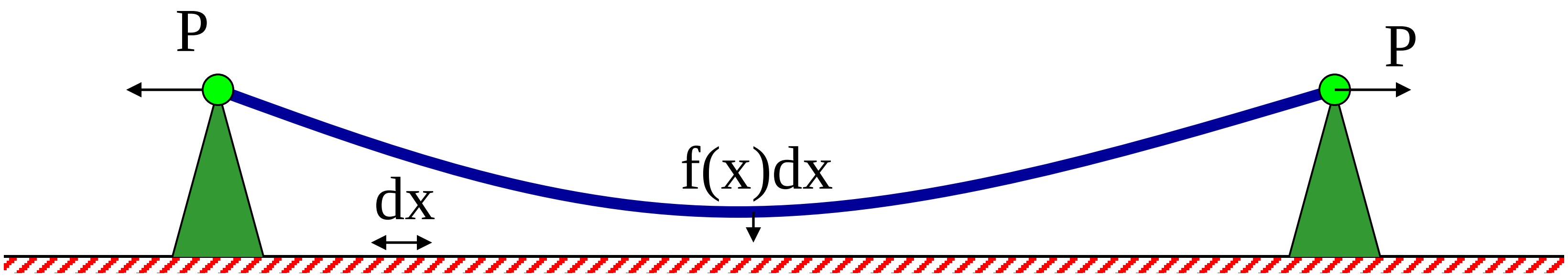
Equazioni Differenziali Ordinarie -BVP

Problemi con Valori al Contorno:

Metodo shooting
Metodo alle differenze
Metodo di collocazione

Problema di Elasticità



$$\begin{cases} -y'' + c(x)y(x) = f(x), & 0 \le x \le L \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

- *y(x)* - momento flettente
- f(x)dx - carico trasversale
- P - tensione
- *c(x)=P/(EI(x))*
- *E* - modulo di Young del materiale
- *I(x)* - momento principale di inerzia in x

La soluzione è unica quando $c(x) \ge 0$

Problemi ai limiti

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b$$

- **Condizioni al contorno di Dirichlet**

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

- **Condizioni al Contorno di Neumann**

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$$

- **Condizioni al contorno miste (Robin)**

$$y'(a) + \alpha_1 y(a) = \alpha, \; y'(b) + \beta_1 y(b) = \beta$$

Condizioni al contorno separate

Problemi ai limiti per una ODE del secondo ordine

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) - \alpha_1 y'(a) = \alpha \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta \end{cases}$$

Equivalente all' IVP:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{bmatrix}, \qquad a \le x \le b$$

Se $\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Problemi fisici retti da BVP del secondo ordine

- Flessione di una trave sottoposta a carico trasversale
- Distribuzione di potenziale elettrico tra due elettrodi
- Distribuzione della temperatura in un mezzo con temperature fissate agli estremi
- .....

Metodo Shooting

- **ODE**

Non lineare

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a \le x \le b \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- Associamo la famiglia dei problemi IVP:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \;\; \mathrm{y}'(a) = s \end{cases}$$

con s *(da determinare)*

- Trasformato opportunamente in un sistema del primo ordine di 2 eqs

Esempio

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\lambda\, y(x)$$

λ è noto

con BC $\quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 0$

Sia $y_1 = y, \;\; y_2 = y',$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\lambda y_1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 0,$$

Metodo Shooting

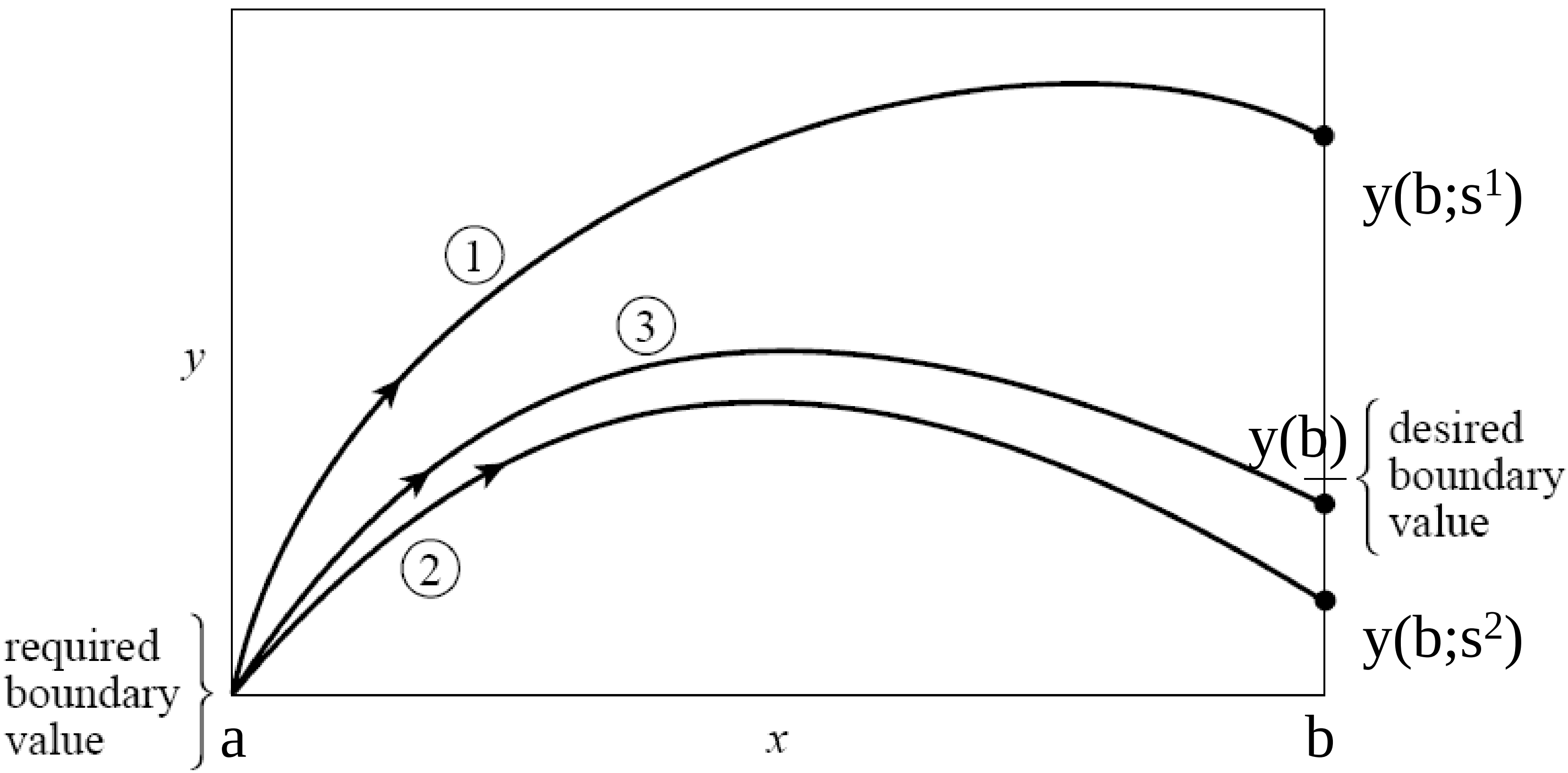


Figure 17.0.1. Shooting method (schematic). Trial integrations that satisfy the boundary condition at one endpoint are "launched." The discrepancies from the desired boundary condition at the other endpoint are used to adjust the starting conditions, until boundary conditions at both endpoints are ultimately satisfied.

Metodo Shooting

Trovare s tale che

$$y(b;s) = \beta$$

Seconda condizione al contorno da soddisfare.
Ricerca di uno zero di una funzione:

$$y(b;s) = \beta \quad \Leftrightarrow F(s) = y(b;s) - \beta = 0$$

Metodi per trovare zeri di funzioni/sistemi non lineari:
- Bisezione (due iterati iniziali)
- Secanti (due iterati iniziali),
- Newton (un iterato iniziale e calcolo F'(x))

Metodo Shooting con metodo delle secanti

Step 1: solve IVP con $\text{y(a)} = \alpha, \ \text{y'(a)} = s(1) \quad \Rightarrow \quad \text{Errore} \ = F(1)$

Step 2: solve IVP con $\text{y(a)} = \alpha, \ \text{y'(a)} = s(2) \quad \Rightarrow \quad \text{Errore} \ = F(2)$

Step 3: metodo secanti per ottenere una nuova stima

while $\left| s(i) - s(i-1) \right| > tol$

$$s(i) = s(i-1) - \frac{s(i-1) - s(i-2)}{F(i-1) - F(i-2)} F(i-1)$$

solve IVP con $\text{y(a)} = \alpha, \ \text{y'(a)} = s(\text{i}) \quad \Rightarrow \quad \text{Errore} \ = F(\text{i})$

end

Step 4: solve IVP con $\text{y(a)} = \alpha, \ \text{y'(a)} = s(i)$

Prepare the MATLAB function:

```
function [t,y]=bvpshoot(func,tspan,x0,tol)
t0=tspan(1); tfinal=tspan(2);
ga=x0(1); gb=x0(2);
s(1)=0;s(2)=1;
[t,u]=ode45(funcn, tspan,[ga, m1]); F(1)=u(end);
[t,u]=ode45(funcn, tspan,[ga, m2]); F(2)=u(end);
i=3;
while (abs(s(i-2)-s(i-1))>tol)
        s(i)=s(i-1)-(s(i-1)-s(i-2))/(F(i-1)-F(i-2)) *F(i-1);
        [t,u]=ode45(funcn, tspan, [ga, s(i)]);
        F(i)=u(end);i=i+1;
end
[t,y]=ode45(funcn, tspan, [ga, s(end)]);
```

Esempio: BVP non lineare

$$\begin{cases} y'' = -2yy', & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1, & y(1) + y'(1) - 0.25 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soluzione esatta} \quad y = 1/(x+1)$$

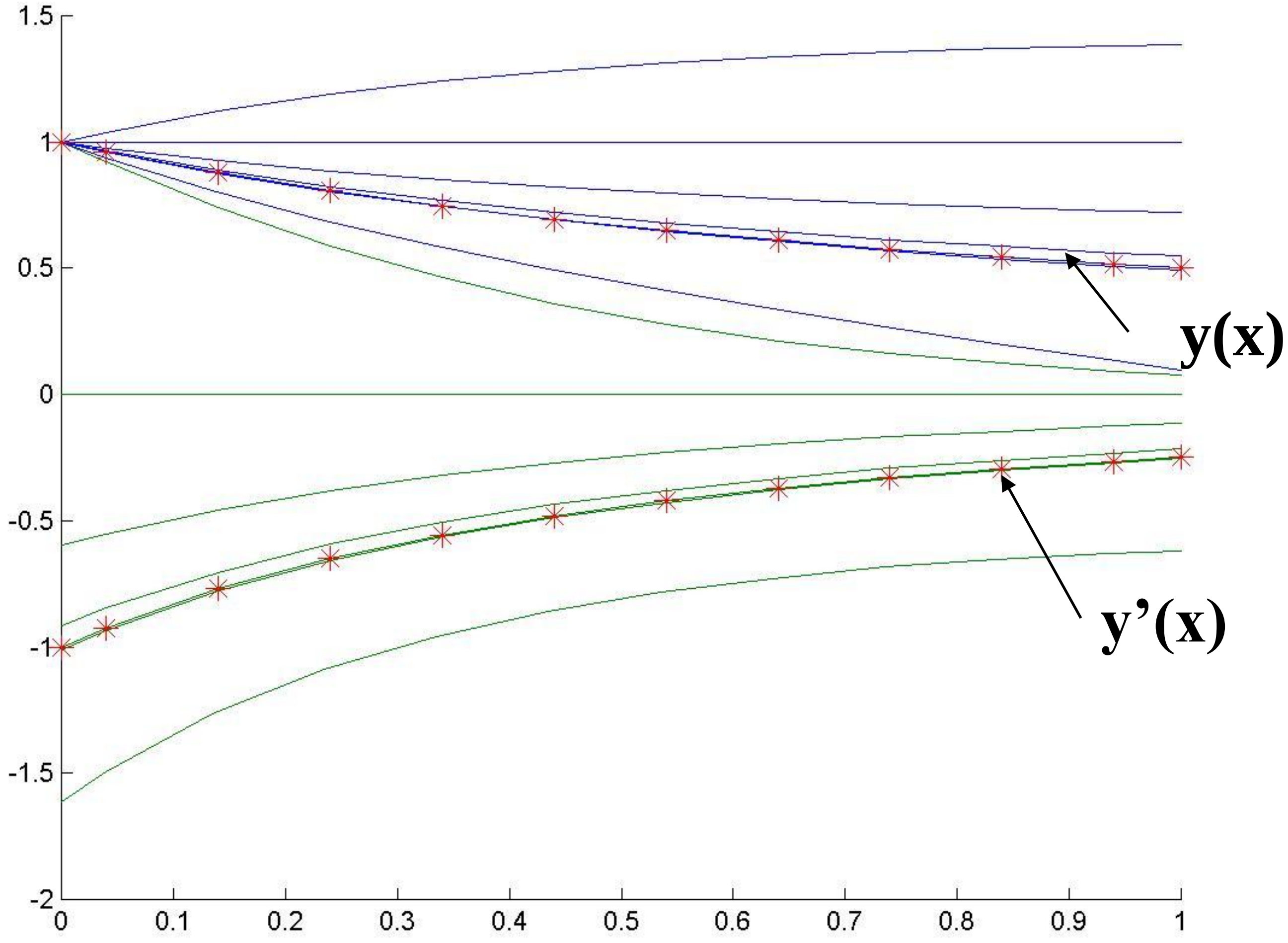
- **Convertito in un sistema del primo ordine ODE-IVPs**

$$Sia \;\; z_1 = y, \;\; z_2 = y'$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 , & z_1(0) = 1 \\ z_2' = -2z_1 z_2, & z_2(0) = s \end{cases}$$

- **Aggiorna s usando il metodo delle secanti**

Esempio BVP non lineare



Metodi alle differenze finite

- Discretizzazione dell'intervallo

$$x_0 = a, x_{n+1} = b, \quad x_i = x_0 + ih, \qquad h = \frac{b-a}{n+1}$$

- Sostituzione delle derivate con approssimazioni alle differenze finite
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari o non lineari.

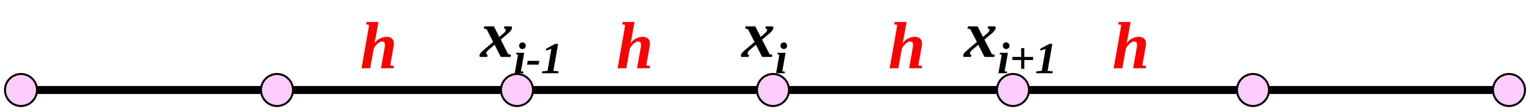
BVP: Metodi alle differenze

- **Problema generale**

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- **Sostituzione delle derivate con approssimazioni alle differenze**

$$\boxed{y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}}$$



BVP: Metodi alle differenze

- **Approssimazioni alle differenze centrali:**

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

- **Sostituzione:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i \qquad i = 1,..,n \\ y_0 = a \qquad y_{n+1} = b \end{array}}$$

$$\boldsymbol{p_\mathrm{i} \equiv p(x_i), \quad q_i \equiv q(x_i), \qquad r_i \equiv r(x_i)}$$

BVP: Metodi alle differenze

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = r_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(-1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} + \left(2 + h^2 q_i\right) y_i + \left(-1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} = -h^2 r_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{A}_{\mathrm{i,i}} = 2 + h^2 q_i, i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{i,i+1}} = -1 + \frac{h}{2} p_i, i = 1, \ldots, n-1 \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{i\text{-}1,i}} = -1 - \frac{h}{2} p_i, i = 2, \ldots, n$$

Sistema Lineare Tridiagonale

$$\begin{bmatrix} (2+h^2q_1) & -(1-(\mathrm{h}/2)p_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -(1+(\mathrm{h}/2)p_2) & (2+h^2q_2) & -(1-(\mathrm{h}/2)p_2) & \cdots & 0 \\ 0 & -(1+(\mathrm{h}/2)p_3) & (2+h^2q_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (2+h^2q_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$= -\begin{Bmatrix} h^2r_1 - (1+(h/2)\mathrm{p}_1)y_0 \\ h^2r_2 \\ h^2r_3 \\ \vdots \\ h^2r_n - (1-(h/2)\mathrm{p}_n)y_{n+1} \end{Bmatrix}$$

$$y_0 \rightarrow \alpha$$

$$y_{n+1} \rightarrow \beta$$

Caso p(x)=0

Discretizzazione mediante schema alle differenze:

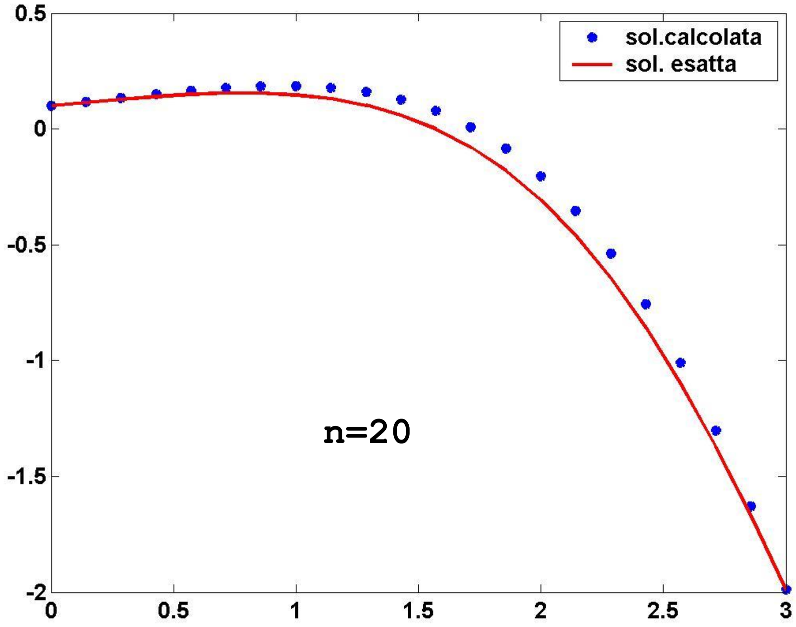
$$y_{i-1} - \left(2 + h^2 q_i\right) y_i + y_{i+1} = h^2 r_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

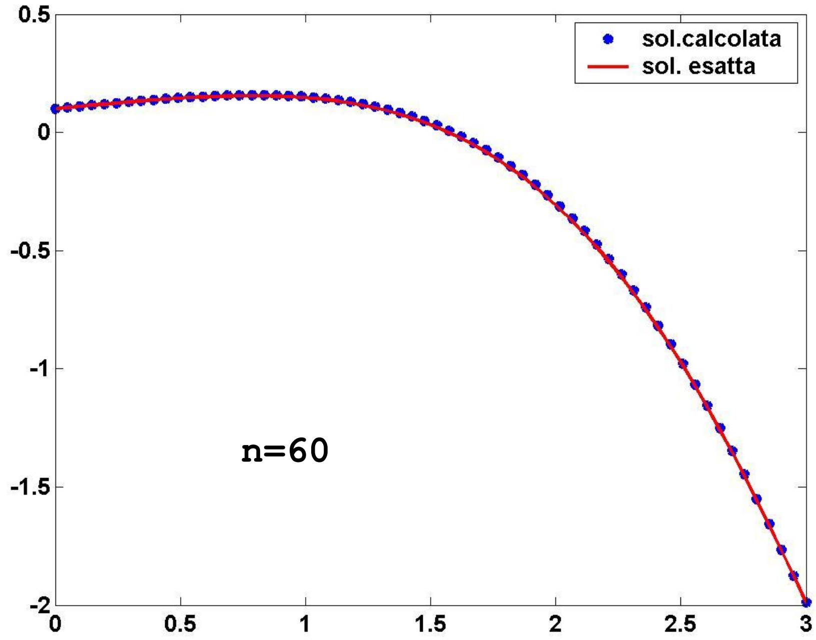
$$\begin{bmatrix} (2+h^2q_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & (2+h^2q_2) & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & (2+h^2q_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (2+h^2q_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ -h^2 r_3 \\ \vdots \\ \beta - h^2 r_n \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' = 2y' - 2y \\ y(0) = 0.1, \;\; y(3) = 0.1\exp(3)\cos(3) \end{cases}$$

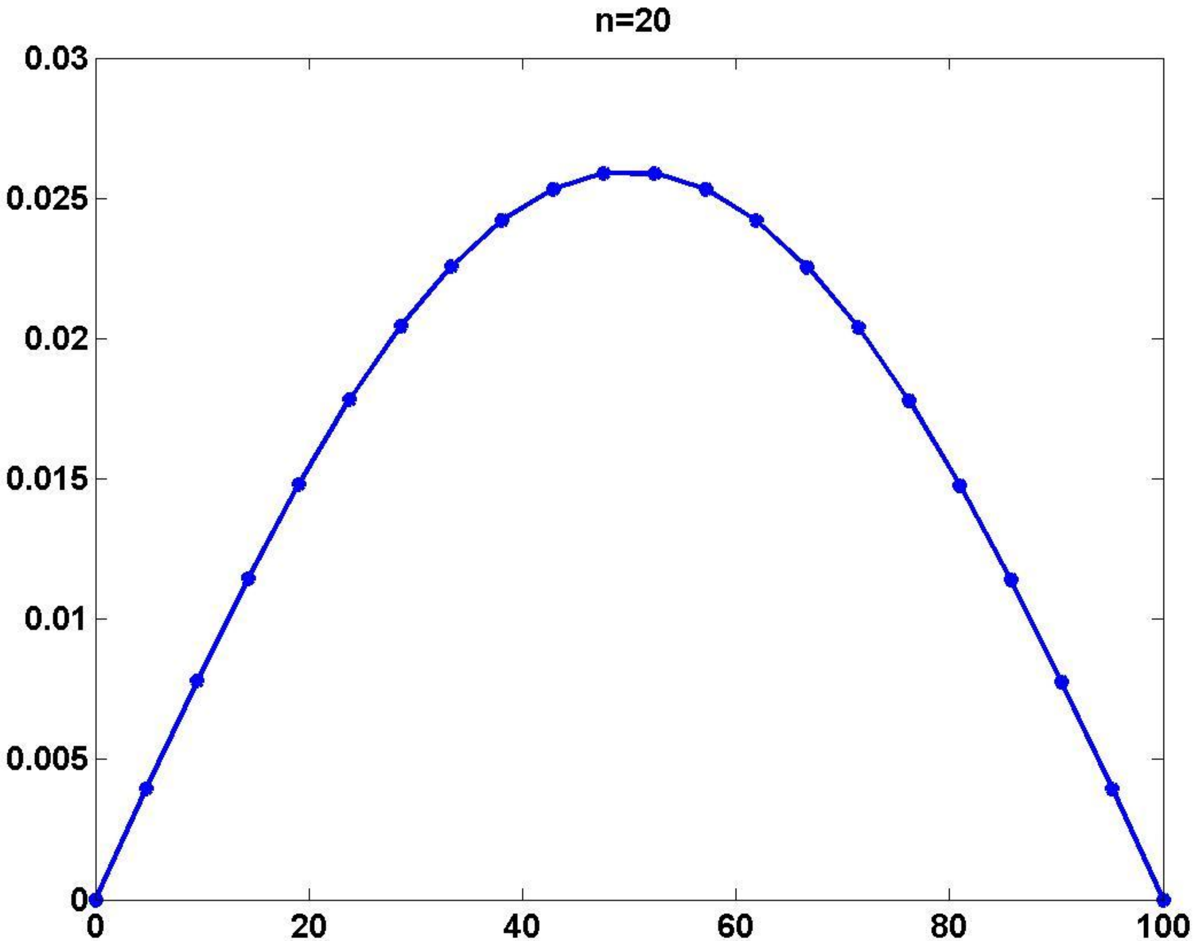
soluzione esatta: $y(x) = 0.1\exp(x)\cos(x)$





Esempio Problema di elasticità

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y(x) = f(x), \quad 0 \le x \le L \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$



Errore locale di troncamento con Differenze Finite Centrali

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3} y'''(x_i) + \cdots$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(iv)}(x_i) + \cdots$$

$$y_i \equiv y(x_i)$$

$$y'_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''_i \equiv \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$y'(x_i) = y'_i + O\left(\frac{h^2}{3}\right)$$

$$y''(x_i) = y''_i + O\left(\frac{h^2}{12}\right)$$

Il metodo è CONSISTENTE di ordine 2. ($O(h^2)$)

Modello continuo (caso p=0)

- Sostituendo nelle relazioni si ha:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{i-1} - \left(2 + h^2 q_i\right) \mathrm{y}_\mathrm{i} + y_{i+1} = h^2 r_i + \boxed{\tau_i(y),} \qquad i = 1, \ldots, n \\ y_n = \beta \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{h} \equiv \frac{1}{\mathrm{h}^2} \begin{bmatrix} (2+h^2 q_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & (2+h^2 q_2) & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & (2+h^2 q_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (2+h^2 q_n) \end{bmatrix} \qquad b_h = \begin{pmatrix} \alpha / h^2 - r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ \vdots \\ \beta / h^2 - r_n \end{pmatrix}$$

Osservazioni

- Modello discreto: $\mathbf{A_h} y_h = b_h$
- Modello continuo: $\mathbf{A_h} \bar{y} = b_h + \tau(y)$
- Problemi:
  - Esistenza e unicità della soluzione y_h
  - Calcolo numerico di y_h
  - Condizionamento della matrice A_h
  - Stima dell'errore $y_h - \bar{y}$

Esistenza e Unicità della soluzione

Proprietà della matrice A_h

- A_h è simmetrica e definita positiva
- Gli elementi di A_h^{-1} sono positivi $\left(A_h^{-1} \geq 0\right)$
- $q_i \geq 0 \Rightarrow$ la matrice è diagonale dominante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = h^2 q_i$$

- La matrice è sparsa tridiagonale

Metodi per risolvere il sistema:

- Metodi diretti: LU,
- Metodi iterativi: SOR, Gradiente Coniugato

Convergenza (consistenza+stabilità)

- Errore globale: $e_h = \bar{y} - y_h$

$$\begin{aligned} \mathrm{A_h} y_h &= b_h \\ \mathrm{A_h} \bar{y} &= b_h + \tau(y) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_h e_h = \tau(y)}$$

- La stabilità è legata ad una maggiorazione di $\left\| A_h^{-1} \right\|$ indipendente da h

$$\left\| e_h \right\| \leq \left\| A_h^{-1} \right\| \left\| \tau(y) \right\|$$

Teorema: Se $y \in C^4_{[a,b]}$ il sistema è convergente per h->0 e

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| y(x_i) - y_h(x_i) \right| \leq \frac{h^2}{24} \left\| y^{(4)} \right\|_\infty \left\| (x-a)(b-x) \right\|_\infty$$

Condizioni al Contorno di Neumann

$$y'' = f(x), \qquad a \le x \le b$$

$$y'(a) = \sigma, \quad \mathrm{y(b)} = \beta$$

$$x_0 = a, x_{n+1} = b \qquad y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{i-1} - 2\,\mathrm{y_i} + y_{i+1} = h^2 f_i, \qquad i = 1, \dots, n \\ y_1 - \mathrm{y_0} = h\sigma \\ y_{n+1} = \beta \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -h & h & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & h^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ \beta \end{pmatrix}$$

Condizioni al Contorno di Neumann

$$y'' = f(x), \qquad a \le x \le b$$

$$y'(a) = \sigma, \qquad \mathrm{y(b)} = \beta$$

$$x_0 = a, x_{n+1} = b \qquad y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_{-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$y_{i-1} - 2\,\mathrm{y_i} + y_{i+1} = h^2 f_i, \qquad i = 0,\ldots,n$$

$$y_1 - \mathrm{y}_{-1} = 2h\sigma$$

$$y_{n+1} = \beta$$

Eliminiamo y_{-1} usando le due eqs:

$$y_{-1} - 2\,\mathrm{y}_0 + y_1 = h^2 f_0, \qquad y_1 - \mathrm{y}_{-1} = 2h\sigma$$

$$\frac{1}{h}(-\mathrm{y}_0 + \mathrm{y}_1) = \sigma + \frac{h}{2} f_0$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -h & h & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & h^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma + \frac{h}{2} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ \beta \end{pmatrix}$$

Condizioni al Contorno di Neumann

Se le condizioni ai limiti sono del tipo:

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b$$
$$y'(a) + c_1 y(a) = 0, \quad y'(b) + c_2 y(b) = 0$$

$$x_0 = a, x_{n+1} = b$$

Per mantenere l'ordine $O(h^2)$ nelle approssimazioni usiamo le formule centrali:

$$y'(a) = \frac{(y(x_1) - y(x_{-1}))}{2h} + O(h^2)$$
$$y'(b) = \frac{(y(x_{n+2}) - y(x_n))}{2h} + O(h^2)$$

Occorre introdurre due nodi esterni x_{-1} e x_{n+2} e approssimare l'equazione differenziale anche in x_0 e x_{n+1}.

Metodi alle differenze finite per Problema BVP nonlineare

- ODE-BVPs secondo ordine non lineare

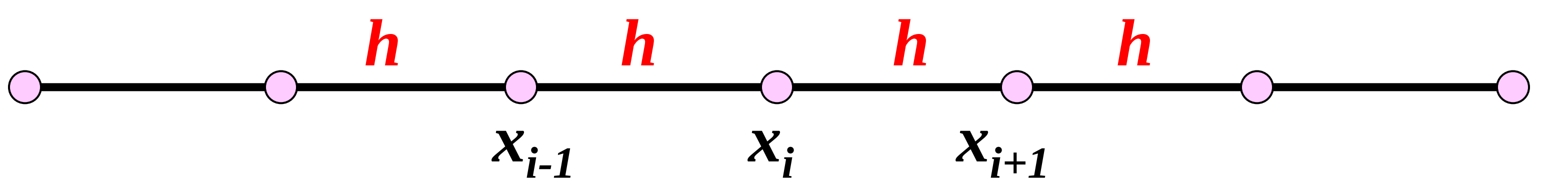
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- Si approssimano le derivate con formule alle differenze centrali:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - f(x_i, y_i, (\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})) = 0 \quad i = 1,.., N$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta$$

- Si ottiene un sistema di N equazioni lineari o non lineari



Esempio di BVP non lineare

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{2}(1+x+y)^3, \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1 \\ \mathrm{y(0)=0,\;\; y(1)=0} \end{cases}$$

- Discretizzare sulla griglia

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{2}(1+x_i+y_i)^3 = 0 \quad i = 1,..,N$$

$$y_0 = 0, \quad y_{N+1} = 0$$

- Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$Ay + h^2 B(y) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B(y) = diag(f(x_i, y_i)) \; i = 1,..,N$$

Esempio di BVP non lineare

$$y'' = f(x, y, y') = -\frac{(y')^2}{y}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$$

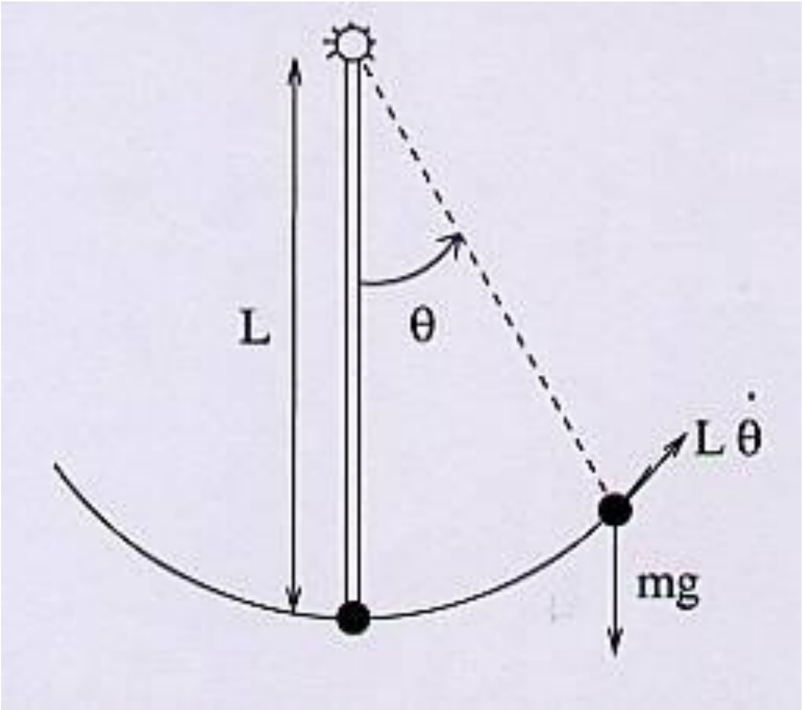
$$\frac{y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1}}{h^2} = f_i \qquad i = 1, .., N$$

$$f_i = -\frac{\left[(y_{i+1} - y_{i-1})/2h\right]^2}{y_i} = -\frac{(y_{i+1} - y_{i-1})^2}{4h^2 y_i}$$

$$Ay + h^2 B(y) = 0$$

Non lineare → Metodo di Newton

Equazione di moto del pendolo senza attrito



Pendolo di **massa m**, **lunghezza L**

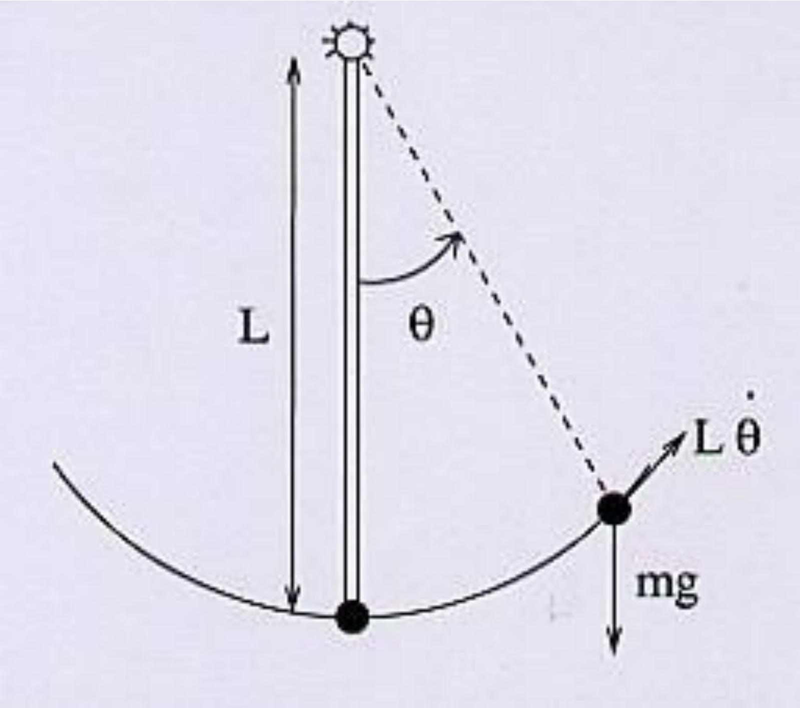
Evoluzione temporale dell'angolo $\boldsymbol{\theta}$ formato dal pendolo con la verticale passante per la cerniera a cui esso è vincolato

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \dfrac{g}{L} \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

IVP

Per semplicità $\boldsymbol{\omega^2=1}$

Equazione di moto del pendolo senza attrito



Pendolo di **massa m**, **lunghezza L**
Il pendolo parte da una prestabilita posizione con velocità angolare iniziale non nota, e oscilla fino a raggiungere la posizione β ad uno specificato tempo T

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \\ \theta(0) = \alpha \\ \dot{\theta}(T) = \beta \end{cases} \qquad \text{BVP}$$

Per semplicità ***ω^2=1***

Esempio di BVP non lineare

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \\ \theta(0) = \alpha \\ \dot{\theta}(T) = \beta \end{cases}$$

$$\frac{\vartheta_{i-1} - 2\ \vartheta_i + \vartheta_{i+1}}{h^2} + \sin(\vartheta_i) = 0 \qquad i = 1,..,N \quad h = T/(N+1)$$

$$\vartheta_0 = \alpha, \quad \vartheta_{N+1} = \beta \qquad \rightarrow B(\theta) = 0$$

Sistema non lineare →
Metodo di Newton

iterato iniziale $\vartheta^{(0)}$

repeat

$J(\vartheta^{(k)})s^{(k)} = -B(\vartheta^{(k)})$

$\vartheta^{(k+1)} = \vartheta^{(k)} + s^{(k)}$

until $\|\vartheta^{(k+1)} - \vartheta^{(k)}\| < tol$

$$J_{ij}(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} B_i(\vartheta)$$

$$J_{ij}(\vartheta) = \begin{cases} 1/h^2 & \text{se } j = i\text{-}1 \text{ o } j = i+1 \\ -2/h^2 + \cos(\vartheta_i) & \text{se } j = i \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$$J(\vartheta)=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} (-2+h^2\cos(\vartheta_1)) & 1 & & & \\ 1 & (-2+h^2\cos(\vartheta_2)) & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & (-2+h^2\cos(\vartheta_N)) \end{bmatrix}$$

iterato iniziale $\vartheta^{(0)}$

repeat

$$\boxed{J(\vartheta^{(k)})s^{(k)}=-B(\vartheta^{(k)})}$$

$$\vartheta^{(k+1)}=\vartheta^{(k)}+s^{(k)}$$

until $\quad \|\vartheta^{(k+1)}-\vartheta^{(k)}\|< tol$

Risolvere un sistema lineare tridiagonale ad ogni iterazione k

Funzione MATLAB bvp4c

- Problema test $\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y(4) = -2 \end{cases}$
- Sistema di due equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -|y_1| \end{cases}$$

condizioni al contorno:

$$bc\big(y(a), y(b)\big) = 0$$

$$ya(1) = y(a), ya(2) = y'(a)$$

$$yb(1) = y(b), yb(2) = y'(b)$$

```
function dydx = twoode(t,y)
  dydx = [ y(2)
           -abs(y(1))];
```

```
function res = twobc(ya,yb)
  res = [ ya(1)
          yb(1) + 2];
```

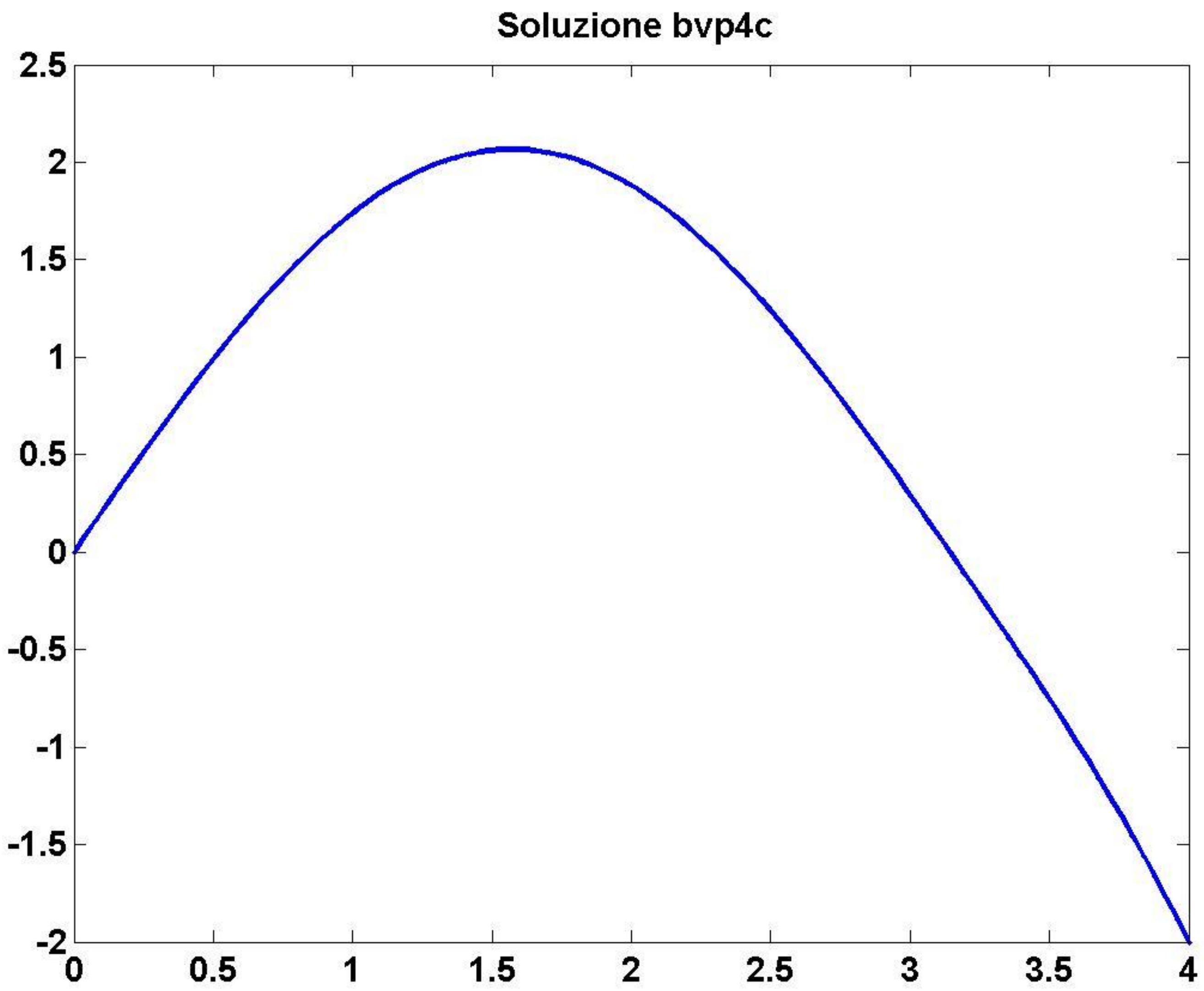
```
function testbvp
solinit = bvpinit(linspace(0,4,5),[1 0]);
sol = bvp4c(@twoode,@twobc,solinit);
x = linspace(0,4);
y = deval(sol,x);
plot(x,y(1,:));
```

- **deval** valuta in punti di x la soluzione contenuta nella struttura sol

```
sol =
        x: [1x22 double]
        y: [2x22 double]
       yp: [2x22 double]
   solver: 'bvp4c'
```

- **bvpinit** calcola una stima iniziale della soluzione
  su 5 punti uniformemente distrib. in [0,4]
  con guess iniziali costanti y1(x)=1 e y2(x)=0

```
solinit =
   x: [0 1 2 3 4]
   y: [2x5 double]
```


Soluzione bvp4c
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi