ELEMENTI FINITI PER L'EQUAZIONE DI POISSON

Abbiamo visto come il problema

$$-\Delta u = f$$

possa essere risolto in generale tramite metodi iterativi in quanto la soluzione diretta del sistema di equazioni risultante è in generale troppo costosa.

In particolare abbiamo osservato come il metodo iterativo di Jacobi sia equivalente ad un metodo esplicito applicato all'equazione del calore bidimensionale

$$u_t = \Delta u + f$$

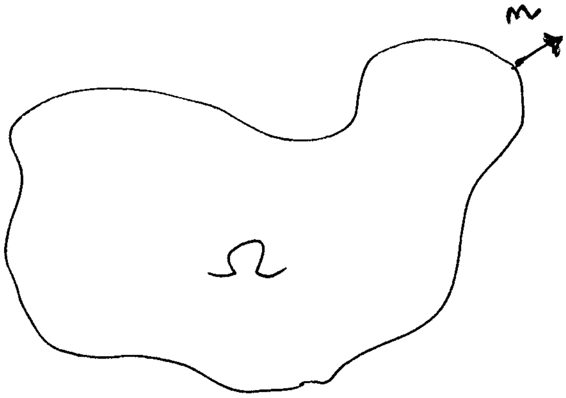
con la scelta del massimo Δt ammissibile dalla condizione di stabilità ossia $\Delta t = \frac{\Delta x^2}{4}$ con $\Delta x = \Delta y$.

Abbiamo infatti che per $t \to \infty$ l'equazione del calore raggiunge una soluzione stazionaria in cui non si hanno più variazioni ossia $u_t = 0$. Ne consegue che

$$-\Delta u = f$$

ossia la soluzione cercata.

Lo svantaggio principale del metodo visto basato sulle differenze finite, sta nella difficoltà di trattare problemi con geometrie complicate, quali in pratica si presentano



<u>TH. DIVERGENZA</u> : Dato un vettore $v = (v_1, v_2)$ definito su Ω si ha

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\, v \, dX = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, d\sigma$$

$n = (n_1, n_2)$ vettore unitario normale a $\partial\Omega$, dX elemento di area in $\mathbb{R}^2$, ds elemento di lunghezza dell'arco lungo $\partial\Omega$.

<u>NOTA</u>: $\mathrm{div}\, v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y}$.

Applicandolo ora ai vettori $v = \left(w \dfrac{\partial u}{\partial x}, 0\right)$, $v = \left(0, w \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ si ha

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\, dX + \int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dX = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial x} n_1 \, d\sigma \\[2ex] \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\, dX + \int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dX = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial y} n_2 \, d\sigma \end{cases}$$

sommando le due precedenti espressioni otteniamo

$$\int_\Omega \operatorname{grad} w \operatorname{grad} u \, dX = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_\Omega w \Delta u \, dX$$

con $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u}{\partial y} n_2$, note come formule di Green.

Consideriamo ora il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

moltiplichiamo per w e integriamo rispetto ad Ω otteniamo una formulazione variazionale del problema, trovare $u \in V$ t.c.

$$-\int_\Omega \Delta u w \, dX = \int_\Omega f w \, dx \quad \forall w \in V$$

con V spazio funzionale opportuno.
Applicando ora il precedente risultato abbiamo

$$+\int_\Omega \operatorname{grad} w \operatorname{grad} u \, dX - \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_\Omega f w \, dx$$

ossia

$$a(u, w) = (f, w) \quad \forall w \in V$$

con $V = \left\{ w \,/\, w \in C^0(\bar{\Omega}), \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in L^2(\Omega), w = 0 \text{ su } \partial\Omega \right\}$ e continue a pezzi in Ω

e $\quad (u, w)$ prodotto scalare.

Si dimostra che $u \in V$ soddisfa al precedente problema se e solo se u è soluzione del problema di minimo

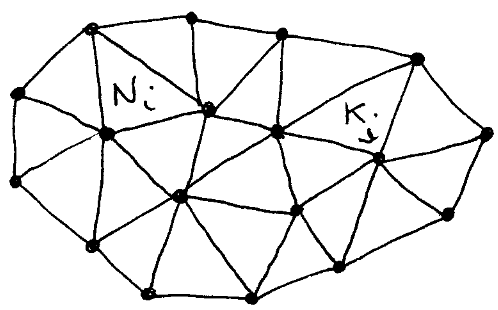
$$J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in V$$

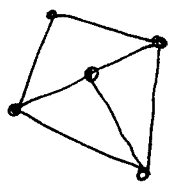
$$J(w) = \frac{1}{2} a(w, w) - (f, w).$$

DEFINIZIONE DI UNO SPAZIO DISCRETO

Assumiamo per semplicità ora che $\partial\Omega$ sia una poligonale e introduciamo su Ω una triangolazione T_h

$$\Omega = \bigcup_{K_j \in T_h}^{m} K_j = K_1 \cup K_2 \cup - \cup K_m$$





NO

$$h = \max_{K_j \in T_h} \operatorname{diam}(K_j) \quad , \quad \operatorname{diam}(K_j) = \text{diametro di } K_j$$

$$V_h = \left\{ w_h \,/\, w_h \in C^0(\bar{\Omega}),\ w_h \text{ lineare su } K \in T_h,\ (w_h)_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

tutte le funzioni continue lineari su ogni triangolo K e che si annullano su $\partial\Omega$.

Si osservi che $V_h \subset V$.

Per descrivere $w_h \in V$ utilizziamo i nodi N_i, $i = 1, \dots, M$ interni al dominio Ω.

Definiamo ora le funzioni $\phi_j \in V_h$ t.c.

$$\phi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 1, \dots, M$$

e definiamo

$$w_h(x) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \phi_j(x) \quad , \quad \lambda_j = w_h(N_j)$$

per $x \in \Omega$. (vedi figura successiva).

Abbiamo quindi il problema discreto (elementi finiti)

trovare $u_h \in V_h$ t.c. $a(u_h, w_h) = (f, w_h) \; \forall w_h \in V_h$.

Il che equivale a risolvere un sistema lineare della forma

$$A \xi = b$$

con $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, $b = (b_i)$

$b_i = (f, \phi_i)$, $\xi = (\xi_i)$, $\xi_i = u_h(N_i)$.

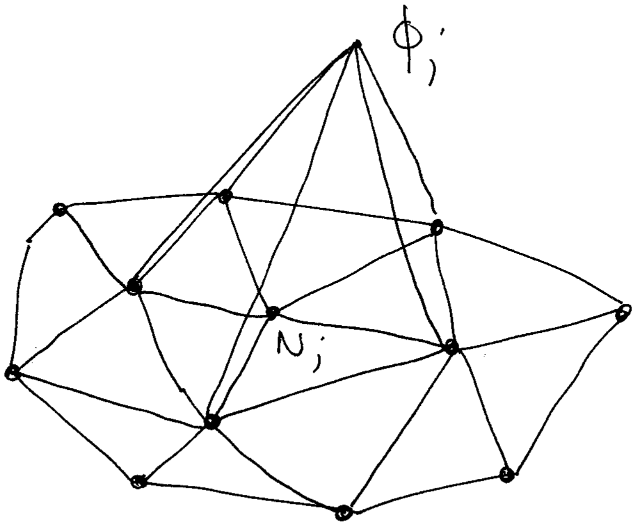
A detta matrice di stiffness ed e' simmetrica e definita positiva, inoltre A e' sparsa in quanto $a_{ij} = 0$ a meno che N_i e N_j non siano nodi dello stesso triangolo.

Gli elementi a_{ij}

$$a(\phi_i, \phi_j) = \sum_{K \in T_h}' a_K(\phi_i, \phi_j)$$

$$= \sum_{K \in T_h}' \int_K \operatorname{grad} \phi_i \operatorname{grad} \phi_j \, dX$$

sono dati dalla somma di contributi dei diversi triangoli.



Il metodo appena descritto è detto metodo di Galerkin agli elementi finiti.

EQUAZIONE DI POISSON: ELEMENTI FINITI

Abbiamo visto che il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio limitato con frontiera $\partial\Omega$)

in forma debole ha la forma

$$+\int_\Omega \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad} u \, dX - \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_\Omega f w \, dx$$

per $w \in V$ spazio funzionale opportuno.

Scegliendo funzioni test w nulle al bordo otteniamo

$$+\int_\Omega \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad} u \, dX = \int_\Omega f w \, dX$$

che in forma compatta diventa

$$a(u, w) = (f, w) \qquad \forall w \in V.$$

con $a(u, w)$ forma bilineare.

Per la disuguaglianza di Cauchy - Schwartz

$$\left| \int_{\Omega} f g \, d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2} \, \|g\|_{L^2}$$

con $\|\cdot\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |\cdot| \, dx}$.

Dunque $a(u, w)$ ha senso se ∇u e $\nabla w \in L^2$

e questo e' garantito se $u, w \in H^1(\Omega)$ spazio di Hilbert

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \;/\; v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

In particolare il termine (f, w) sara' limitato se

$f \in L^2(\Omega)$.

Vale il seguente risultato

Lemma (Lax - Milgram) : Sia V uno spazio di Hilbert, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva. Sia $F : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Allora esiste unica la soluzione del problema :

cercare $u \in V$: $a(u, w) = (f, w) \quad \forall w \in V$.

OSS: Una forma bilineare e' coerciva se

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \qquad \forall \; u \in V$$

OSS: Se la forma bilineare e' simmetrica, ossia

$a(u,w) = a(w,u) \quad \forall \; u,w \in V$ allora il problema e' equivalente a:

cercare $u \in V$: $\displaystyle J(u) = \min_{w \in V} J(w)$

con

$$J(w) = \frac{1}{2} a(w,w) - (f,w)$$

Infatti per $v \in V$

$$J(u+v) = \frac{1}{2}\left[a(u,u) + 2a(u,w) + a(v,v)\right] -$$

$$- \left[(f,u) + (f,v)\right] = J(u) + \left[\overset{0}{\overset{\shortparallel}{a(u,v) - (f,v)}}\right]$$

$$+ \frac{1}{2} a(v,v) = J(u) + \frac{1}{2} a(v,v)$$

Dunque

$$J(u+v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2$$

Posto $w = u+v$ per l'arbitrarietà di v si ha

$$J(w) > J(u) \qquad \forall \; w \in V, \quad w \neq u.$$

ANALISI METODO DI GALERKIN

Abbiamo visto che il metodo di Galerkin corrisponde al problema approssimato

$$(1) \qquad a(u_h, w_h) = (f, w_h) \qquad \forall\, w_h \in V_h$$

con $V_h \subset V$ spazio di approssimazione opportuno.

<u>Esempio</u>: V_h spazio funzioni lineari caratterizzati dalla base φ_j, $j = 1, 2, \ldots, M$ t.c.

$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij}$$

con N_i, $i = 1, 2, \ldots, M$ nodi della mesh computazionale.

In generale data φ_j una base di V_h avremo

$$a(u_h, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, M$$

Ora poiché $u_h \in V_h$ avremo

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{M} u_j \varphi_j(x)$$

con u_j coefficienti incogniti ed il problema (1) diventa

$$\sum_{j=1}^{M} u_j\, a(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \qquad i = 1, \ldots, M$$

Introdotta la matrice di stiffness $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$

abbiamo

$$(2) \qquad A u = b .$$

Teorema: La matrice A è definita positiva e simmetrica.

Dim: La simmetria è conseguenza immediata della definizione di $a(\cdot, \cdot)$.

Vogliamo dimostrare che dato $v_h \in V_h$ $v^T A v \geq 0$ e vale $v^T A v = 0 \iff v = 0$. Nota che $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

$$v_h = \sum_j{}' v_j \varphi_j \Rightarrow v^T A v = \sum_j{}' \sum_i v_i a_{ij} v_j =$$

$$= \sum_j{}' \sum_i v_i \, a(\varphi_j, \varphi_i) v_j = \sum_j{}' \sum_i a(v_j \varphi_j, v_i \varphi_i)$$

$$= a\left(\sum_j{}' v_j \varphi_j , \sum_i{}' v_i \varphi_i\right) = a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_V^2 \geq 0.$$

OSS: Dunque la risoluzione può essere effettuata in modo efficiente tramite decomposizione di Cholesky o metodi iterativi come il gradiente coniugato.

Direttamente dal Lemma di Lax-Milgram si ottiene che

Corollario I: La soluzione di (1) esiste ed è unica.

Osserviamo che poiché (1) è equivalente al sistema lineare (2) ed A è definita positiva allora tale sistema ammette una unica soluzione. Questo è un'altro modo di dimostrare il corollario precedente.

Corollario II: Il problema (1) è stabile nel senso che vale

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} C_1 \|f\|_{L^2}$$

dim:

Dalla coercività di $a(\cdot,\cdot)$ discende

$$\alpha \|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h) = (f, u_h)$$

$$(f, u_h) \leq \|f\|_{L^2} C_1 \|u_h\|_V .$$

$\boxtimes$

Si dimostra inoltre che il metodo è consistente ossia:

Lemma: Il metodo di Galerkin è fortemente consistente

$$a(u-u_h, w_h) = 0 \quad \forall\, w_h \in V_h .$$

dim

$V_h \subset V$ vale

$$a(u, w_h) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in V_h$$

ma essendo

$$a(u_h, w_h) = (f, w_h)$$

sottraendo dalla bilinearità si ottiene la tesi. ☒

OSS: Il risultato precedente esprime il fatto che u_h è la miglior approssimazione di u in V_h. Se $a(\cdot,\cdot)$ fosse il prodotto scalare euclideo, u e u_h vettori allora l'espressione trovata esprimerebbe il fatto che l'errore $u-u_h$ è ortogonale rispetto al sottospazio V_h di V.

Convergenza del metodo di Galerkin

Consideriamo ora

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-w_h) + \overbrace{a(u-u_h, w_h-u_h)}^{0}$$
$$= a(u-u_h, u-w_h)$$

dove $a(u-u_h, w_h-u_h) = 0$ poiché $w_h - u_h \in V_h$.

$$|a(u-u_h, u-w_h)| \leq M \|u-u_h\|_V \|v-w_h\|_V$$

in quanto la forma bilineare è continua.

Per la coercività si ha inoltre

$$a(u-u_h, u-u_h) \geq \alpha \|u-u_h\|_V^2$$

da cui

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u-w_h\|_V \quad \forall w_h \in V_h$$

In particolare

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u-w_h\|_V$$

Dunque se per $h \to 0$ lo spazio V_h coincide con V allora

$$\lim_{h\to 0} \|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \lim_{h \to 0} \inf_{w_h \in V_h} \|u-w_h\|_V = 0 \quad ▮$$

ed il metodo é convergente.

La scelta dello spazio V_h é dunque fondamentale e deve garantire tale convergenza. La velocità di convergenza dipenderà dalla scelta di V_h e dalla regolarità di u.

UNA DEFINIZIONE DI ELEMENTO FINITO

Un elemento dello spazio degli elementi finiti e' caratterizzato da tre ingredienti

1. Il dominio di definizione K dell'elemento (ad esempio un triangolo, un quadrilatero nel caso bidimensionale)

2. Lo spazio dei polinomi $\mathbb{P}_r$ definito su di esso

3. Un insieme finito di punti di K (detti gradi di liberta'), $\{a_j\}$, $j = 1, \dots, m$ con $m \geq r$.

Inoltre l'insieme $\Sigma = \{a_j\}_{j=1,\dots,m}$ deve essere unisolvente rispetto a $\mathbb{P}_r$ ossia il problema dell'interpolazione deve essere ben posto.

Una condizione necessaria e' che $\dim(\mathbb{P}_r) = \mathrm{card}(\Sigma)$ poi basta formare le funzioni base $\varphi_i \in \mathbb{P}_r$ tali che

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Esempi

In due dimensioni possiamo considerare

$$\mathbb{P}_1 = \{ f(x,y) = a + bx + cx \ , \ a,b,c \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{P}_2 = \{ f(x,y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + gy^2, \ a,b,c,d,e,g \in \mathbb{R} \}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}_r = \{ f(x,y) = \sum_{i+j \le r} a_{ij} x^i y^j \quad \text{con } a_{ij} \in \mathbb{R} \}$$

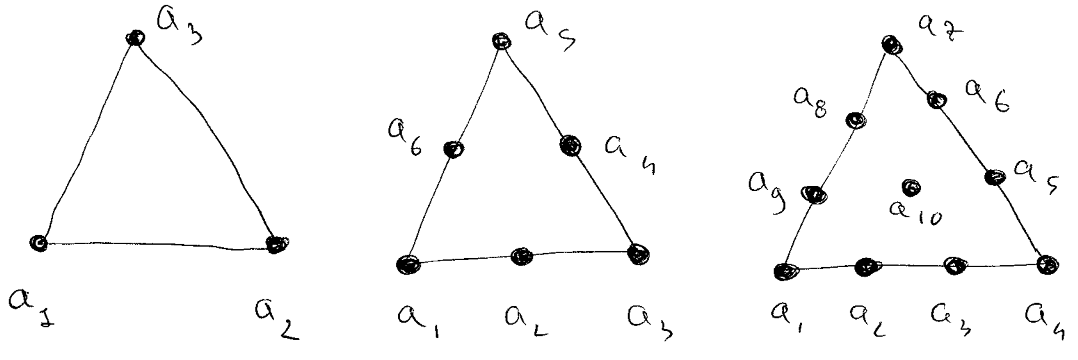
Lo spazio generatore degli elementi finiti ha la forma

$$X_h^r = \{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_r \ , \ \forall K \in T_h \}$$

si noti che vale

$$\dim(\mathbb{P}_r) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

Dunque $\dim(\mathbb{P}_1) = 3$, $\dim(\mathbb{P}_2) = 6$, $\dim(\mathbb{P}_3) = 10$ e in una triangolazione abbiamo bisogno rispettivamente di 3, 6 e 10 nodi opportunamente scelti



OSS: Si può dimostrare che la matrice A associata al metodo di Galerkin è malcondizionata per valori piccoli del parametro h che caratterizza la discretizzazione del dominio computazionale.

In altre parole se $h = \max_{K} h_K$, $h_K = \max_{x,y \in K} |x-y|$

allora il numero di condizionamento $\mu(A)$ della matrice che in norma 2 è dato da

$$\mu(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

con λ_{max}, λ_{min} rispettivamente massimo e minimo autovalore è tale che $\mu(A) = \frac{C}{h^2}$ con C costante opportuna dipendente dal grado degli elementi finiti utilizzati.

OSS: Da quanto visto è chiaro che il metodo di Galerkin può anche essere applicato nel caso monodimensionale. In tale situazione gli elementi finiti sono intervalli e gli spazi coincideranno sostanzialmente con le funzioni splines anche se non imporremo condizioni ulteriori sulle derivate ma determineremo le polinomiali a tratti utilizzando un numero adeguato di nodi in ogni intervallo.

ELEMENTI FINITI PER EQUAZIONI PARABOLICHE

Consideriamo ora il problema

$$u_t = \Delta u + f \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

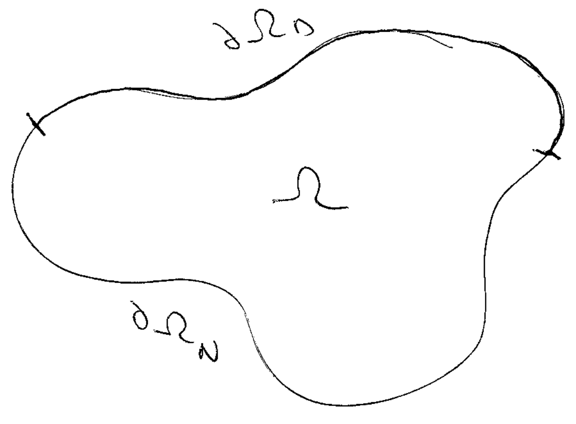
$f = f(x, y, t)$ funzione assegnata. Con le condizioni iniziali e al contorno

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \qquad \text{su } \Omega$$

$$u\big|_{\partial\Omega_D} = \varphi(x, y) \qquad \text{su } \partial\Omega_D$$

in alternativa possiamo avere condizioni di tipo Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_N} = \psi(x, y) \qquad \text{su } \partial\Omega_N$$



Avremo condizioni miste quando $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, condizioni di Dirichlet per $\partial\Omega = \partial\Omega_D$ e di Neumann per $\partial\Omega = \partial\Omega_N$.

Anche in questo caso si procede ad una formulazione debole del problema e si sfruttano i risultati visti per il caso ellittico

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} w \, dx + a(u,w) = (f,w) \quad \forall w \in V$$

dove $a(\cdot,\cdot)$ e $(f,\cdot)$ sono la forma bilineare e il funzionale associati all'operatore di Poisson.

Per semplicità abbiamo supposto $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ al bordo.

Possiamo passare direttamente all'approssimazione di Galerkin

$$(1) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} w_h \, dx + a(u_h, w_h) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in V$$

dove $V_h \subset V$ spazio opportuno a dimensione finita.

A tale problema associamo il dato iniziale

$$u_h(0) = u_{0h} \, .$$

Il problema (1) e' detto problema semi-discreto in quanto la variabile temporale t e' continua. Si noti che rappresenta un diverso modo di applicare il metodo delle linee.

Come in precedenza esprimiamo

$$u_h = \sum_{j=1}^{M} u_j(t)\, \varphi_j(x,y)$$

con $\{\varphi_j\}$ base di V_h e $u_j(t)$ incognite del nostro problema. Per sostituzione in (1) otteniamo

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{M} u_j'(t)\, \varphi_j(x,y)\, \varphi_i(x,y)\, dX +$$

$$a\left(\sum_{j=1}^{M} u_j \varphi_j ,\, \varphi_i\right) = (f,\, \varphi_i) \qquad i = 1, \ldots, M$$

dove si è scelto $w_h = \varphi_i$ in quanto w_h è esprimibile come combinazione lineare della base $\{\varphi_i\}$ e gli operatori coinvolti sono bilineari e lineari.

Ossia

$$\sum_{j=1}^{M} u_j' \int_\Omega \varphi_j \varphi_i \, dX + \sum_{j=1}^{M} u_j\, a(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i)$$

$i = 1, \ldots, M$

Poniamo ora

$$m_{ij} = \int_\Omega \varphi_j \varphi_i \, dx \quad , \quad M = (m_{ij}) \quad \text{matrice di massa}$$

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad , \quad A = (a_{ij}) \quad \text{matrice di stiffness}$$

$$f_i = (f, \varphi_i)$$

abbiamo il problema in forma matriciale

$$M u'(t) + A u(t) = b(t)$$

con $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $b = (f_1, \ldots, f_n)$.

E' facile dimostrare che la matrice M e' definita positiva e dunque invertibile (verifica per esercizio) abbiamo

$$u'(t) = -M^{-1} A u(t) + M^{-1} b(t)$$

Dunque un sistema di EDO che può essere risolto con metodi che abbiamo visto nella prima parte del corso, ad esempio con il metodo di Crank-Nicolson che garantisce un accuratezza di ordine 2 nel tempo.

$$M \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} A \left(u^{n+1} + u^n\right) = \frac{1}{2}\left(b^{n+1} + b^n\right)$$

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{2} A\right) u^{n+1} = \left(\frac{M}{\Delta t} - \frac{1}{2} A\right) u^n + \frac{1}{2}\left(b^{n+1} + b^n\right)$$

$$K u^{n+1} = G$$

con $K = M/_{\Delta t} + \frac{1}{2} A$ matrice associata al sistema

e $G = \left(M/_{\Delta t} - \frac{1}{2} A\right) u^n + \frac{1}{2}\left(b^{n+1} + b^n\right)$ vettore dei termini noti.

Si noti che se la mesh e' fissata nel tempo allora anche K e' una matrice costante e predefinita. Dunque puo' essere fattorizzata all'inizio del processo. Inoltre sia M che A sono simmetriche, dunque anche K e' simmetrica e puo' essere fattorizzata con Cholesky nella forma $K = H H^T$ con H triangolare superiore.

Ad ogni passo temporale si risolveranno dunque due sistemi triangolari in M incognite ognuno dei quali richiede $M^2/2$ operazioni

$$\begin{cases} H y = G \\ H^T u^{n+1} = y \end{cases}$$

OSS: Per quanto riguarda la stabilità è possibile estendere gli stessi risultati visti nel caso delle differenze finite. In particolare il metodo di Eulero implicito ed il metodo di Crank-Nicolson risultano incondizionatamente stabili, ossia stabili $\forall \Delta t$.

Nel caso di Eulero esplicito invece si ottiene una condizione del tipo $\Delta t \leq 2/\lambda_{max}$, con λ_{max} autovalore massimo della matrice di stiffness. In particolare si ha che $\lambda_{max} \sim C/h^2$ da cui una condizione di stabilità analoga a quella vista con le differenze finite.