

# Equazioni Differenziali Ordinarie -BVP

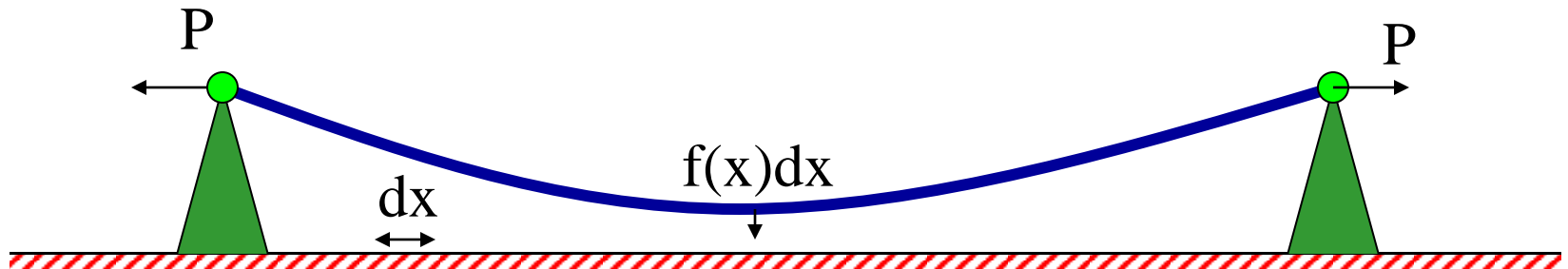
Problemi con Valori al Contorno:

**Metodo shooting**

**Metodo alle differenze**

**Metodo di collocazione**

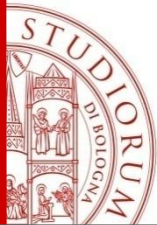
# Problema di Elasticità



$$\begin{cases} -y'' + c(x)y(x) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

- $y(x)$  - momento flettente
- $f(x)dx$  - carico trasversale
- $P$  - tensione
- $c(x) = P/(EI(x))$
- $E$  - modulo di Young del materiale
- $I(x)$  - momento principale di inerzia in  $x$

**La soluzione è unica quando  $c(x) \geq 0$**



# Problemi ai limiti

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b$$

- **Condizioni al contorno di Dirichlet**

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

- **Condizioni al Contorno di Neumann**

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$$

- **Condizioni al contorno miste (Robin)**

$$y'(a) + \alpha_1 y(a) = \alpha, \quad y'(b) + \beta_1 y(b) = \beta$$

Condizioni al contorno separate



# Problemi ai limiti per una ODE del secondo ordine

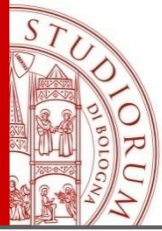
$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) - \alpha_1 y'(a) = \alpha \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta \end{cases}$$

Equivalente all' IVP:

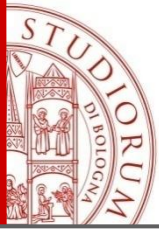
$$\text{Se } \begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{bmatrix}, \quad a \leq x \leq b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$



# Problemi fisici retti da BVP del secondo ordine

---

- Flessione di una trave sottoposta a carico trasversale
- Distribuzione di potenziale elettrico tra due elettrodi
- Distribuzione della temperatura in un mezzo con temperature fissate agli estremi
- .....



# Metodo Shooting

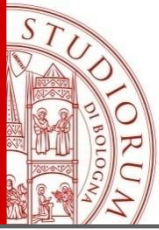
- **ODE**  
**Non lineare**

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') , & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- Associamo la famiglia dei problemi IVP:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & \text{con } s \text{ (da determinare)} \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s \end{cases}$$

- Trasformato opportunamente in un sistema del primo ordine di 2 eqs



# Esempio

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\lambda y(x)$$

$\lambda$  è noto

con BC  $y(0) = 0, y(1) = 0$

Sia  $y_1 = y, y_2 = y'$ ,

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\lambda y_1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = s,$$

# Metodo Shooting

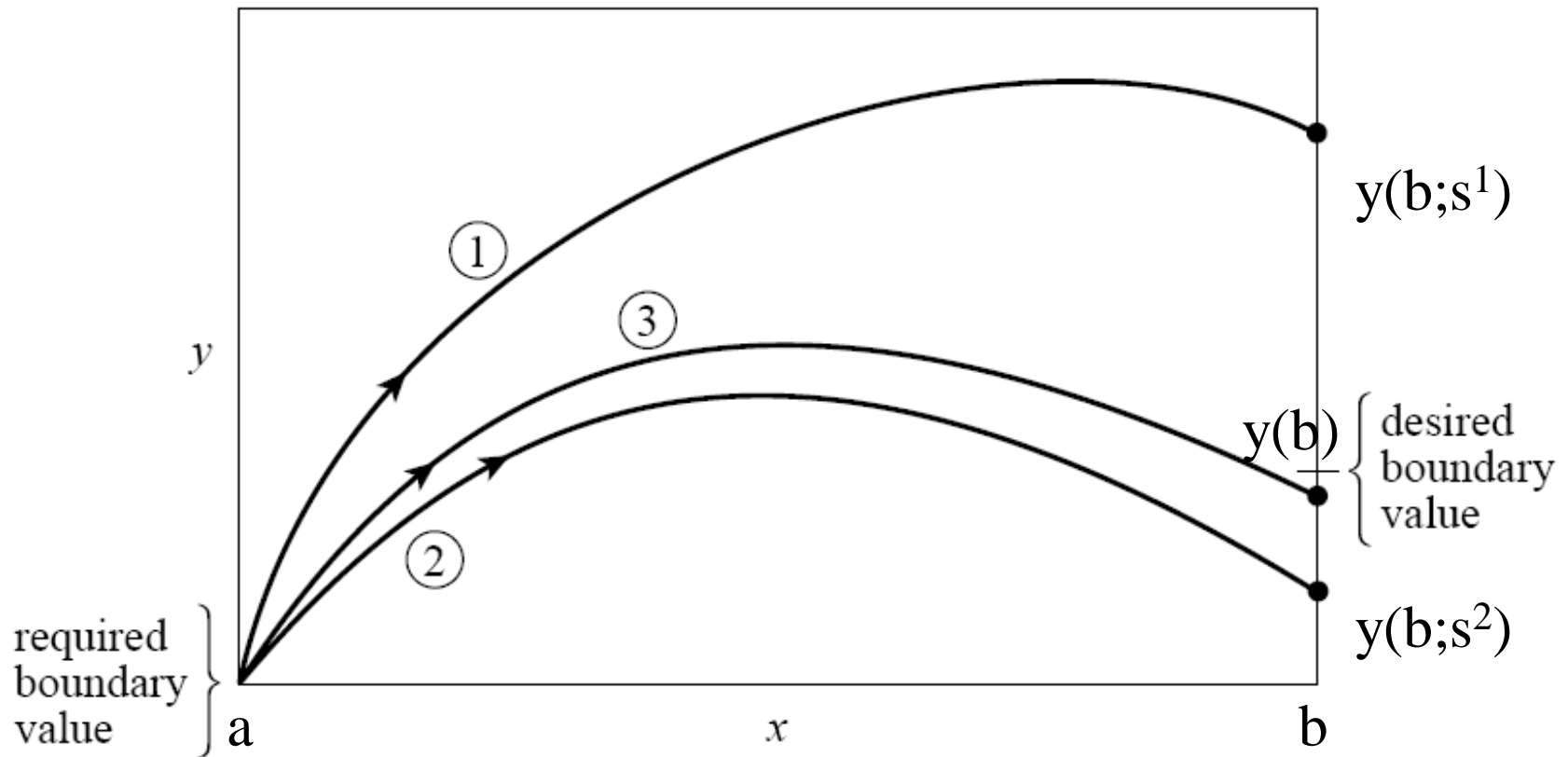
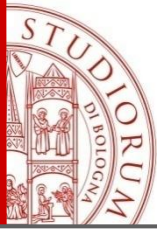


Figure 17.0.1. Shooting method (schematic). Trial integrations that satisfy the boundary condition at one endpoint are “launched.” The discrepancies from the desired boundary condition at the other endpoint are used to adjust the starting conditions, until boundary conditions at both endpoints are ultimately satisfied.





# Metodo Shooting

Trovare  $s$  tale che

$$y(b; s) = \beta$$

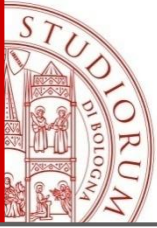
Seconda condizione al contorno da soddisfare.

Ricerca di uno zero di una funzione:

$$y(b; s) = \beta \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = y(b; s) - \beta = 0$$

Metodi per trovare zeri di funzioni/sistemi non lineari:

- Bisezione (due iterati iniziali)
- Secanti (due iterati iniziali),
- Newton (un iterato iniziale e calcolo  $F'(x)$  )



# Metodo Shooting con metodo delle secanti

Step 1: solve IVP con  $y(a) = \alpha$ ,  $y'(a) = s(1) \Rightarrow$  Errore =  $F(1)$

Step 2: solve IVP con  $y(a) = \alpha$ ,  $y'(a) = s(2) \Rightarrow$  Errore =  $F(2)$

Step 3: metodo secanti per ottenere una nuova stima

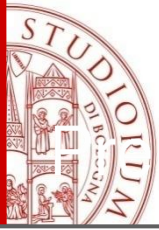
while  $|s(i) - s(i - 1)| > tol$

$$s(i) = s(i - 1) - \frac{s(i - 1) - s(i - 2)}{F(i - 1) - F(i - 2)} F(i - 1)$$

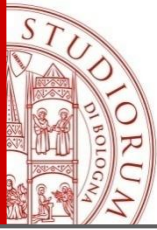
solve IVP con  $y(a) = \alpha$ ,  $y'(a) = s(i) \Rightarrow$  Errore =  $F(i)$

end

Step 4: solve IVP con  $y(a) = \alpha$ ,  $y'(a) = s(i)$



```
function [t,y]=bvpshoot(funcn,tspan,x0,tol)
t0=tspan(1); tfinal=tspan(2);
ga=x0(1); gb=x0(2);
s(1)=0;s(2)=1;
[t,u]=ode45(funcn, tspan,[ga, s(1)]); F(1)=u(end)-β;
[t,u]=ode45(funcn, tspan,[ga, s(2)]); F(2)=u(end)-β;
i=3;
while (abs(s(i-2)-s(i-1))>tol)
    s(i)=s(i-1)-(s(i-1)-s(i-2))/(F(i-1)-F(i-2)) *F(i-1);
    [t,u]=ode45(funcn, tspan, [ga, s(i)]);
    F(i)=u(end);i=i+1;
end
[t,y]=ode45(funcn, tspan, [ga, s(end)]);
```



# Esempio: BVP non lineare

$$\begin{cases} y'' = -2yy', & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, & y(1) + y'(1) - 0.25 = 0 \end{cases}$$

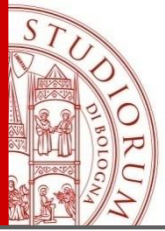
soluzione esatta  $y = 1/(x+1)$

- **Convertito in un sistema del primo ordine ODE-IVPs**

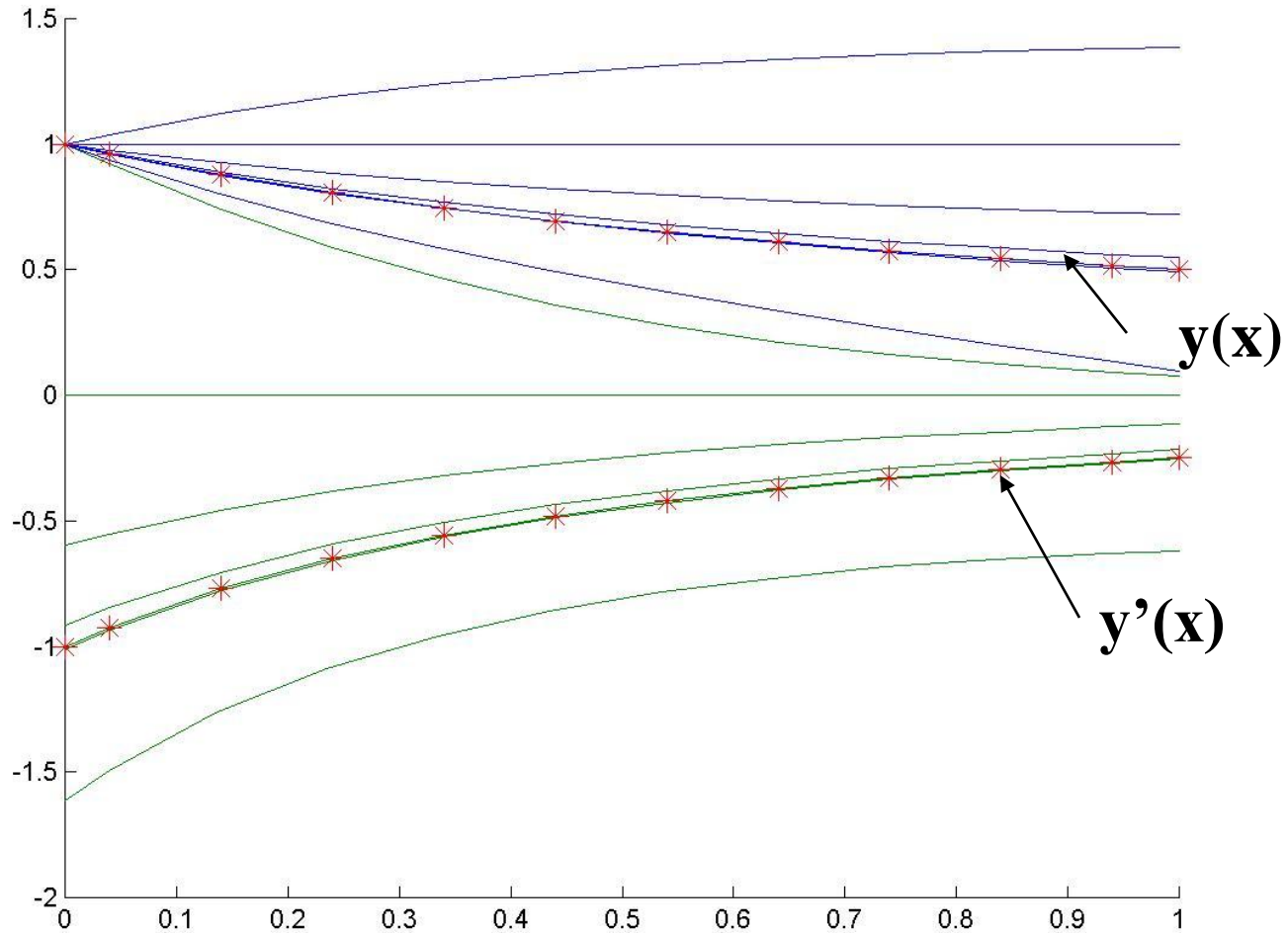
$$\text{Sia } z_1 = y, \quad z_2 = y'$$

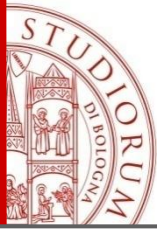
$$\begin{cases} z_1' = z_2, & z_1(0) = 1 \\ z_2' = -2z_1z_2, & z_2(0) = s \end{cases}$$

- **Aggiorna  $s$  usando il metodo delle secanti**



# Esempio BVP non lineare



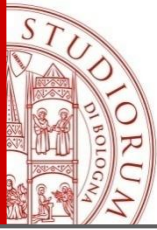


# Metodi alle differenze finite

- Discretizzazione dell'intervallo

$$x_0 = a, x_{n+1} = b, x_i = x_0 + ih, h = \frac{b - a}{n + 1}$$

- Sostituzione delle derivate con approssimazioni alle differenze finite
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari o non lineari.



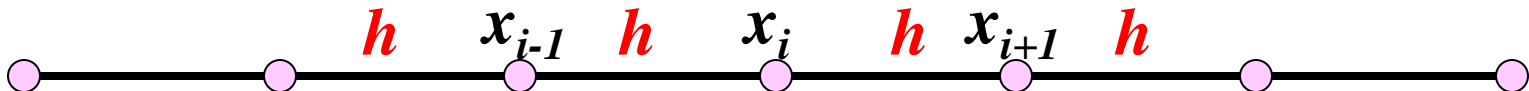
# BVP: Metodi alle differenze

- **Problema generale**

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}$$

- **Sostituzione delle derivate con approssimazioni alle differenze**

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$





# BVP: Metodi alle differenze

- **Approssimazioni alle differenze centrali:**

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

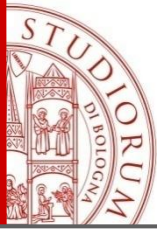
- **Sostituzione:**

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_0 = a \quad y_{n+1} = b$$

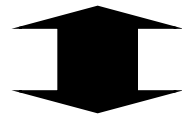
$$p_i \equiv p(x_i), \quad q_i \equiv q(x_i), \quad r_i \equiv r(x_i)$$





# BVP: Metodi alle differenze

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = r_i, \quad i = 1, \dots, n$$

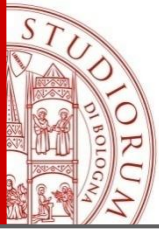


$$\left(-1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} + (2 + h^2 q_i) y_i + \left(-1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} = -h^2 r_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  con

$$A_{i,i} = 2 + h^2 q_i, i = 1, \dots, n$$

$$A_{i,i+1} = -1 + \frac{h}{2} p_i, i = 1, \dots, n-1 \quad A_{i-1,i} = -1 - \frac{h}{2} p_i, i = 2, \dots, n$$



# Sistema Lineare Tridiagonale

$$\begin{bmatrix} (2 + h^2 q_1) & -(1 - (h/2)p_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -(1 + (h/2)p_2) & (2 + h^2 q_2) & -(1 - (h/2)p_2) & \cdots & 0 \\ 0 & -(1 + (h/2)p_3) & (2 + h^2 q_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (2 + h^2 q_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} h^2 r_1 - (1 + (h/2)p_1) y_0 \\ h^2 r_2 \\ h^2 r_3 \\ \vdots \\ h^2 r_n - (1 - (h/2)p_n) y_{n+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \alpha \\ \\ \\ \\ \rightarrow \beta \end{array}$$

# Caso $p(x)=0$

Discretizzazione mediante schema alle differenze:

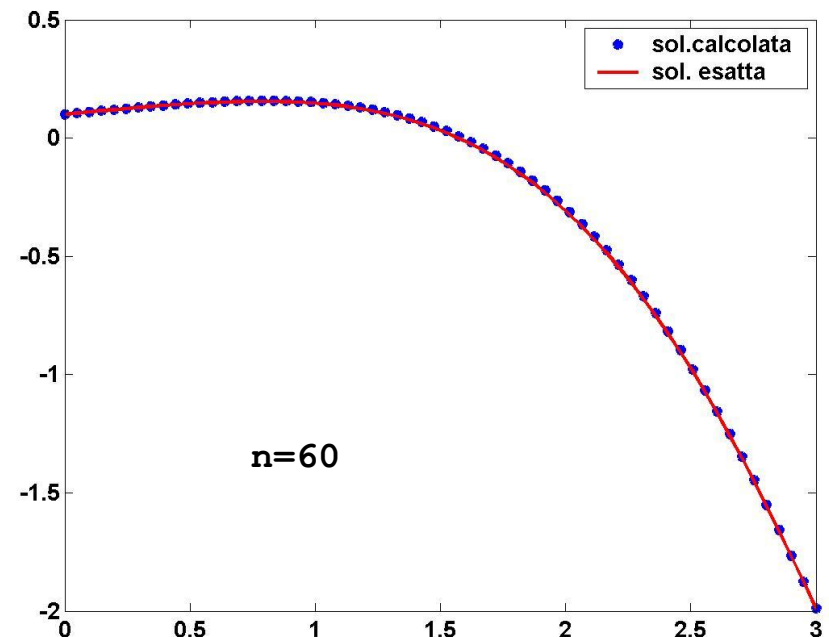
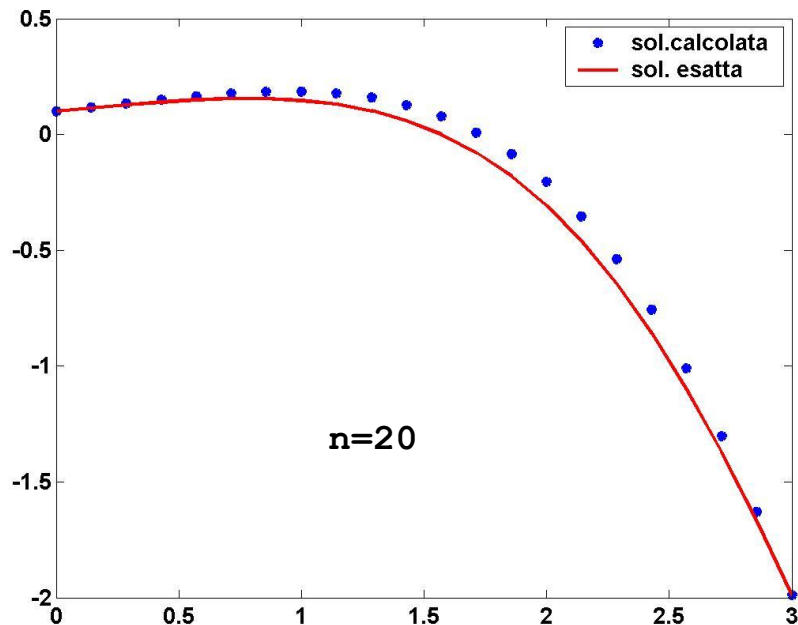
$$y_{i-1} - (2 + h^2 q_i) y_i + y_{i+1} = h^2 r_i, \quad i = 1, \dots, n$$

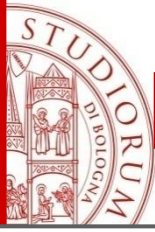
$$\begin{bmatrix} (2 + h^2 q_1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & (2 + h^2 q_2) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & (2 + h^2 q_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (2 + h^2 q_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - h^2 r_1 \\ -h^2 r_2 \\ -h^2 r_3 \\ \vdots \\ \beta - h^2 r_n \end{pmatrix}$$

# Esempio

$$\begin{cases} y'' = 2y' - 2y \\ y(0) = 0.1, \quad y(3) = 0.1 \exp(3) \cos(3) \end{cases}$$

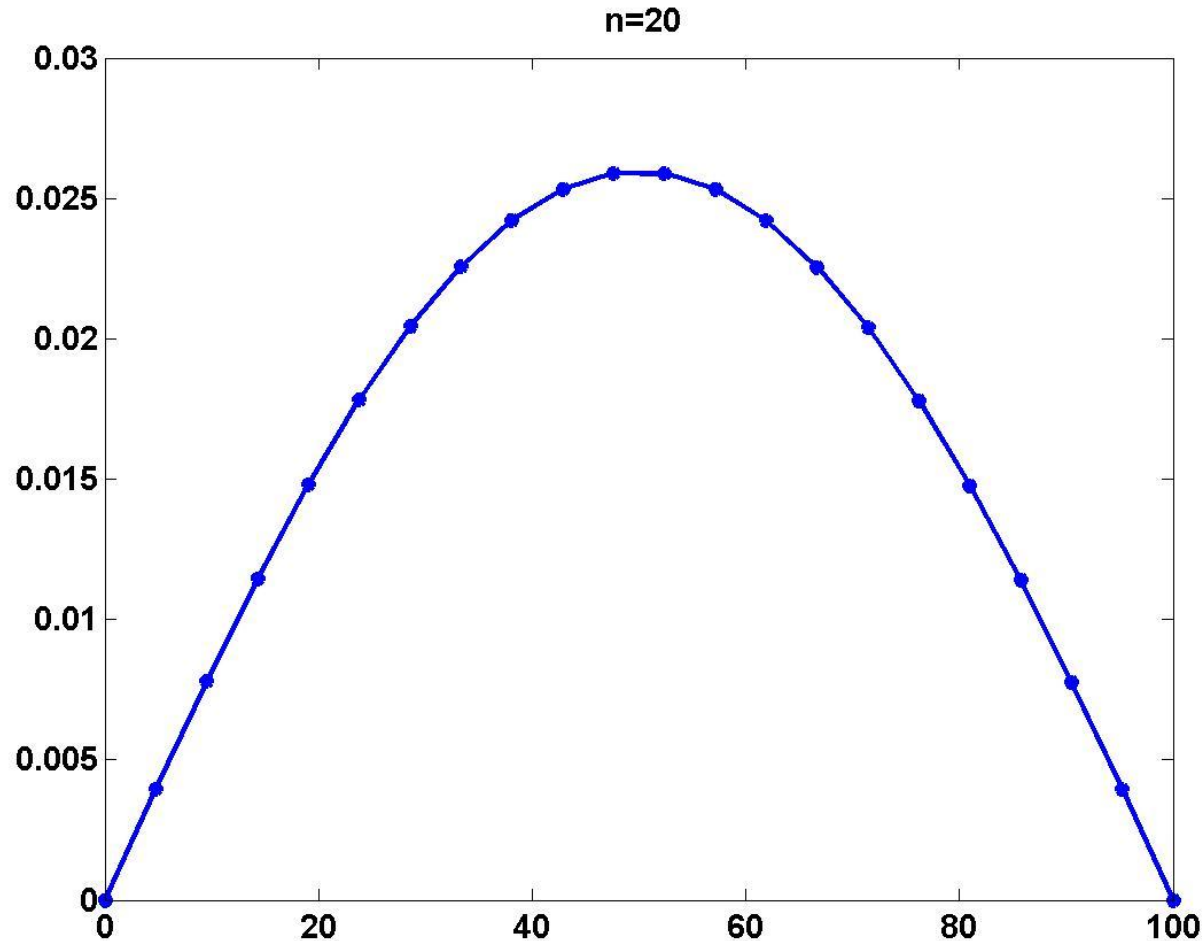
**soluzione esatta:  $y(x) = 0.1 \exp(x) \cos(x)$**

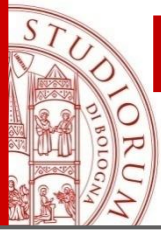




# Esempio Problema di elasticità

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y(x) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$





# Errore locale di troncamento con Differenze Finite Centrali

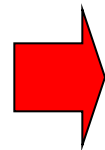
$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{3} y'''(x_i) + \dots$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(iv)}(x_i) + \dots$$

$$y_i \equiv y(x_i)$$

$$y'_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

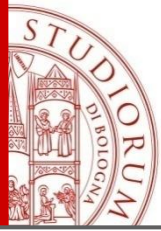
$$y''_i \equiv \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$



$$y'(x_i) = y'_i + O\left(\frac{h^2}{3}\right)$$

$$y''(x_i) = y''_i + O\left(\frac{h^2}{12}\right)$$

Il metodo è CONSISTENTE di ordine 2. ( $O(h^2)$ )

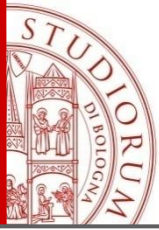


# Modello continuo (caso $p=0$ )

- Sostituendo nelle relazioni si ha:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{i-1} - (2 + h^2 q_i) y_i + y_{i+1} = h^2 r_i + \tau_i(y), & i = 1, \dots, n \\ y_n = \beta \end{cases}$$

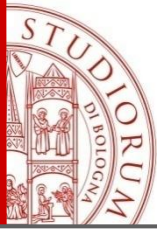
$$\mathbf{A}_h \equiv \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} (2 + h^2 q_1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & (2 + h^2 q_2) & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & (2 + h^2 q_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (2 + h^2 q_n) \end{bmatrix} \mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} \alpha / h^2 - r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \\ \vdots \\ \beta / h^2 - r_n \end{pmatrix}$$



# Osservazioni

- Modello discreto:  $\mathbf{A}_h \mathbf{y}_h = \mathbf{b}_h$
- Modello continuo:  $\mathbf{A}_h \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b}_h + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})$
- Problemi:
  - Esistenza e unicità della soluzione  $\mathbf{y}_h$
  - Calcolo numerico di  $\mathbf{y}_h$
  - Condizionamento della matrice  $\mathbf{A}_h$
  - Stima dell'errore  $\mathbf{y}_h - \bar{\mathbf{y}}$





# Esistenza e Unicità della soluzione

## Proprietà della matrice $A_h$

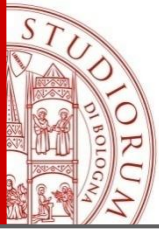
- $A_h$  è simmetrica e definita positiva
- Gli elementi di  $A_h^{-1}$  sono positivi ( $A_h^{-1} \geq 0$ )
- $q_i \geq 0 \Rightarrow$  la matrice è diagonale dominante:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = h^2 q_i$$

- La matrice è sparsa tridiagonale

## Metodi per risolvere il sistema:

- Metodi diretti: LU,
- Metodi iterativi: SOR, Gradiente Coniugato



# Convergenza (consistenza+stabilità)

- Errore globale:  $e_h = \bar{y} - y_h$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_h \mathbf{y}_h &= \mathbf{b}_h \\ \mathbf{A}_h \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{b}_h + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{A}_h \mathbf{e}_h = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})}$$

- La stabilità è legata ad una maggiorazione di  $\|\mathbf{A}_h^{-1}\|$  indipendente da h

$$\|\mathbf{e}_h\| \leq \|\mathbf{A}_h^{-1}\| \|\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})\|$$

Teorema: Se  $\mathbf{y} \in C^4_{[a,b]}$  il sistema è convergente per  $h \rightarrow 0$  e

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y(x_i) - y_h(x_i)| \leq \frac{h^2}{24} \|y^{(4)}\|_{\infty} \|(x-a)(b-x)\|_{\infty}$$







# Condizioni al Contorno di Neumann

Se le condizioni ai limiti sono del tipo:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b$$
$$y'(a) + c_1 y(a) = 0, \quad y'(b) + c_2 y(b) = 0$$

$$x_0 = a, x_{n+1} = b$$

Per mantenere l'ordine  $O(h^2)$  nelle approssimazioni usiamo le formule centrali:

$$y'(a) = \frac{(y(x_1) - y(x_{-1})))}{2h} + O(h^2)$$
$$y'(b) = \frac{(y(x_{n+2}) - y(x_n))}{2h} + O(h^2)$$

Occorre introdurre due nodi esterni  $x_{-1}$  e  $x_{n+2}$  e approssimare l'equazione differenziale anche in  $x_0$  e  $x_{n+1}$ .

# Metodi alle differenze finite per Problema BVP nonlineare

- ODE-BVPs secondo ordine non lineare

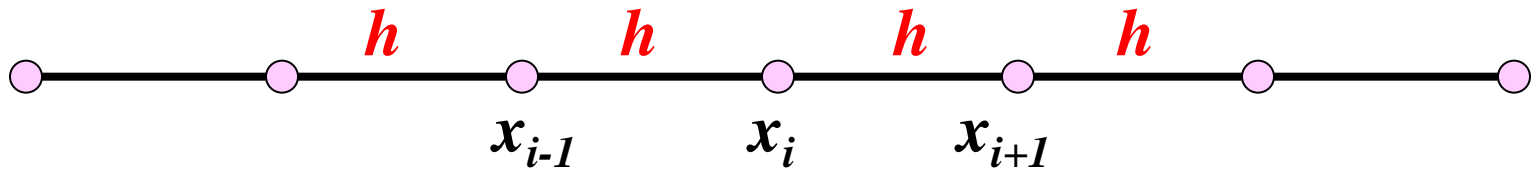
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}$$

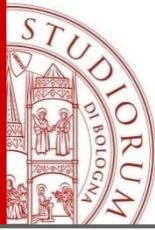
- Si approssimano le derivate con formule alle differenze centrali:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - f\left(x_i, y_i, \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)\right) = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta$$

- Si ottiene un sistema di N equazioni lineari o non lineari





# Esempio di BVP non lineare

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{2}(1+x+y)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

- Discretizzare sulla griglia

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{2}(1+x_i + y_i)^3 = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$$y_0 = 0, \quad y_{N+1} = 0$$

- Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$Ay + h^2 B(y) = 0$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B(y) = \text{diag}(f(x_i, y_i)) \quad i = 1, \dots, N$$



# Esempio di BVP non lineare

$$y'' = f(x, y, y') = -\frac{(y')^2}{y}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$$

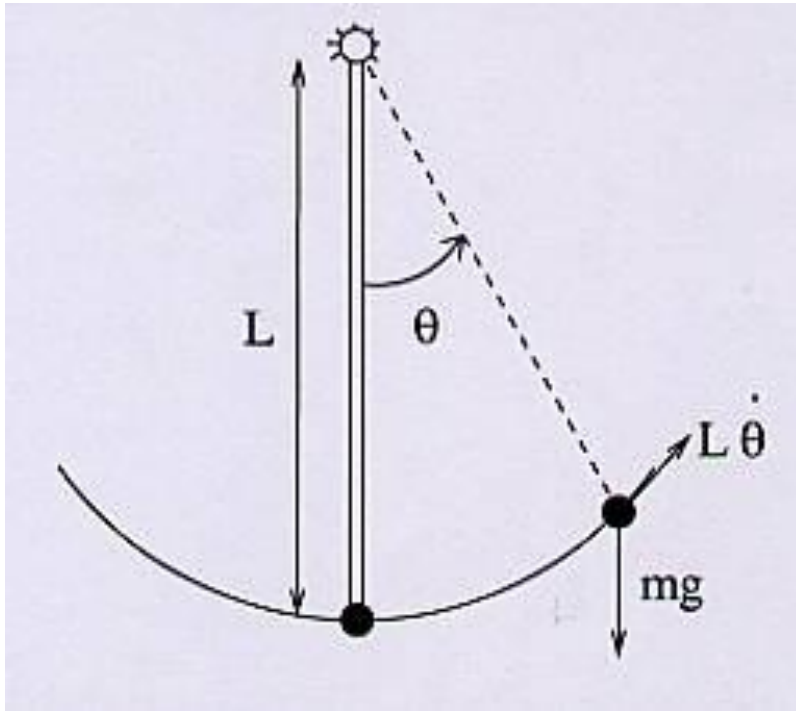
$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$f_i = -\frac{[(y_{i+1} - y_{i-1}) / 2h]^2}{y_i} = -\frac{(y_{i+1} - y_{i-1})^2}{4h^2 y_i}$$

$$Ay + h^2 B(y) = 0 \quad \text{Non lineare} \rightarrow \text{Metodo di Newton}$$



# Equazione di moto del pendolo senza attrito

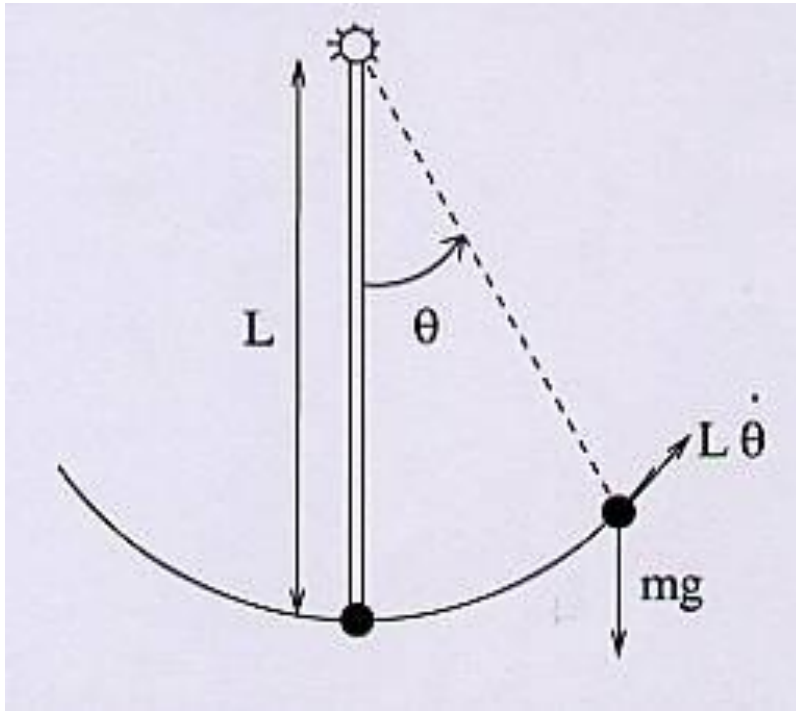


Per semplicità  $\omega^2=1$

Pendolo di **massa m**, **lunghezza L**  
Evoluzione temporale dell'angolo  $\theta$   
formato dal pendolo con la verticale  
passante per la cerniera a cui esso è  
vincolato

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 & \text{con } \omega^2 = \frac{g}{L} \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \quad \text{IVP}$$

# Equazione di moto del pendolo senza attrito

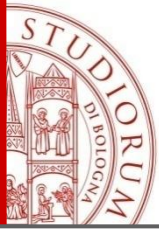


Per semplicità  $\omega^2=1$

Pendolo di massa  $m$ , lunghezza  $L$   
Il pendolo parte da una prestabilita  
posizione con velocità angolare iniziale  
non nota, e oscilla fino a raggiungere la  
posizione  $\beta$  ad uno specificato tempo  $T$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \\ \theta(0) = \alpha \\ \theta(T) = \beta \end{cases} \quad \text{BVP}$$

# Esempio di BVP non lineare



$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \\ \theta(0) = \alpha \\ \theta(T) = \beta \end{cases}$$

$$h = T / (N + 1) \quad \underbrace{\frac{\mathcal{G}_{i-1} - 2 \mathcal{G}_i + \mathcal{G}_{i+1}}{h^2} + \sin(\mathcal{G}_i)}_{F(\theta)} = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathcal{G}_0 = \alpha, \quad \mathcal{G}_{N+1} = \beta$$

$$F(\theta) = 0$$

Sistema non lineare  $\rightarrow$   
Metodo di Newton

iterato iniziale  $\mathcal{G}^{(0)}$

*repeat*

$$J(\mathcal{G}^{(k)})s^{(k)} = -F(\mathcal{G}^{(k)})$$

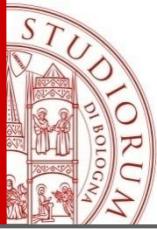
$$\mathcal{G}^{(k+1)} = \mathcal{G}^{(k)} + s^{(k)}$$

*until*  $\|\mathcal{G}^{(k+1)} - \mathcal{G}^{(k)}\| < tol$

$$J_{ij}(\mathcal{G}) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}_j} F_i(\mathcal{G})$$

$$J_{ij}(\mathcal{G}) = \begin{cases} 1/h^2 & \text{se } j = i-1 \text{ o } j = i+1 \\ -2/h^2 + \cos(\mathcal{G}_i) & \text{se } j = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





# Funzione MATLAB bvp4c

- **Problema test** 
$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = 0 \quad y(4) = -2 \end{cases}$$
- Sistema di due equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -|y_1| \end{cases}$$

condizioni al contorno:

$$bc(y(a), y(b)) = 0$$

$$ya(1) = y(a), ya(2) = y'(a)$$

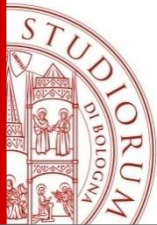
$$yb(1) = y(b), yb(2) = y'(b)$$

```
function dydx = twoode(t,y)
```

```
dydx = [ y(2)  
        -abs(y(1))];
```

```
function res = twobc(ya,yb)
```

```
res = [ ya(1)  
        yb(1) + 2];
```



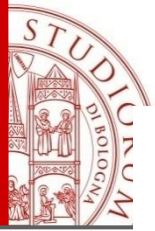
```
function testbvp
solinit = bvpinit(linspace(0,4,5),[1 0]);
sol = bvp4c(@twoode,@twobc,solinit);
x = linspace(0,4);
y = deval(sol,x);
plot(x,y(1,:));
```

- **deval** valuta in punti di  $x$  la soluzione contenuta nella struttura **sol**

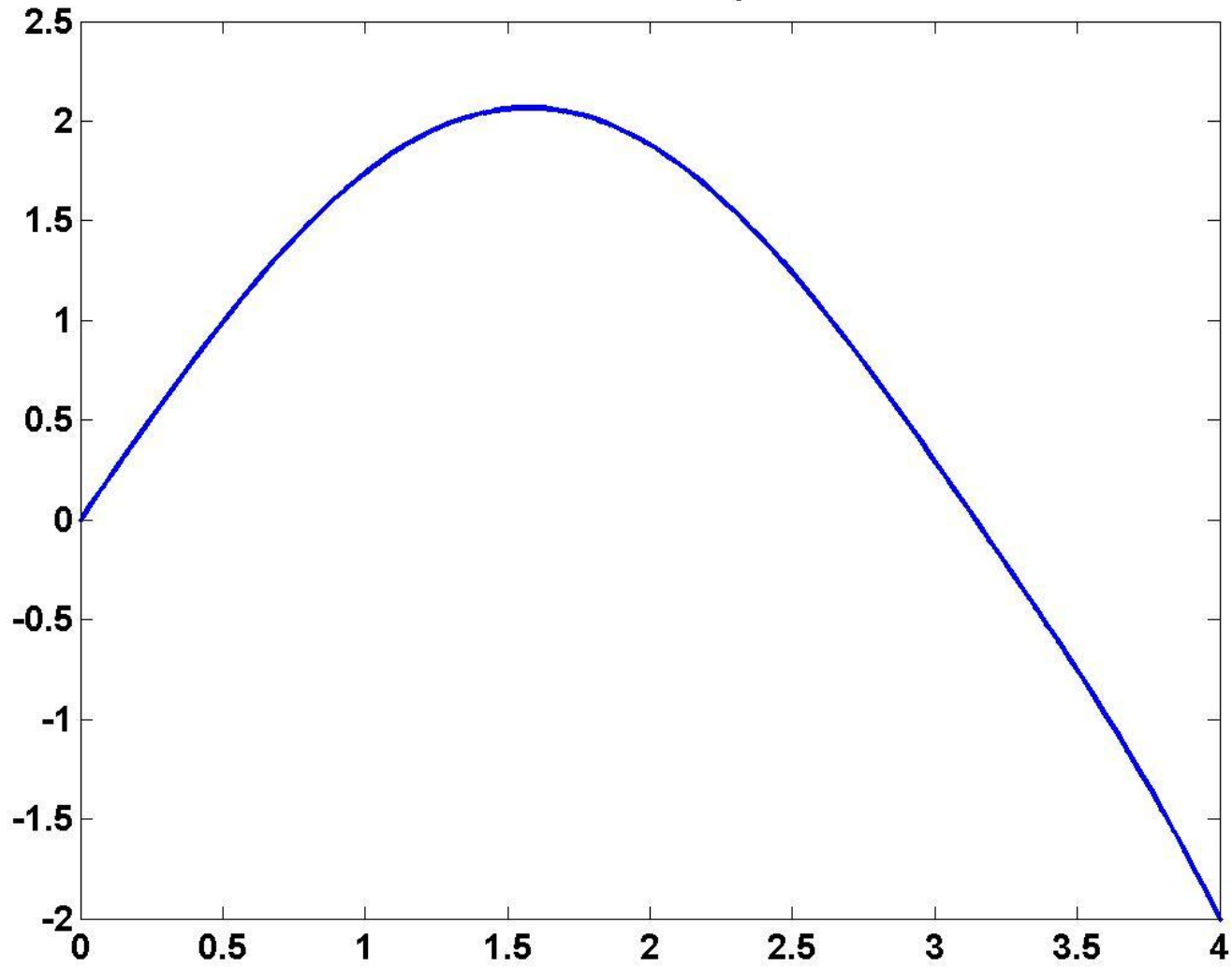
```
sol =
  x: [1x22 double]
  y: [2x22 double]
  yp: [2x22 double]
  solver: 'bvp4c'
```

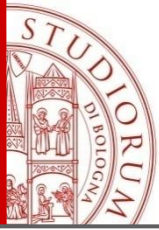
- **bvpinit** calcola una stima iniziale della soluzione su 5 punti uniformemente distrib. in  $[0,4]$  con guess iniziali costanti  $y_1(x)=1$  e  $y_2(x)=0$

```
solinit =
  x: [0 1 2 3 4]
  y: [2x5 double]
```



### Soluzione bvp4c





ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

# Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

[serena.morigi@unibo.it](mailto:serena.morigi@unibo.it)

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>