

esattamente all'iterazione di Jacobi per la risoluzione di

$$\Delta u = 0.$$

I metodi iterativi per problemi ellittici dunque possono essere interpretati come problemi dipendenti dal tempo in cui l'iterazione rappresenta l'evoluzione temporale.

L'iterazione di Gauss-Seidel può essere derivata dal metodo semi-esplicito

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^{n+1} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^{n+1} \right)$$

risolvibile esplicitamente per $i=2, \dots, N-1$ e $j=2, \dots, M-1$.

La scelta $\Delta x = \Delta y = \Delta$ e $\frac{\Delta t}{\Delta^2} = \frac{1}{4}$ porta esattamente

all'iterazione di Gauss-Seidel vista in precedenza, nel caso si applichi a $\Delta u = 0$.

Il metodo appena illustrato non migliora però le proprietà di stabilità del metodo esplicito.

Per queste ragioni si sono cercati approcci alternativi che non soffrono delle complessità computazionali del metodo implicito ma che consentono di scegliere dei passi Δt non vincolati a Δx^2 e a Δy^2 .

IL METODO ADI

Allo scopo di ottenere un metodo con buone caratteristiche di stabilità e la stessa efficienza computazionale del metodo esplicito in una dimensione si considerano metodi impliciti in una direzione alla volta. Tali metodi vanno sotto l'acronimo ADI (alternati implicit directions).

Tale approccio è strettamente collegato alla tecnica dei passi frazionari (o metodo di splitting) basata sul risolvere il problema nell'intervallo $[0, \Delta t]$ tramite

$$(1) \begin{cases} u_t^1 = u_{xx}^1 \\ u^1(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_t^2 = u_{yy}^2 \\ u^2(0, x, y) = u_1(\Delta t, x, y) \end{cases}$$

ponendo poi $u^2(\Delta t, x, y)$ come soluzione approssimata del problema al tempo Δt .

Utilizzando un metodo esplicito in entrambi i precedenti passi otteniamo il metodo

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= u_{ij}^n \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1,j}^{nn} + u_{i-1,j}^{nn} \\ u_{ij}^{nn} &= u_{ij}^* + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \left(u_{i,j+1}^{nn} + u_{i,j-1}^{nn} - 2 u_{ij}^{nn} \right) \end{aligned}$$

Il metodo appena visto, in particolare, può essere implementato sfruttando due volte le routine realizzate per il calcolo del metodo applicato in una dimensione.

Posiamo costruire un metodo di ordine 2 utilizzando Crank-Nicolson in ogni direzione. Tale metodo va evidenziato risulterà di ordine 2 solo per problemi lineari. Nel caso non lineare il precedente splitting nei problemi (1) e (2) origina infatti un metodo di ordine Δt nel tempo a prescindere dall'accuratezza con cui si risolvono (1) e (2).

OSS: Esistono numerosi altri modi di sfruttare la strategia ADI, noi ne abbiamo illustrata una delle più semplici. L'estensione a tre dimensioni non comporta alcuna difficoltà aggiungendo semplicemente un ulteriore splitting dimensionale.