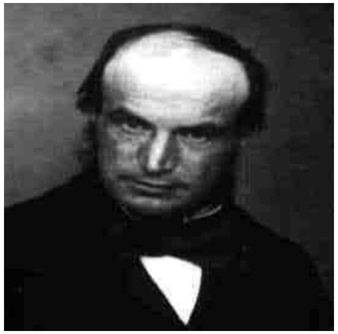
Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP
I

Metodi numerici per EDO/ODE

- **Metodi one-step**
  - Metodi Eulero
  - Analisi dei metodi one-step
  - Metodi Runge-Kutta
- **Metodi Multi-step**
  - Adams-Bashforth
  - Adams-Moulton
  - Predictor-Corrector
- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**

Eulero

Martin Kutta
Carl David Runge (1856-1927)



J.C. Adams
(1819-1882)

Equazioni Differenziali Ordinarie EDO

Equazione differenziale ordinaria del primo ordine lineare

$$\boxed{y'(x) + p(x)y(x) = f(x)}$$

Il termine **ordine** indica il massimo ordine di derivazione della funzione incognita presente nell'equazione.
L'eq. differenziale si dice **omogenea** se f(x)=0:

$$\boxed{y'(x) + p(x)y(x) = 0}$$

Teorema: *Soluzione dell'equazione omogenea*
L'insieme delle soluzioni è dato dalla famiglia di funzioni che si presentano nella forma:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx + c} = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

Equazioni differenziali ordinarie

EDO a variabili separabili

$$\boxed{y'(x) + p(x)y(x) = 0}$$

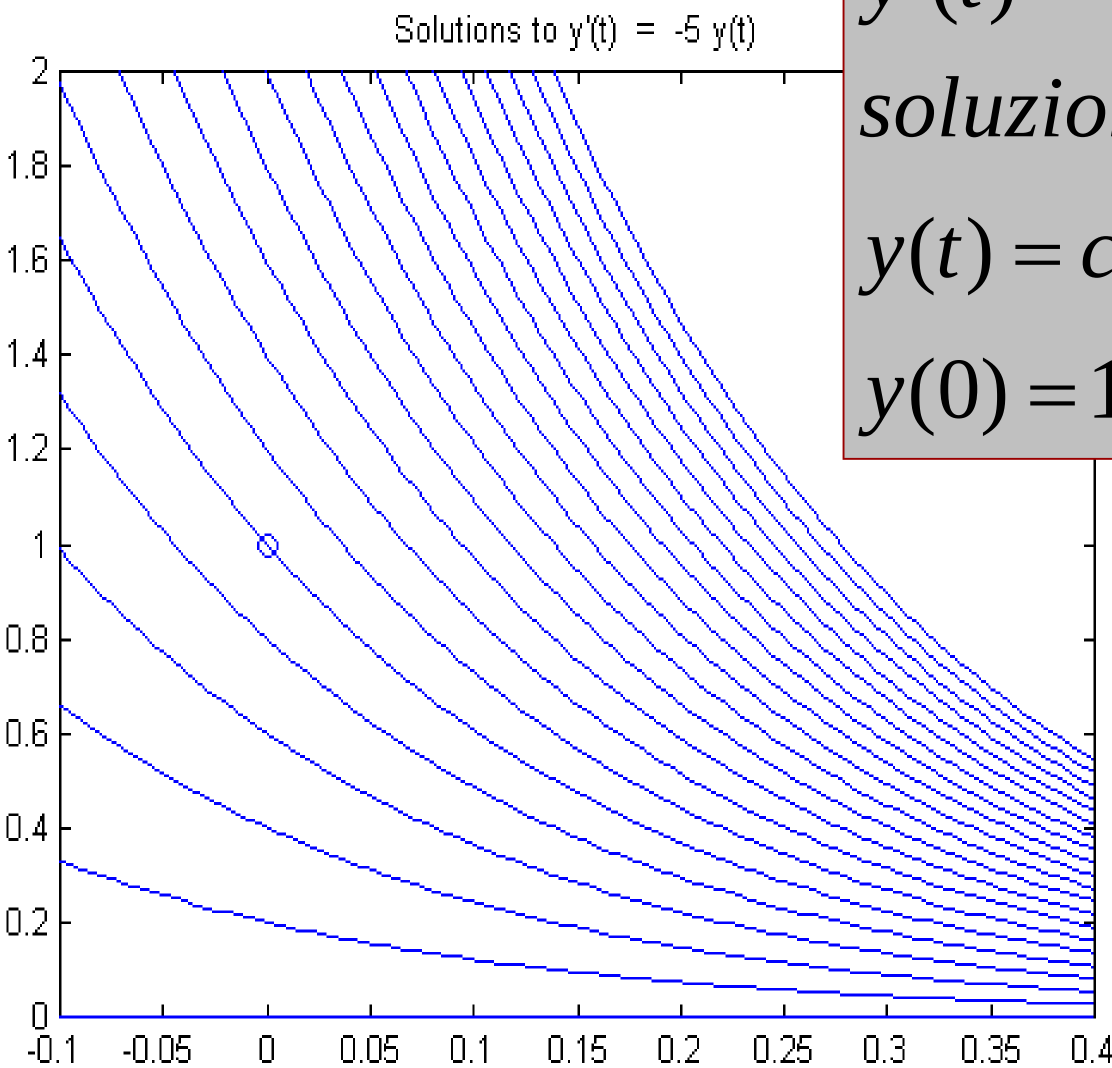
$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y(x) \Rightarrow \frac{1}{y(x)}dy = -p(x)dx$$

$$\int \frac{1}{y(x)}dy = -\int p(x)dx \Rightarrow \log\left(y(x)\right) = -\int p(x)dx + c$$

l'integrale generale è:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx + c} = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

Equazioni differenziali ordinarie



$$y'(t) = -5y(t)$$

soluzione

$$y(t) = ce^{-5t}, \ c \text{ costante}$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad y(t) = e^{-5t}$$

In generale

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

Equazioni differenziali ordinarie

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \forall x \in I \equiv [a,b]$$

L'equazione differenziale è soddisfatta da una famiglia di funzioni. La ***condizione iniziale***

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a,b]$$

Isola una di queste funzioni
(soluzione dell'Initial Value Problem **IVP**)

Problemi a valori iniziali (IVP)

PROBLEMA DI CAUCHY (o IVP)

Determinare la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria, scalare o vettoriale, completata da opportune condizioni iniziali.

IVP associato ad una ODE del primo ordine

Determinare una funzione y(x), continua e derivabile sull'intervallo I in **R**, a valori in **R**^{m}, m=1, tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a,b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

Sistemi di ODE

SISTEMA DI m EQUAZIONI ORDINARIE del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \ldots\ldots \\ y_m(x_0) = y_{m,0} \end{cases}$$

Ciascuna variabile y_j dipendente soddisfa un'equazione ordinaria a valori iniziali.

In forma compatta:

$$\boxed{\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}}$$

$$Y'(x) = \left(y_1'(x), \ldots, y_m'(x)\right) \qquad Y_0(x) = \left(y_{1,0}(x), \ldots, y_{m,0}(x)\right)$$

Equazione differenziale di ordine m

Ogni ODE di ordine ***m:***

$$y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m-1)}(x))$$

$$y(x_0) = y_{1,0}$$

$$y'(x_0) = y_{2,0}$$

$$\ldots.$$

$$y^{(m-1)}(x_0) = y_{m,0}$$

è equivalente ad un sistema di ***m*** equazioni del primo ordine:

Equazione differenziale di ordine m

Ponendo:

$$\begin{cases} z_1(x) = y(x) \\ z_2(x) = y'(x) \\ \ldots\ldots \\ z_m(x) = y^{(m-1)}(x) \end{cases}$$

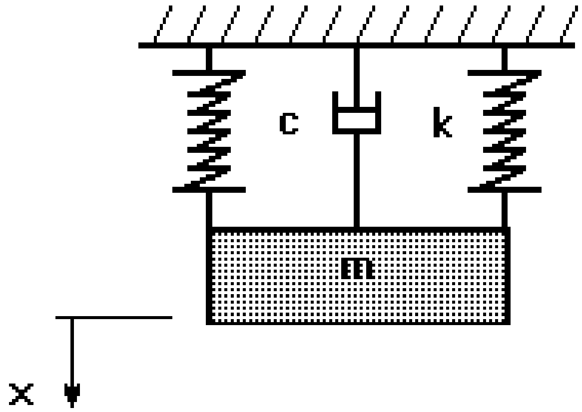
$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ \ldots\ldots \\ z_{m-1}'(x) = z_m(x) \\ z_m'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x), \ldots, z_{m-1}(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1(x_0) = y_{1,0} \\ z_2(x_0) = y_{2,0} \\ \ldots\ldots \\ z_m(x_0) = y_{m,0} \end{cases}$$

Equazione differenziale di ordine 2: ESEMPIO lineare

Equazione differenziale del secondo ordine per un sistema vibrante con molle.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$



Le condizioni iniziali sono $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

Equazione differenziale di ordine m: ESEMPIO

Riscriviamo l'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x\right)$$

$$z_1(t) = x(t)$$

$$z_2(t) = \frac{dx}{dt}$$

Equazione differenziale di ordine m: ESEMPIO

L'equazione può essere riscritta come un sistema di due equazioni del primo ordine

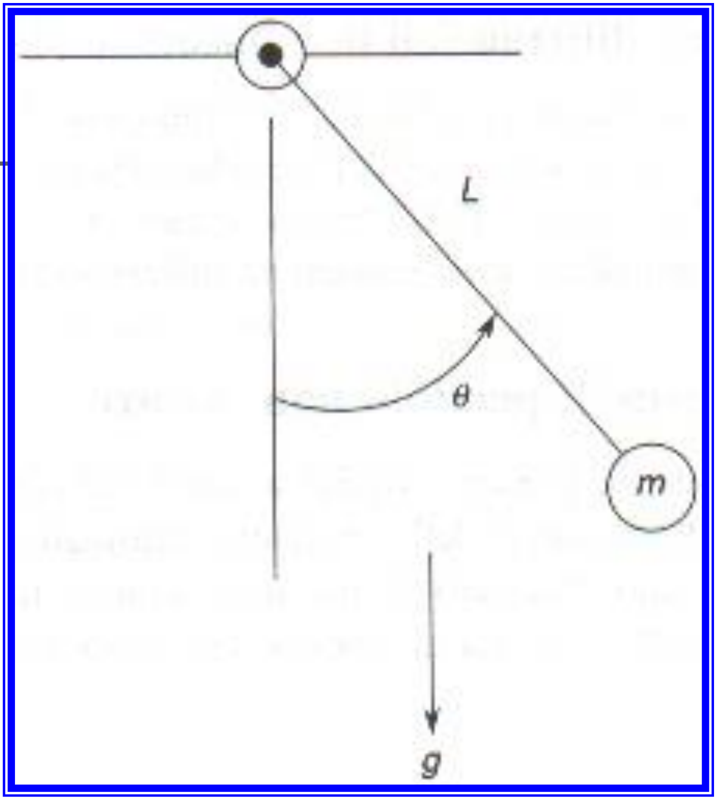
$$\frac{dz_1}{dt} = z_2(t)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\left(\frac{c}{m} z_2(t) + \frac{k}{m} z_1(t)\right)$$

Le condizioni iniziali sono $z_1(0) = x_0$ and $z_2(0) = 0$.

ESEMPIO
non lineare

Moto di una massa m appesa ad in filo di lunghezza L in assenza di attrito. Equazione del secondo ordine non lineare in θ (l'angolo con la verticale):



$$\vartheta'' + \frac{g}{L}\sin\vartheta = 0$$

Trasformazione in un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine non lineari

$$\begin{cases} z_1 = \vartheta \\ z_2 = \vartheta' \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \vartheta' = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = -\dfrac{g}{L}\sin(z_1) \end{cases}$$

Definizione **Funzione Lipschitziana**

Una funzione f : I -> R è Lipschitziana (abbr.Lip) nell' intervallo I se esiste una costante L tale che, qualunque sia la coppia di valori (x1, x2) in I × I , valga la maggiorazione

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \leq L \left| x_1 - x_2 \right|$$

- Questo equivale a dire che il rapporto incrementale di f nell'intervallo I è limitato

$$\frac{\left| f(x_1) - f(x_2) \right|}{\left| x_1 - x_2 \right|} \leq L$$

- Si dice che L è la costante di Lipschitz per la f se essa è l'estremo inferiore delle costanti L per cui valgono le diseguaglianze. (f derivabile → f Lip.)

Teorema di esistenza ed unicità

Sia ***f(x,y(x))*** definita e continua nella striscia illimitata

$$\boldsymbol{S = \{(x, y) : -\infty < a \le x \le b < \infty, y \in \Re^m\}}$$

supponiamo inoltre che la funzione ***f(x,y)*** sia lipschitziana nella variabile y, ovvero esista una costante **L>0** tale che

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \le L \| y_1 - y_2 \| \qquad \textbf{(condizione di Lipschitz)}$$

per ogni $x \in [a, b]$ e ogni coppia $y_1, y_2 \in \Re^m$.

Allora per ogni $\boldsymbol{x_0 \in [a,b]}$ e per ogni $y_0 \in \boldsymbol{\Re^m}$

esiste esattamente una funzione y(x) che soddisfa le condizioni:

$$\textbf{(}\boldsymbol{i}\textbf{)} \qquad \boldsymbol{y(x) \in C^1[a,b]}$$

$$\textbf{(}\boldsymbol{ii}\textbf{)} \qquad \boldsymbol{y'(x) = f(x, y(x))} \qquad \text{per ogni} \quad \boldsymbol{x \in [a,b]}$$

$$\textbf{(}\boldsymbol{iii}\textbf{)} \qquad \boldsymbol{y(x_0) = y_0}$$

Condizionamento del problema a valori iniziali

Il ***problema di Cauchy***, quando la funzione ***f(x,y)*** verifica la condizione di Lipschitz, è un ***problema ben posto***; ossia si ha per la soluzione ***esistenza, unicità e quest'ultima è funzione continua del dato iniziale y_0 (dipendenza continua dai dati)***.

Dal punto di vista numerico la dipendenza continua dai dati è essenziale, dal momento che si lavora su quantità approssimate, ma essa può non essere sufficiente per una adeguata approssimazione numerica.
In effetti, occorre che il problema sia ***ben condizionato.***

Si tratta di una richiesta ***più fine*** della dipendenza continua dai dati; con essa si vuole, infatti, che ***a piccole variazioni sui dati*** (relative o assolute a seconda dei casi) corrispondano ***piccole variazioni sui risultati.***

Condizionamento: sistema di ODE lineari

Lo studio del condizionamento può essere fatto con esattezza nel caso di **Sistemi di ODE lineari del tipo :**

(*) $$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) + g(x) & \forall x \in I \equiv [a,b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a,b] \end{cases}$$ $A \in \Re^{m\times m}$ **è diagonalizzabile**

cioè ammette un sistema di m autovettori linearmente indipendenti,

posto $H = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$**, risulta**

$$H^{-1}AH = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & .. & & \\ & & & .. & \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$ **con** $A\xi_l = \lambda_l \xi_l$ **l = 1,2,...,m**

In generale dovremo invece accontentarci di linearizzare il problema con uno del tipo (*)

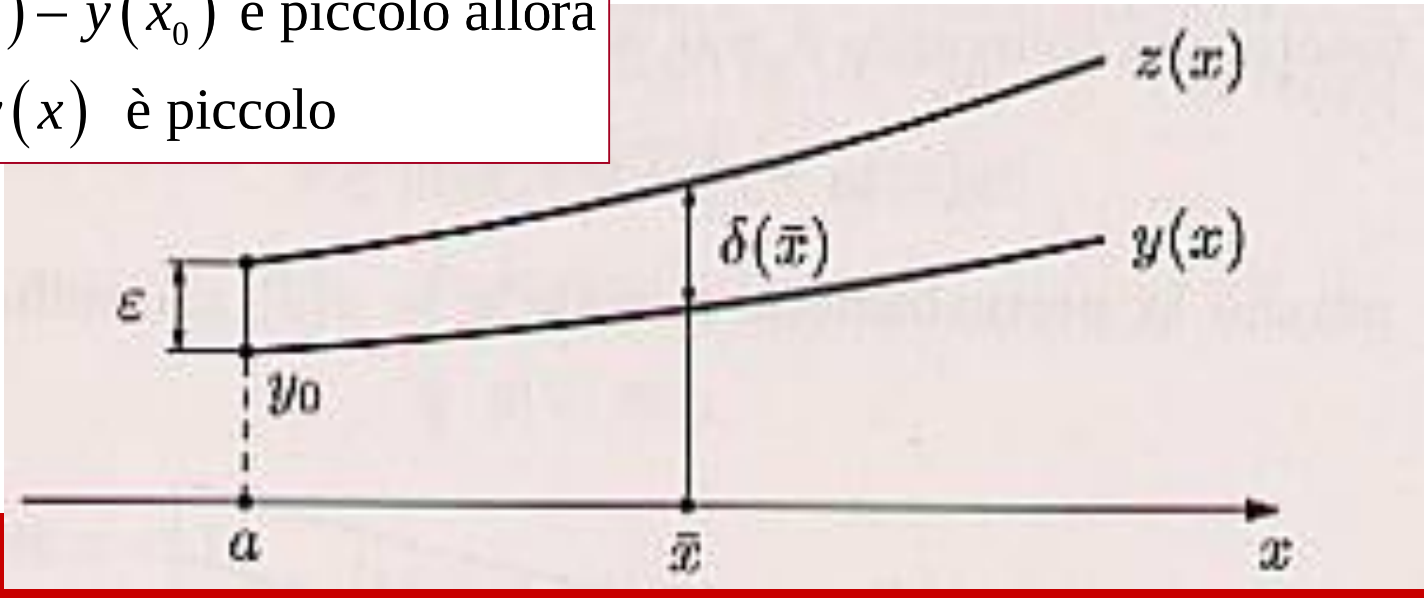
Condizionamento: sistema di ODE lineari

Problema perturbato **(**)** $\begin{cases} z'(x) = Az(x) + g(x) \\ z(x_0) = y_0 + \varepsilon \end{cases}$

essendo $z(x) = y(x; x_0 + \varepsilon)$

Posto $\delta(x) = z(x) - y(x)$

Se $\delta(x_0) = z(x_0) - y(x_0)$ è piccolo allora
$\delta(x) = z(x) - y(x)$ è piccolo



Condizionamento: sistema di ODE lineari

Sottraendo (*)-(**) si ha:
$$\begin{cases} \delta'(x) = A\delta(x) \\ \delta(x_0) = \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^{-1}\delta'(x) = H^{-1}AHH^{-1}\delta(x) \\ H^{-1}\delta(x_0) = H^{-1}\varepsilon \end{cases}$$

ponendo $d(x) = H^{-1}\delta(x)$

$$\begin{cases} d'(x) = \Lambda d(x) \\ d(x_0) = \eta \end{cases} \qquad \eta = H^{-1}\varepsilon$$

da cui
$$\boxed{\begin{cases} d_l'(x) = \lambda_l d_l(x) \\ d_l(x_0) = \eta_l \end{cases} \qquad l = 1,2,\ldots,m}$$

Ricordando che: $d_l(x) = \eta_l e^{\lambda_l (x - x_0)}$

Condizionamento: sistema di ODE lineari

$$\delta(x) = Hd(x) = \sum_{l=1}^{m} \eta_l e^{\lambda_l (x-x_0)} \xi_l$$

Gli autovalori della matrice caratterizzano la risposta del sistema all'introduzione di perturbazioni nel valore iniziale.

$$\|\delta(x)\| \to \infty \quad per \quad x \to \infty \quad quando \quad \mathbf{Re}(\lambda_l) > 0 \quad per\ almeno\ un\ indice\ l$$

$$\|\delta(x)\| \to 0 \quad per \quad x \to \infty \quad quando \quad \mathbf{Re}(\lambda_l) < 0 \quad per\ l = 1,2,\ldots,m$$

In quest'ultimo caso definiamo la soluzione del problema ***asintoticamente stabile***.

La curva ***y(x)*** viene detta semplicemente stabile se $\|\delta(x)\|$ si mantiene limitata in $[x_0, \infty[$.

Esempio

- Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} y_1{}'(x) = y_2 \\ y_2{}'(x) = y_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$$

- Autovalori: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$
- Integrale generale:

$$y_1(x) = a_1 e^{x} + a_2 e^{-x}, \qquad y_2(x) = a_1 e^{x} - a_2 e^{-x}$$

- Soluzione IVP:

$$y_1(x) = e^{-x}, \qquad y_2(x) = -e^{-x}$$

Esempio

- Consideriamo il problema con il dato iniziale perturbato:

$$\tilde{y}_1(0) = 1 + \varepsilon, \qquad \tilde{y}_2(0) = -1$$

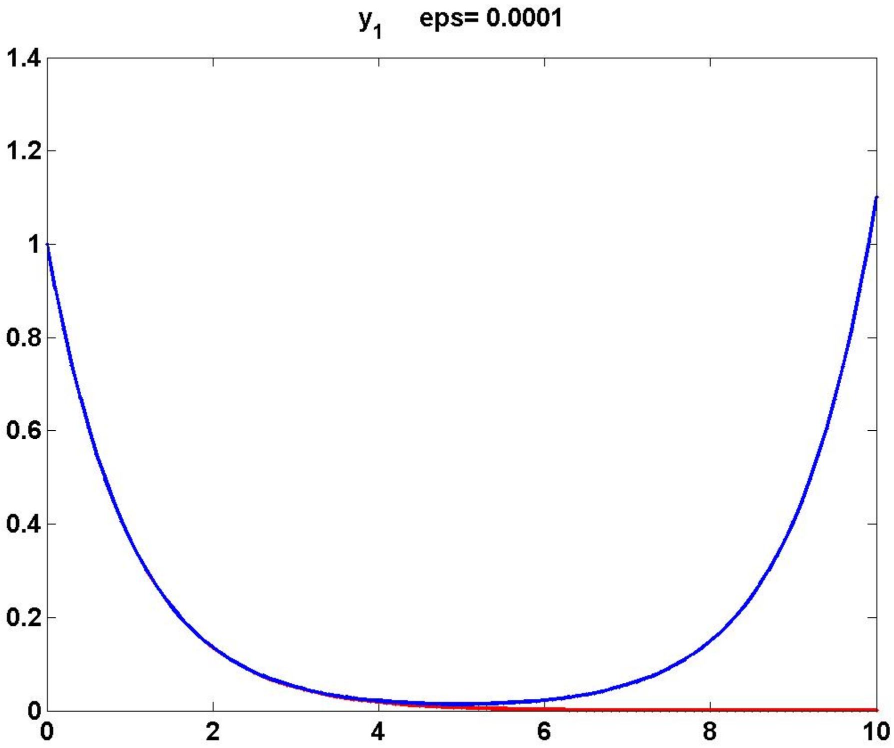
$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 + \varepsilon \\ a_1 - a_2 = -1 \end{cases} \qquad a_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad a_2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

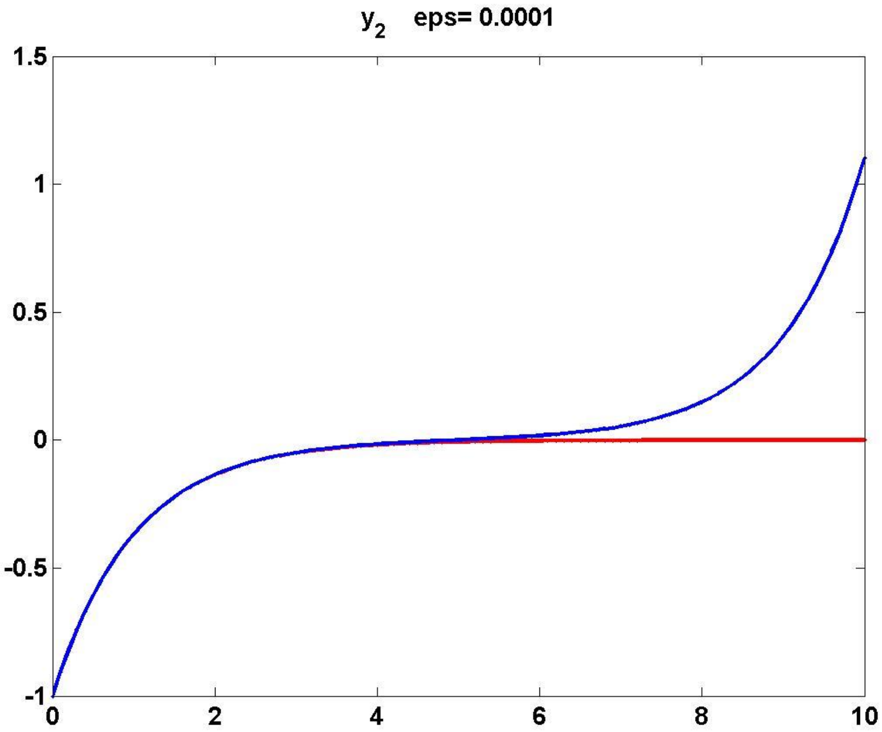
- Soluzione perturbata:

$$\tilde{y}_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{x} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{-x}, \qquad \tilde{y}_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{x} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{-x}$$

L'errore iniziale viene moltiplicato per il fattore di amplificazione e^x dunque il problema risulta instabile.

Soluzioni in [0,10] **Rosso** y_1, y_2 **Azzurro** $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$





Condizionamento: generica ODE non lineare

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a,b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

Problema perturbato

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(x_0) = y_0 + \varepsilon \end{cases}$$

ponendo $z(x) = y(x) + \delta(x)$

Occorre sviluppare la funzione del sistema perturbato

$$f(x, z(x)) = f(x, y(x) + \delta(x))$$

in serie di Taylor nell'intorno di (x,y(x))

$$f(x, z(x)) = f(x, y(x)) + f_y(x, y(x))\delta(x) + O\left(\|\delta\|^2\right)$$

supponendo che $O\left(\|\delta\|^2\right)$ **sia trascurabile**

Condizionamento generica ODE non lineare

Consideriamo solo la parte lineare

$$\begin{cases} y'(x)+\delta'(x) \cong f(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\delta(x) \\ y(x_0)+\delta(x_0) = y_0+\varepsilon \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \delta'(x) \cong f_y(x,y(x))\delta(x) \\ \delta(x_0) = \varepsilon \end{cases}$$

NOTA: Matrice Jacobiana di f rispetto ad y ha elementi $\left\{ f_y(x,y(x)) \right\}_{ij} = \left\{ J_f \right\}_{ij} = \dfrac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j}$

Condizionamento generica ODE non lineare

Assumendo infine che $f_y(x,y(x))$ sia pressoché costante, cioè

$$f_y(x,y(x)) \cong f_y(x_0,y_0)$$

possiamo affermare che, in prima approssimazione, la propagazione dell'errore iniziale ε è definita da

$$\begin{cases} \delta'(x) \cong f_y(x_0,y_0)\delta(x) \\ \delta(x_0) = \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta(x) = \varepsilon\, e^{f_y (x-x_0)}$$

Condizionamento generica ODE non lineare

$$\delta(x) = \varepsilon\, e^{f_y (x - x_0)}$$

Il condizionamento del problema è dato dal segno della f_y nel caso di una sola equazione:

Se $f_y < 0$ allora il sistema è *ben condizionato*
altrimenti è *mal condizionato*

nel caso generale di un sistema di equazioni non lineari:
se tutti gli autovalori della matrice Jacobiana f_y hanno parte reale negativa.

$$\|\delta(x)\| \to \infty \quad \textbf{per} \quad x \to \infty \quad \textbf{quando} \quad \mathrm{Re}(\lambda_l) > 0 \ \textbf{per almeno un indice l}$$

$$\|\delta(x)\| \to 0 \quad \textbf{per} \quad x \to \infty \quad \textbf{quando} \quad \mathrm{Re}(\lambda_l) < 0 \ \textbf{per}\ \mathbf{l = 1,2,\ldots,m}$$

Condizionamento generica ODE non lineare

Lo studio della propagazione di una perturbazione iniziale è stata possibile supponendo:

- trascurabile il termine $O\left(\|\delta\|^2\right)$
- costante lo Jacobiano $f_y(x,y(x))$

In realtà queste ipotesi spesso non sono verificate e il comportamento di $\delta(x)$ può non essere validamente rappresentato dagli autovalori di $f_y(x_0,y_0)$.

METODI NUMERICI: discretizzazione

Approssimare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Idea base

Discretizziamo l'intervallo I in sottointervalli di ampiezza h.
Consideriamo la successione di punti $x_j = x_0 + jh$ con $j = 0, 1, 2, \ldots$ che chiameremo nodi, h passo di discretizzazione.
Approssimiamo i valori della soluzione y(x) nei nodi x_j e chiamiamo tale approssimazione u_j. Pertanto u_j sarà un'approssimazione di $y(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

La sequenza di punti (x_j, u_j) approssima la soluzione y(x) in I

Discretizzazione

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$y(x'') - y(x') = \int_{x'}^{x''} f(x, y(x))dx \qquad x_0 \le x' < x''$$

Possiamo fare in modo che x’ ed x” coincidano con due nodi della discretizzazione, diciamo $x' = x_m$ $x'' = x_m + kh$ per un opportuno k. Quindi si integra numericamente il termine di destra con una formula di integrazione che usi come nodi di quadratura un sottoinsieme dei nodi

$$\{x_m, \ldots, x_m + k * h\}$$

Alcuni Metodi Numerici

$$u_{j+1} - u_j = h\ f(x_j, u_j)$$

Eulero in avanti

$$u_{j+1} - u_j = h\ f(x_{j+1}, u_{j+1})$$

Eulero all'indietro

$$u_{j+1} - u_{j-1} = 2h\ f(x_j, u_j)$$

Punto medio

$$u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2}[f(x_j, u_j) + f(x_{j+1}, u_{j+1})]$$

Trapezi (Crank-Nicolson)

$$u_{j+1} - u_{j-1} = \frac{h}{3}[f(x_{j-1}, u_{j-1}) + 4f(x_j, u_j) + f(x_{j+1}, u_{j+1})]$$

Simpson

Criteri di classificazione

1. Il numero di ***passi***
2. Il carattere ***esplicito*** o ***implicito***
3. La proprietà di ***stabilità***
4. La proprietà di ***convergenza***
5. Il tipo di ***accuratezza***

Criteri di classificazione

1. Il numero di *passi*

Un metodo si dice ad **un passo** se $\forall j \geq 0 \quad u_{j+1}$ dipende solo da u_j.

One step

Un metodo si dice a **p passi** $\quad (p \geq 2)$

se $\forall j \geq p-1 \quad u_{j+1}$ **dipende da** $u_j, u_{j-1}, \ldots, u_{j+1-p}$.

Multistep

Criteri di classificazione

2. Il carattere *esplicito* o *implicito*

Un metodo si dice esplicito se u_{j+1} si ricava direttamente in funzione dei valori nei soli punti precedenti.

$$u_{j+1} - u_j = h\ f(x_j, u_j)$$ Metodo di Eulero in avanti

$$u_{j+1} - u_{j-1} = 2h\ f(x_j, u_j)$$ Metodo del punto medio

Un metodo è implicito se u_{j+1} dipende implicitamente da se stessa attraverso *f(..,..)*.

$$u_{j+1} - u_j = h\ f(x_{j+1}, u_{j+1})$$ Metodo di Eulero all'indietro

Conseguentemente i metodi impliciti richiedono la soluzione di un problema in generale non lineare ad ogni passo.

Criteri di classificazione

3. La proprietà di *stabilità*

Un metodo numerico si dice ***stabile*** se a piccole perturbazioni sui valori iniziali corrispondono piccole variazioni nelle soluzioni.

Se il metodo numerico non fosse stabile, gli errori di arrotondamento introdotti su y_0 e propagati nel calcolo di $f(x_n,u_n)$ ad ogni passo, renderebbero infatti la soluzione calcolata del tutto priva di significato.

Criteri di classificazione

4. La proprietà di *convergenza*

Un metodo si dice ***convergente rispetto ad h*** se

$$\forall j = 0,1,2\ldots \qquad \left\| u_j - y(x_j) \right\| \leq C(h)$$

dove C(h) tende a zero quando il passo di discretizzazione h tende a zero.

Vedremo che un metodo stabile risulta essere convergente se e solo se è anche ***consistente***.

CONVERGENZA=STABILITA'+CONSISTENZA

Criteri di classificazione

5. Il tipo di *accuratezza*

L'accuratezza di un metodo convergente si misura attraverso l'ordine di infinitesimo dell'errore rispetto ad h.
Precisamente, un metodo ***converge con ordine p*** se

$$\exists C > 0 \; \textit{indipendente da h tale che}$$

$$\left\| y(x_j) - u_j \right\| \leq C\, h^p \qquad \forall j \geq 1.$$

Serena Morigi
Dipartimento di Matematica
serena.morigi@unibo.it
http://www.dm.unibo.it/~morigi