

EQUAZIONI IPERBOLICHE

Caratteristiche

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$u = u(x, t)$ equazione lineare del primo ordine,

con $a = a(x, t)$.

Nonostante sia la più semplice tra tutte le PDEs la sua approssimazione non è per nulla un problema banale. Le direzioni caratteristiche dell'equazione precedente sono le soluzioni dell'equazione diff. ordinaria:

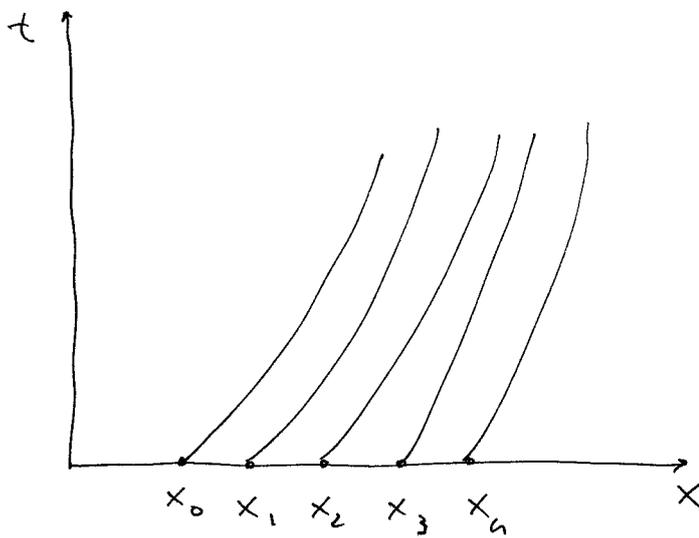
$$\frac{dx}{dt} = a(x, t)$$

e lungo queste direzioni la soluzione $u(x, t)$ soddisfa

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

Considerato quindi il dato iniziale $u_0(x)$ possiamo costruire un'approssimazione dell'equazione scegliendo un insieme di punti x_0, x_1, \dots , e determinando la curva caratteristica $u_i(x_i, 0)$ risolvendo l'EDO con condizione iniziale $x(0) = x_i$.

Oss: Abbiamo un'EDO per ogni punto, cambia solo la condizione iniziale.



In tutti i punti di queste curve si ha $u(x, t) = u^0(x_i)$.

Questo modo di procedere è detto metodo delle caratteristiche.

Si noti che le caratteristiche non possono intersecarsi in un problema lineare con $a(x, t)$ funzione ovunque continua in t e lipschitziana in x .

OSS: Se $a(x, t) = \text{const} = a$, allora l'EDO fornisce le soluzioni esatte $x - at = x_i$ e di conseguenza le soluzioni

$$u(x, t) = u^0(x - at).$$

OSS: Se $a = a(u)$, ancora le direzioni caratteristiche sono linee rette poiché u è costante lungo le direzioni caratteristiche, anche se non sono più parallele. Abbiamo

$$u(x, t) = u^0(x - a(u(x, t))t)$$

queste almeno fino a quando le direzioni caratteristiche non si intersecano in qualche modo (vedremo in seguito).

le direzioni caratteristiche sono essenziali nella costruzione di metodi numerici per equazioni iperboliche.

Leggi di conservazione

Nella maggior parte delle applicazioni si ha le equazioni recenti di approssimati sistemi di leggi di conservazione nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0$$

dove $U = U(x, t) \in \mathbb{R}^m$, $F(U) \in \mathbb{R}^m$ vettore flusso.

Esempio: $m = 2$, $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u, v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g(u, v) = 0 \end{cases}$$

o in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

poiché $\frac{\partial}{\partial x} g(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$

Se definisco le variabili precedenti (nel caso generale)

$$A(U) := \frac{\partial F}{\partial U}$$

ossia lo Jacobiano formato dalle derivate parziali di F in U

$$U_t + A(U) U_x = 0$$

e le velocità caratteristiche del sistema sono gli autovalori

della matrice A .

Il sistema si dice iperbolico se A ha autovalori

reali ed ha un insieme completo di autovettori.

Se indichiamo con Λ l'insieme degli autovalori e con

S l'insieme degli autovettori di sinistra si ha

$$SA = \Lambda S$$

$$\text{da } A = S^{-1} \Lambda S.$$

Moltiplicando allora l'eq. precedente per S otteniamo

$$S U_t + SA U_x = S U_t + \Lambda S U_x = 0$$

detto forma normale caratteristica.

Se è possibile definire il

vettore R t.c. $R_t = S U_t$, $R_x = S U_x$ allora

$$R_t + \Lambda R_x = 0$$

dove R è detto vettore degli invarianti di Riemann e

l'equazione risultante è un generalizzato dell'equazione scalare di abbinata considerata all'inizio dove $\alpha = \alpha(u)$.

Oss: Ogni componente di Λ ora dipenderà da tutte le componenti di R per cui le caratteristiche non sono rette o curve. La determinazione degli invarianti di Riemann non è sempre possibile se $n > 2$.

Oss: In pratica il metodo delle caratteristiche è basato sull'integrazione simultanea di $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_i(R) & i = 1, \dots, n \\ x(0) = x_j & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

e l'equazione

$$\partial U_t + \Lambda \partial U_x = 0$$

Ovviamente la procedura è abbastanza complicata e fornisce un metodo numerico non preciso.

In due dimensioni va detto che le diverse caratteristiche di diverse superfici caratteristiche e la realizzazione del metodo diventa troppo costosa e complicata in generale.

Si noti inoltre che ad ogni punto Δt cambia la distribuzione iniziale dei punti di abbinamento nelle iniziali. Nel proseguo ci limiteremo a considerare metodi basati su discretizzazioni finite nello spazio.

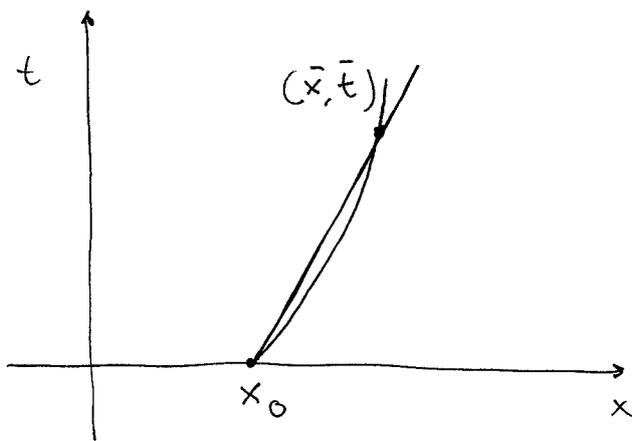
DOMINIO DI DIPENDENZA

L'equazione

$$u_t + a u_x = 0$$

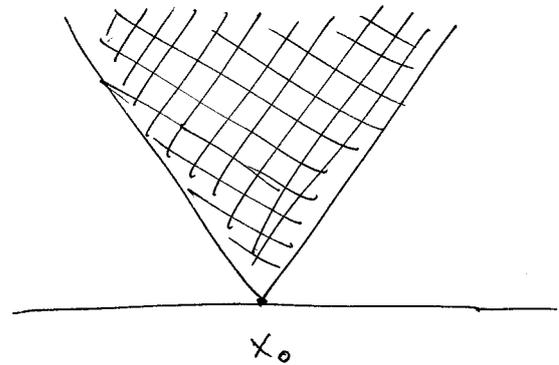
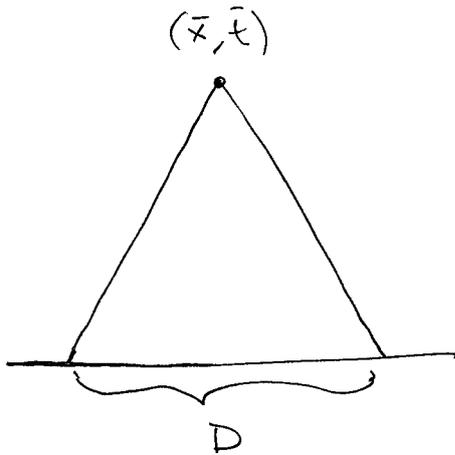
con $a = a(x)$ ha le seguenti proprietà:

La soluzione $u(x,t)$ in ogni punto (\bar{x}, \bar{t}) dipende solo dal dato iniziale u_0 in un punto prefissato. Ovvero il punto x_0 t.c. (\bar{x}, \bar{t}) appartiene alla curva caratteristica per x_0 .



L'insieme $\{x_0\}$ è detto il dominio di dipendenza del punto (\bar{x}, \bar{t}) . Tipicamente nel caso di sistemi tali dominio di dipendenza non sarà un punto ma un intervallo. In particolare, per l'iperbolicità, tale intervallo sarà sempre limitato. Analogamente un dato iniziale assegnato in un punto x_0 può influenzare la soluzione

solo all'interno di un cono, detto intervallo di influenza,
con vertice in x_0 .



Oss: Tali proprietà dovranno essere verificate anche dagli
schemi numerici.

METODI UPWIND E CONDIZIONE CFL

$$u_t + a u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

con a costante e $u(x, 0) = u_0(x)$

$$x_i = i \Delta x \quad i = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$t^n = n \Delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

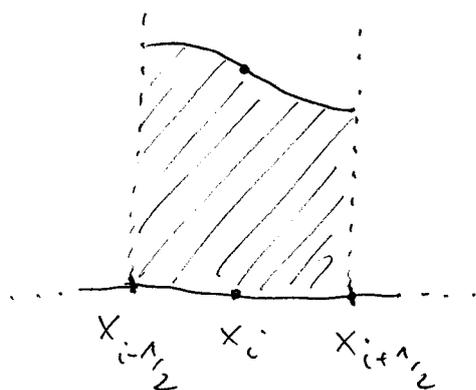
$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{\Delta x}{2} = \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x$$

$u_i^n = u(x_i, t^n)$ definito negli odi e vedi di

cella

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx$$

Spesso i nodi vicini sono basati sull'utilizzo della media di celle invece che dei valori puntuali.



Il valore \bar{u}_i di \bar{u}_i integrando la precedente equazione tra $x_{i-1/2}$ e $x_{i+1/2}$ si ottiene

$$\left(\bar{u}_i\right)_t^+ A \frac{u(x_{i+1/2}, t) - u(x_{i-1/2}, t)}{\Delta x} = 0$$

$$\text{con } \bar{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx$$

Avendo quindi retale considero l'evoluzione di tali medie di celle.

Suppongo di discretizzare l'equazione utilizzando un metodo esplicito sul sistema

$$\left(u_i\right)_t^+ + a \delta_B u_i = 0$$

omk

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

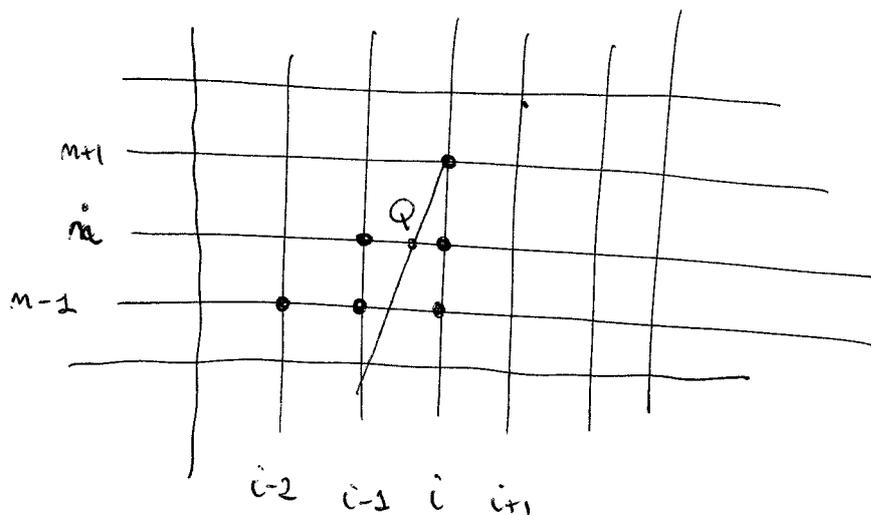
da cui

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + \frac{a \Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n$$
$$= u_i^n (1 - \tau) + \tau u_{i-1}^n$$

con $\tau = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Il valore di u_i^{n+1} dipende dai valori u_i^n e u_{i-1}^n .

Questi a loro volta dipendono dai valori u_i^{n-1} , u_{i-1}^{n-1} , u_{i-2}^{n-1} .



Se $\tau \leq 1$ la soluzione è calcolata come interpolazione

lineare fra u_i^n e u_{i-1}^n in accordo con le direzioni caratteristiche per $a > 0$.

In modo analogo per $a < 0$ si ottiene

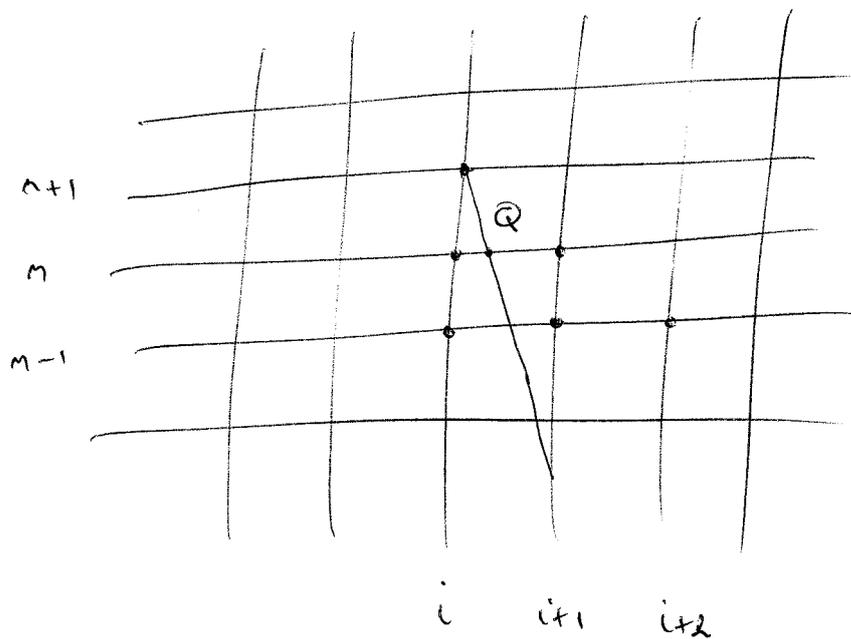
$$(u_i)_t + a \delta_A u_i = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - \frac{a \Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n$$

$$= u_i^n (1 - \delta) + \delta u_{i+1}^n$$

$$\delta = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



Per $\delta \leq 1$ (condizione CFL) la soluzione rispetta le direzioni caratteristiche.

N.B. CFL acronimo di Courant, Friedrichs e Levy

METODO UPWIND: Analisi di Fourier

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), & a < 0 \\ u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), & a > 0 \end{cases}$$

condizione CFL: $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$

Posto ora $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ l'analisi di Fourier fornisce
per $a > 0$

$$\xi = 1 - \nu (1 - e^{-iK\Delta x})$$

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \left[(1 - \nu) + \nu \cos K\Delta x \right]^2 + \left[\nu \sin K\Delta x \right]^2 \\ &= (1 - \nu)^2 + \nu^2 + 2\nu(1 - \nu) \cos K\Delta x \\ &= 1 - 2\nu(1 - \nu) (1 - \cos K\Delta x) \end{aligned}$$

$$|\xi|^2 = 1 - 4\nu(1 - \nu) \sin^2 \frac{K\Delta x}{2}$$

ossia $|\xi| \leq 1$ per ogni K e $0 \leq \nu \leq 1$.

Lo stesso risultato vale (esercizio) nel caso $a < 0$,
con a sostituito da $|a|$.

Per l'errore di troncatura del metodo upwind sappiamo che è $O(\Delta t + \Delta x)$.

In particolare avremo ($a > 0$ per semplicità)

$$T_i^n = \frac{1}{2} (\Delta t u_{tt} - a \Delta x u_{xx}) + \dots$$

poiché $u_t + a u_x = 0$ $u_{tt} + a(u_t)_x = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

quindi

$$T_i^n = -\frac{1}{2} (1 - \nu) a \Delta x u_{xx}$$

con $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Per l'errore in particolare avremo

$$e_i^{n+1} = (1 - \nu) e_i^n + \nu e_{i-1}^n - \Delta t T_i^n$$

con $e_0^n = 0$ quindi se $0 \leq \nu \leq 1$

$$E^n = \max_i |e_i^n|$$

$$E^{n+1} \leq E^n + \Delta t \max_i |T_i^n| \leq E^n + \Delta t T$$

$$\leq (n+1) \Delta t T$$

$$E^n \leq n \Delta t T = t_f T$$

da cui la convergenza dello stesso caso nel caso

dell'equazione del calore se la soluzione ha derivate seconde limitate e se $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ soddisfacendo la condizione CFL.

METODO DI LAX o LAX-FRIEDRICHS

Abbiamo visto che al secondo ordine abbiamo una soluzione incondizionatamente stabile con le differenze centrali (esercizio)

L'uso di metodi espliciti non è però necessario visto che il metodo implicito ha stabilità del tipo $\Delta t \propto \Delta x$ e quindi un metodo al secondo ordine in Δt e Δx con la stessa restrizione andrebbe bene.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

se ora sostituiamo $u_i^n \rightarrow \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$

che è una buona approssimazione di ordine due in Δx

otteniamo la soluzione

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) -$$

Tale soluzione avrà ovviamente la stessa accuratezza della soluzione centrale e in più la condizione sul dominio di dipendenza non è capricciosa $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$ con a di segno qualunque.

OSS: Nel caso di leggi di conservazione le condizioni CFL dipende dalle celle in generale poiché

$$a = f'(u) \quad \text{avvece}$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|f'(u_i^n)|}$$

in ogni cella.

Le indicata con $\bar{f} = \max_{i,n} |f'(u_i^n)|$ allora se

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\bar{f}}$$

il metodo risulta stabile.

Esercizio: Verificare che l'idea numerica basata sulle differenze centrali e Eulero esplicito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

risulta incondizionatamente instabile, ossia non è possibile determinare un relazione tra Δt e Δx in modo che l'analisi di Von Neumann porti ad un metodo stabile.

METODO DI LAX-FRIEDRICHS : Analisi di Fourier

Sappiamo che

$$u(x_{i+1})^n = u(x_i)^n + \Delta x u'(x_i)^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''(x_i)^n$$

$$u(x_{i-1})^n = u(x_i)^n - \Delta x u'(x_i)^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''(x_i)^n$$

da cui

$$u(x_i)^n = \frac{1}{2} (u(x_{i+1})^n + u(x_{i-1})^n) + O(\Delta x^2)$$

di conseguenza la precedente modifica non altera l'ordine complessivo della soluzione $O(\Delta t + \Delta x^2)$.

Vediamo la stabilità della soluzione

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

da cui posti $u_i^n = \xi^n e^{IK_i \Delta x}$ si ha

$$\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{IK\Delta x} & -IK\Delta x \\ e^{-IK\Delta x} & -IK\Delta x \end{pmatrix} - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} \begin{pmatrix} e^{IK\Delta x} & -IK\Delta x \\ e^{-IK\Delta x} & -IK\Delta x \end{pmatrix}$$

$$= \cos(K\Delta x) - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \mp \sin(K\Delta x)$$

$$\xi^2 = \cos^2(K\Delta x) + a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(K\Delta x)$$

da cui se $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$ il metodo
risultava stabile.

METODO EQUAZIONE MODIFICATA

Tale tecnica si basa sullo scrivere una serie
alle differenze finite utilizzando solo gli
operatori alle differenze centrali per le derivate
spaziali ed Eulero esplicito per il tempo.

Lo schema precedentemente può essere riscritto come

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n) -$$

$$- a \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$= \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2} \right) -$$

$$- a \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

che corrisponde a discretizzare tramite operatori
 elementari l'equazione alle derivate parziali

$$u_t + a u_x = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} u_{xx}$$

ovvia un'equazione che contiene un termine
 differenziale aggiunto con coefficiente di diffusione

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad \text{Poiché} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|} \quad \text{abbiamo}$$

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \geq \frac{\Delta x}{2} |a|$$

OSS: l'effetto del termine differenziale sarà tanto
 più evidente quanto più Δt è piccolo -
 la scelta $\Delta t = \frac{\Delta x}{|a|}$ quindi minimizza gli
 effetti "indesiderati" ossia non necessari alla
 stabilità del metodo -

OSS: se effettuiamo lo stesso tipo di analisi per
 il metodo upwind otteniamo, ad esempio se $a > 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + a \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{2\Delta x}$$

ossia

$$u_t + a u_x = \frac{a}{2} \Delta x u_{xx}$$

ossia in questo caso il termine di diffusione
 ha coefficiente $a \frac{\Delta x}{2}$, ossia il minimo richiesto
 dello schema Lax-Friedrichs - In generale per
 il metodo upwind la parte diffusiva ha coefficiente
 $\frac{|a|}{2} \Delta x$ -

Abbiamo quindi lo schema di ordine più elevato
 $O(\Delta t + \Delta x^2)$ lo schema Lax-Friedrichs

contiene un termine diffusivo "artificiale" maggiore
 di quello upwind -

Questo caso richiede comporta una perdita di accuratezza
 nelle soluzioni, visto che di fronte ha un
 fenomeno completamente nuovo -

Abbiamo un metodo più accurato del quello
però ci aspettiamo che il dato iniziale
per effetto delle differenze artificiali

verga in qualche modo "smussato"
raggiungete che non vi metodi upwind.

Oss: Nel caso in cui $\Delta t = \frac{\Delta x}{|a|}$ i metodi

vergono a coincidere ed otteniamo un

particolare

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_{i-1}^n & a > 0 \\ u_{i+1}^n & a < 0 \end{cases}$$

ovvia la rappresentazione delle soluzioni esatte

$$u(x, t) = u_0(x - a t)$$

sui punti griglia, infatti nell'intervallo $[t^{n+1}, t^n]$

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i - a \Delta t, t^n)$$

Questo è un caso particolare dovuto alle proprietà
del problema prototipo - se $\Delta t < \frac{\Delta x}{|a|}$ valgono
invece le conclusioni precedenti

OSS: Vedremo che il problema nel caso delle equazioni iperboliche non quello di avere metodi si accurati ma nei quali l'effetto della diffusione artificiale necessaria a rendere il metodo stabile risulta minimo.

NOTA: Abbiamo costruito un metodo per l'equazione

$$u_t + a u_x = b u_{xx}$$

della convezione - diffusione, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Tale metodo è

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \Delta t \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + b \Delta t \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

e le condizioni di stabilità fornite

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2b} \quad \text{con} \quad \frac{b}{\Delta x} \geq \frac{|a|}{2}$$

$$\text{da cui} \quad \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2b} \leq \frac{\Delta x}{|a|} -$$

OSS: Oltre ad una relazione su Δt ne abbiamo una su

$$\Delta x \leq \frac{2b}{|a|} - \text{L'ordine è } O(\Delta t + \Delta x^2) -$$

In molti problemi pratici b è molto più piccola di a e quindi la restrizione

$$\Delta x \leq \frac{2b}{|a|}$$

è molto forte.

Possono pensare di utilizzare il metodo upwind al posto delle differenze centrali. Otteniamo così per $a > 0$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \Delta t + b \Delta t \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

ed in questo caso l'analisi di stabilità fornisce

$$2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} b + \frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq 1$$

da cui abbiamo

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2b + a \Delta x}$$

condizione più forte su Δt ma senza condizioni su Δx . Ovviamente è l'ordine di $O(\Delta t + \Delta x)$.

OSS: Lo schema di Lax-Friedrichs presenta un notevole vantaggio rispetto ai metodi upwind nel caso di leggi di conservazione non lineari

$$U_t + F(U)_x = 0$$

con $U \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

In fatti ad esempio per $m=1$ si ha

$$u_t + f(u)_x = 0$$

e lo schema LxF risulta esplicito

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n))$$

Al contrario il metodo upwind richiede il calcolo di $f'(u)$ e la conoscenza del segno di questo, infatti

$$u_t + f'(u) u_x = 0$$

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_i^n - f'(u_i^n) (u_i^n - u_{i-1}^n), & f'(u_i^n) > 0 \\ u_i^n - f'(u_i^n) (u_{i+1}^n - u_i^n), & f'(u_i^n) < 0 \end{cases}$$

Per sistemi

è quindi necessario il calcolo della Jacobiana

ossia della matrice $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)$ di risulta u' generale

espressioni costanti -

Un altro metodo di rendere stabile l'uso delle differenze centrali è dato dallo schema LEAPFROG.

In questo caso i nodi cambiati e discretizzazioni temporali nelle forme "centrate" anch'esse

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Lo schema ha quindi ordine $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ ma

utilizza tre livelli temporali, $n-1, n, n+1$.

L'analisi di Fourier fornisce esplicitamente un'equazione

quadratica in ξ

$$\xi^2 - 1 + 2i\sqrt{\nu} \xi \sin(K\Delta x) = 0, \quad \nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

de la radici:

$$\xi_{\pm} = -i\sqrt{\nu} \sin(K\Delta x) \pm \left[1 - \nu^2 \sin^2(K\Delta x) \right]^{1/2}$$

con $\xi_+ \cdot \xi_- = -1$, e quindi $\xi_+ = -\bar{\xi}_-$.

Se $|\nu| \leq 1$ è possibile provare che sia ξ_+ che

ξ_- sono radici complesse ed in questo caso

$|\xi_+| \leq 1, |\xi_-| \leq 1$ e lo schema è stabile.

PROBLEMA: La presenza di due radici reali e la presenza di due soluzioni per lo stesso. Una avrà senso fisico, l'altra invece è una soluzione "spuria" o un artefatto numerico. Tale artefatto numerico come vedremo si tradurrà in oscillazioni presenti nello stesso, o onde che si propagano a velocità sbagliate.

Lo schema LEAPFROG è però interessante nel caso di sistemi del tipo

$$u_t + a u_x = 0$$

$$v_t + a v_x = 0$$

che corrispondono all'equazione delle onde $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

È possibile in questo caso distinguere le false soluzioni dello schema del tipo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{v_{i-1/2}^{n+1/2} - v_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{v_{i+1/2}^{n+3/2} - v_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

due abbiamo ottenuto anche i nodi $x_{i+1/2} = x_i + \frac{\Delta x}{2}$.

Eliminando v si ottiene la soluzione reale per l'eq. delle onde.

N.B. Lo schema risulta stabile ed il precedente modo spurio non è presente.

LAX-WENDELROFF

$$u_t + a u_x = 0$$

$$u_t = -a u_x$$

$$u_{tt} = -a(u_x)_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t) + \dots$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t a u_x(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} a^2 u_{xx}(x, t)$$

a queste punti si approssimano u_x e u_{xx} tramite differenze centrali ottenendo così lo schema

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \Delta t \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + a^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

che può essere anche visto come lo schema centrale con una diffusione numerica aggiunta con coefficiente di diffusione $D = a^2 \frac{\Delta t}{2}$.

Per costruzione il metodo è di ordine $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. L'analisi di Fourier fornisce

$$|\xi|^2 = 1 - 4\nu^2 (1 - \nu^2) \sin^4\left(\frac{\kappa \Delta x}{2}\right)$$

da cui ancora si $|\nu| \leq 1$ lo schema risulta stabile.

Osserviamo che lo stesso è vero anche per il caso $L \times F$, in realtà u^i $L \times F$ è la differenza numerica tra i valori della differenza numerica del metodo upwind in questo caso poiché $|a| \Delta t \leq \Delta x$ in L

$$a^2 \frac{\Delta t}{2} \leq a \frac{\Delta x}{2}$$

ossia la differenza numerica è anche minore rispetto a quella del metodo upwind.

Nel caso in cui $a = a(x, t)$ o nel caso di leggi di conservazione

$$u_t + f(u)_x = 0$$

la derivazione del metodo è leggermente diversa.

Nella precedente serie di Taylor potremo scrivere

$$u_t = -f(u)_x$$

$$u_{tt} = -f(u)_{tx} = -(f'(u)u_t)_x = (f'(u)f(u)_x)_x$$

$$u(t+\Delta t) = u(x, t) - \Delta t f(u)_x + \frac{\Delta t^2}{2} (f'(u)f(u)_x)_x$$

discretizzando ora

$$f(u)_x = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_{i-1}))}{\Delta x}$$

$$\left[f'(u) f(u)_x \right]_x = - \frac{1}{\Delta x} \left[f'(u_{i+1/2}) \frac{f(u_i) - f(u_{i-1}))}{\Delta x} - f'(u_{i-1/2}) \frac{f(u_i) - f(u_{i-1}))}{\Delta x} \right]$$

$$u_{i+1/2} = \frac{1}{2} (u_i + u_{i+1})$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Tipicamente un'equazione della forma

$$u_t + a u_x = 0, \quad x \in [0, L]$$

viene completata con condizioni al contorno in

$x=0$ se $a > 0$, $x=L$ se $a < 0$.

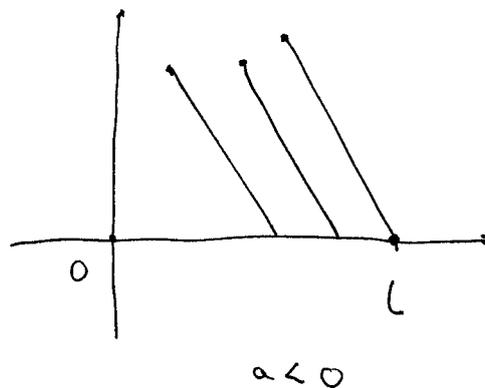
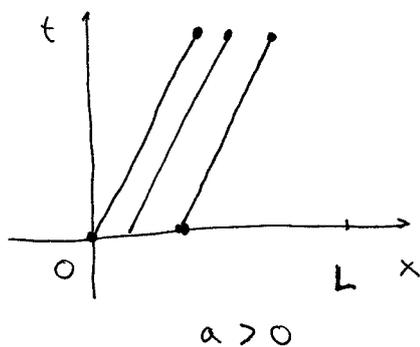
In fatti poiché la soluzione esatta è

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

con $u_0(x)$ dato iniziale, si vede bene come

se $a > 0$ la soluzione in (x, t) dipende solo

da quella in $(x - at, 0)$.



A questo proposito va detto che i metodi centrali,

ormai tutti meno di l'upwind, presentano lo svantaggio

di richiedere una condizione aggiuntiva anche in $x=L$

se $a > 0$ ed in $x=0$ se $a < 0$.

In fatti u_i^{n+1} è dato in funzione di $u_i^n, u_{i+1}^n, u_{i-1}^n$

quindi se $a > 0$ in $i=1$ avendo il valore al contorno assegnato, ma per calcolare la soluzione in $i=N$ abbiamo

bisogna del valore u in $N+1$. Analogamente $a < 0$

è necessario un valore u in 0 .

Una possibilità è quella di usare il metodo upwind per quest'ultimo punto (ma l'ordine è abbassato) -

Un'altra tecnica è quella di assumere u_{N+1} come valore interpolato utilizzando un'espansione in serie di Taylor

$$u(x_{N+1}, t) = u(x_N, t) + 2\Delta x u_x(x_N, t) + O(\Delta x^2)$$

da cui

$$u_{N+1} = u_{N-1} + 2\Delta x \frac{u_N - u_{N-2}}{2\Delta x} = u_{N-1} + u_N - u_{N-2}$$

○ negli sviluppi u_N a sinistra e a destra si ha

$$u_N = \frac{1}{2}(u_{N+1} + u_{N-1}) \Rightarrow u_{N+1} = 2u_N - u_{N-1}$$

analogamente

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + u_2) \Rightarrow u_0 = 2u_1 - u_2$$

Altre scelte sono $u_{N+1} = u_N$ e $u_0 = u_1 -$

ESTENSIONE A PIÙ DIMENSIONI

Se considero una semplice equazione lineare in due dimensioni

$$u_t + a u_x + b u_y = 0$$

con dato iniziale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ si vede

che la soluzione esatta è $u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$.

I metodi precedenti possono essere estesi al modo naturale semplicemente operando al modo separato su ogni variabile.

Ad esempio il metodo upwind fornisce

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - a (u_{ij}^n - u_{i-1,j}^n) - b (u_{ij}^n - u_{i,j-1}^n), \quad a > 0, b > 0 \\ \text{Analogamente si ricavano i restanti casi } a > 0, b < 0, \\ a < 0, b > 0 \quad \text{e} \quad a < 0, b < 0. \end{array} \right.$$

il metodo è stabile se $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} + |b| \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq 1$.

Analogamente prima esisteva il metodo di Lax-Friedrichs, ed il metodo Lax-Friedrichs.

In particolare osservando che al posto di risolvere il problema precedente risolverlo in due passi si utilizza

$$1) \begin{cases} u_t^* + a u_x^* = 0 \\ u^*(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

ottenendo $u^*(x, y, t)$ e poi risolvere $(u^*(x, y, t) = u_0(x - at, y))$

$$2) \begin{cases} u_t^{**} + b u_y^{**} = 0 \\ u^{**}(x, y, 0) = u^*(x, y, t) \end{cases}$$

ottenendo $u^{**}(x, y, t) = u_0(x - at, y - at)$ ossia la

soluzione esatta. Questo significa che possiamo risolvere il problema risolvendo separatamente divenne per divenne una serie di problemi monodimensionali.

Se invece ora considero il caso generale di un sistema di leggi di conservazione in 2d

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0$$

con $U \in \mathbb{R}^m$, $F(U), G(U) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

Nel caso di un'equazione singola $m = 1$ abbiamo,

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0.$$

Anche in questo caso è possibile applicare gli schemi precedenti.

Va però detto che nel caso di interazione abbiamo:

$$U_t + A(U)U_x + B(U)U_y = 0$$

$$\text{con } A = \frac{\delta F}{\delta U}, \quad B = \frac{\delta G}{\delta U}.$$

Ora A e B non saranno in generale diagonalizzabili mediante le stesse matrici di autovettori, e deriva che l'applicazione dei metodi upwind basati sul sistema in forma normale risulta molto difficile in generale.

In particolare in questo caso si dimostra che lo splitting proceduto non fornisce più la soluzione esatta ma solo una sua approssimazione di ordine $O(\Delta t)$.

Un metodo per ovviare a questo problema è dato dalla

Splitting di Strang

$$u_t^* + f(u^*)_x = 0 \quad \text{in } [0, t/2]$$

$$u_t^{**} + g(u^{**})_y = 0 \quad \text{in } [0, t]$$

$$u_t^{***} + g(u^{***})_x = 0 \quad \text{in } [0, t/2]$$

In questo caso la soluzione finale $u^{***}(x, t)$ ha ordine $O(\Delta t^2)$. Numerically dovremo risolvere ogni passo con un metodo di ordine almeno due in t .