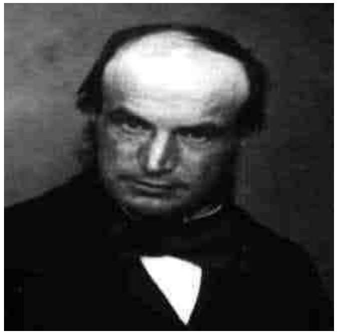
Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP 2

Metodi numerici per ODE

- **Metodi one-step**
  - Metodi Eulero
  - Analisi dei metodi one-step
  - Metodi Runge-Kutta
- **Metodi Multi-step**
  - Adams-Bashforth
  - Adams-Moulton
  - Predictor-Corrector
- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**

Eulero

Martin Kutta
Carl David Runge (1856-1927)



J.C. Adams
(1819-1882)

Alcuni Metodi Numerici ad un passo

u_{n+1} dipende solo da u_n per ogni n

$$u_{n+1} = u_n + h\ f(x_n, u_n)$$

Eulero in avanti (esplicito)

$$u_{n+1} = u_n + h\ f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

Eulero all'indietro (implicito)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]$$

Trapezi (Crank-Nicolson)

Metodo di Heun

Un metodo implicito può essere sempre modificato in modo da ottenere un metodo esplicito.

Es. A partire dal metodo dei trapezi

$$y(x_n+h)-y(x_n)\cong\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\boxed{y_{n+1}})\right]$$

$$\cong\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\boxed{y_n+hf(x_n,y_n)})\right]$$

Utilizzo del metodo di Eulero in avanti per il calcolo di y_{n+1}. Il metodo che si ottiene è detto **metodo di Heun** :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{h}{2}\left[f(x_n,u_n)+f(x_{n+1},u_n+hf(x_n,u_n))\right]$$

Metodo di Eulero esplicito

(x_0,y_0) è sulla curva soluzione y(x)

La pendenza della soluzione (y'(x) ovvero f(x,y)) si calcola utilizzando f: $f_0 = f(x_0, y_0)$

Per stimare y(x) consideriamo la retta tangente in (x0,y0)

$$\boxed{y = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0)}$$

in x1=x0+h, $\boxed{y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)}$ $y(x_1) \approx y_1$

Approssimazione della soluzione in x_1 è il valore in x_1 della tangente alla soluzione in (x_0,y_0)

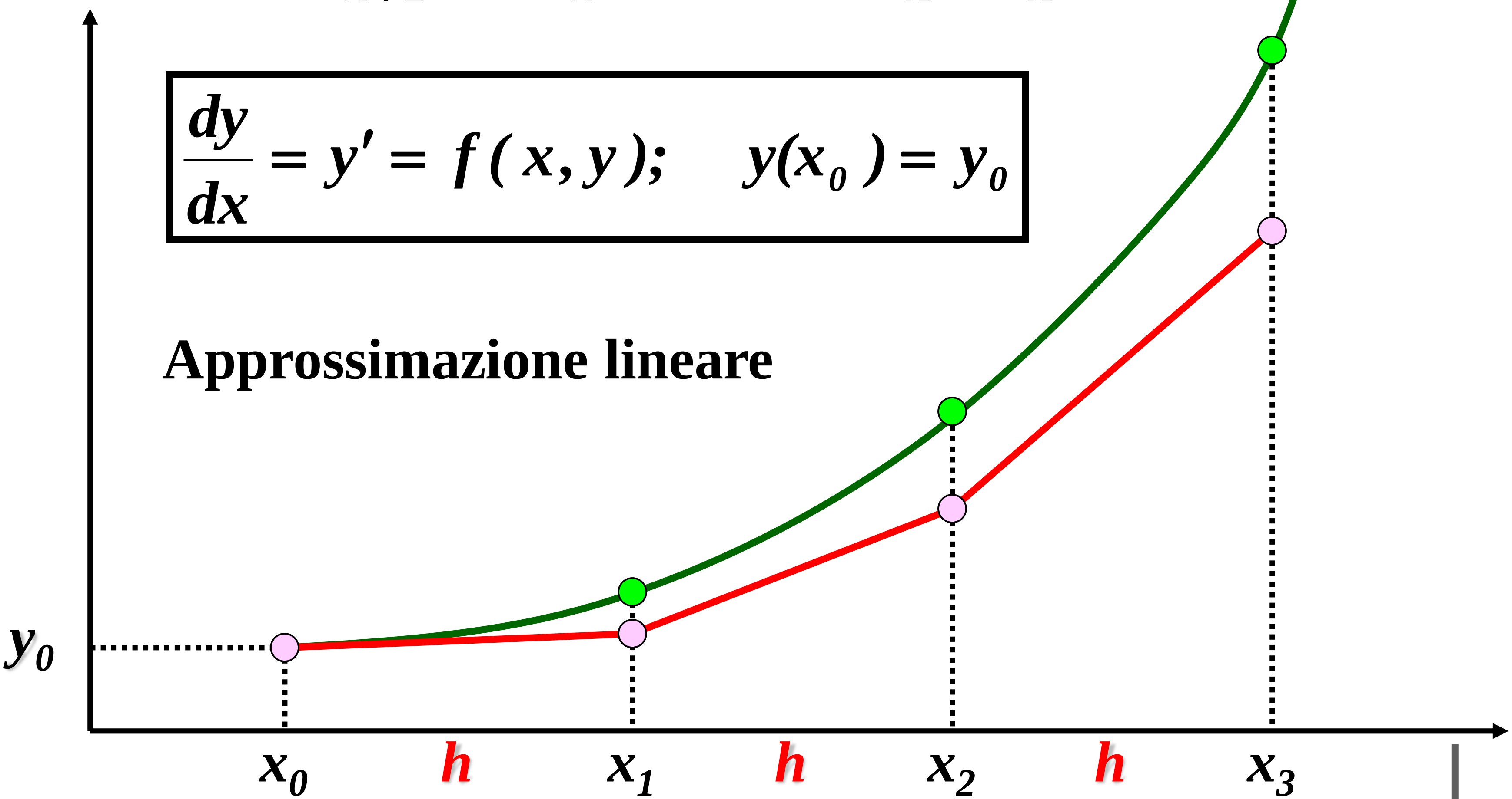
$$\boxed{y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1)}$$

Approssimazione della soluzione in x_2 è il valore in x_2 della tangente alla curva u(x) in (x_1,y_1): doppio errore!!

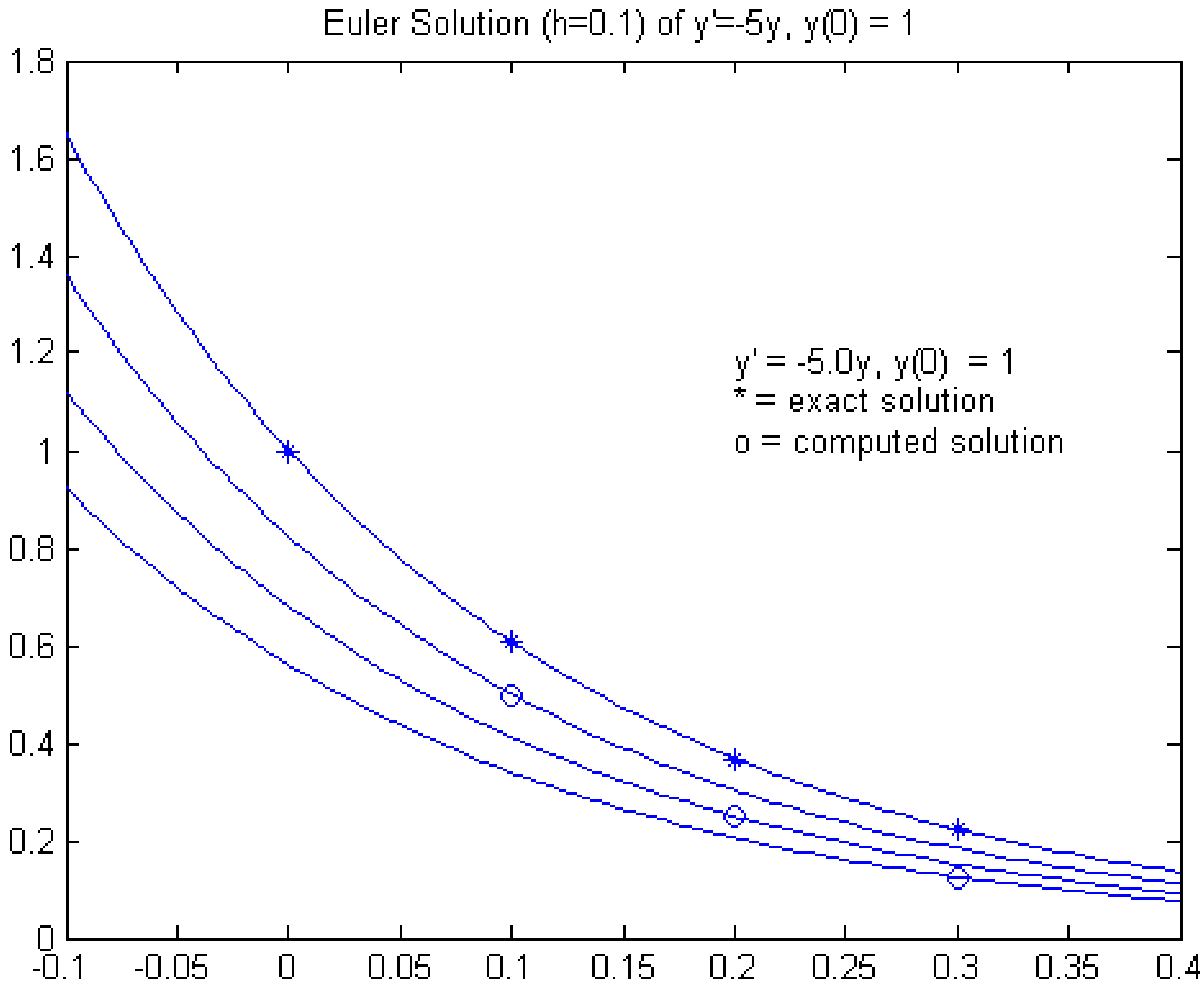
Metodo di Eulero esplicito

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(x_n, y_n)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0}$$



Metodo di Eulero esplicito: esempio



Metodo di Eulero esplicito: algoritmo

Valuta f nel punto (x_n,y_n) usa questa informazione di pendenza per ottenere y_{n+1}

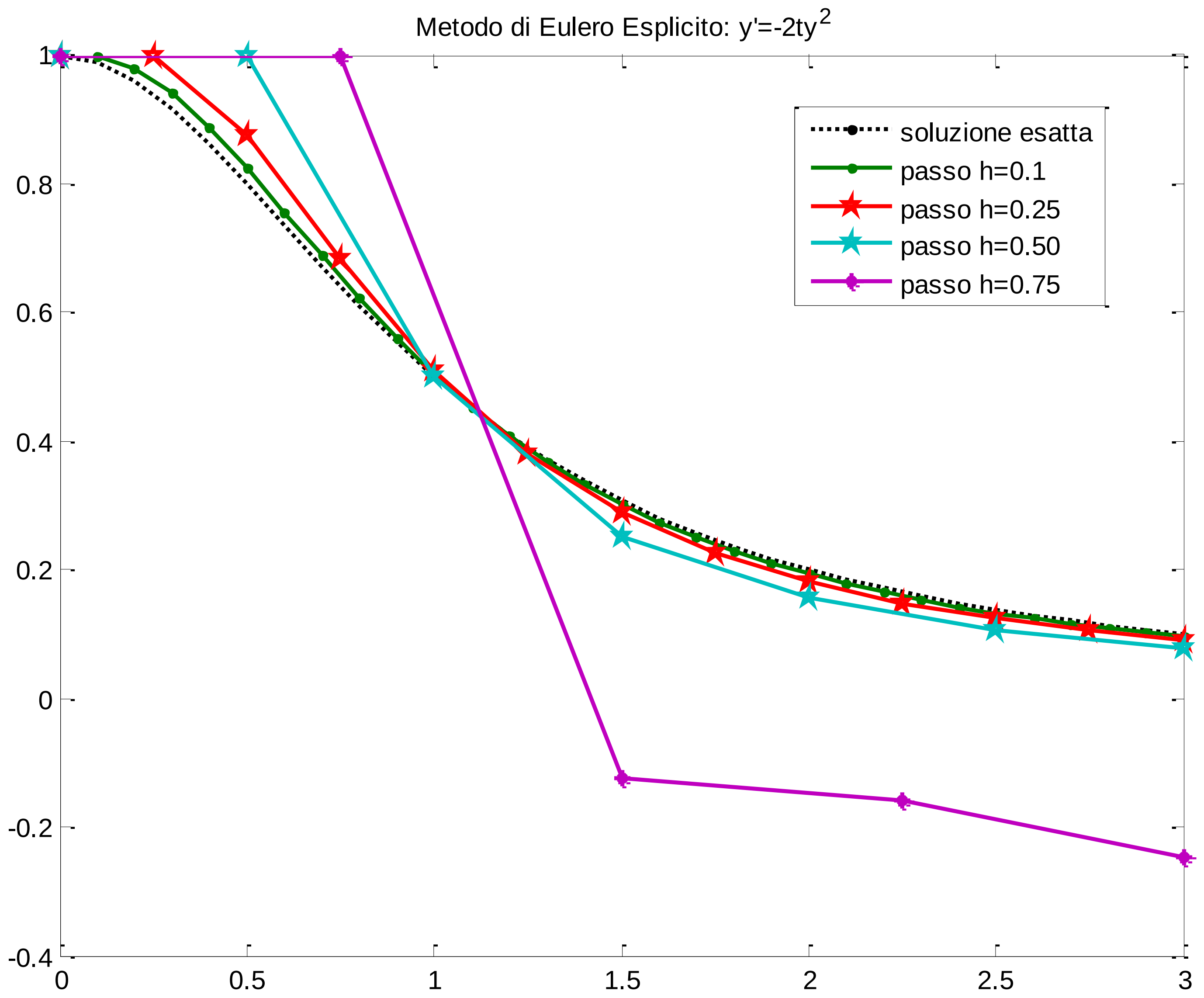
$$
\begin{aligned}
& n = 0 \\
& \text{for each } \; x_n, n = 0,..,N \\
& \quad f_n = f(x_n, u_n) \\
& \quad x_{n+1} = x_n + h \\
& \quad u_{n+1} = u_n + h f_n \\
& \quad n = n + 1 \\
& \text{end}
\end{aligned}
$$

Esempio

$$y' = -2ty^2$$
$$y(0) = 1$$

Soluzione analitica

$$y(x) = \frac{1}{1+t^2}$$



Metodo di Eulero esplicito

Problemi del metodo

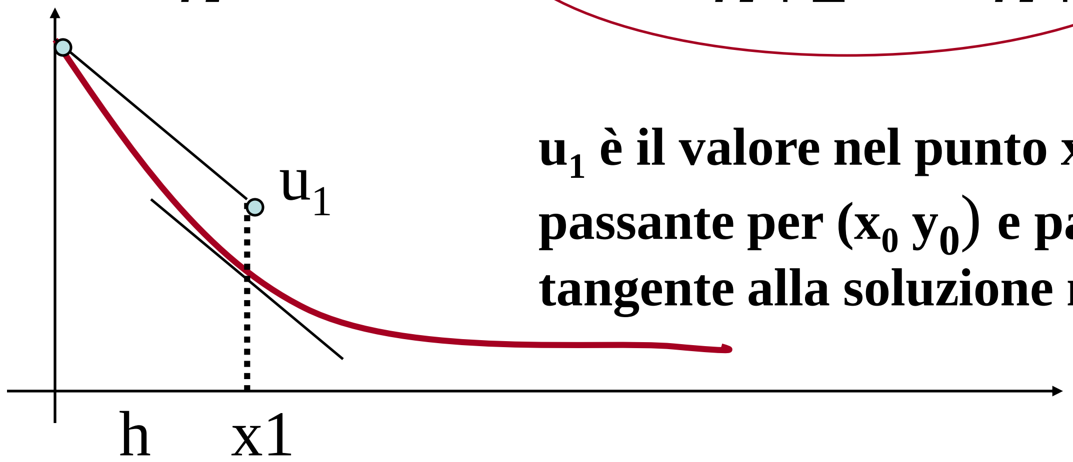
- Mancanza di accuratezza
- Ampiezza del passo piccola

Nota: usiamo la pendenza della retta tangente all'inizio dell'intervallo per determinare l'incremento della funzione, ma questo è inesatto. Se la pendenza fosse costante, la soluzione sarebbe lineare.

Metodo di Eulero all’indietro (implicito)

Si ottiene approssimando la derivata prima di y in x_{n+1} con una differenza finita all’indietro.

$$u_{n+1} = u_n + h\,\overbrace{f(x_{n+1}, y_{n+1})}^{y'_{n+1}}$$



u_1 è il valore nel punto x_1 della retta passante per $(x_0\ y_0)$ e parallela alla tangente alla soluzione nel punto x_1.

Metodo di Crank-Nicolson (trapezi)

Il metodo di Crank-Nicolson è un metodo implicito ad un passo.

$$\boxed{u_{\mathbf{n}+1} = u_{\mathbf{n}} + h\left(\frac{f_n + f_{n+1}}{2}\right)}$$

Il metodo usa la pendenza media delle pendenze ai due punti.

Come altri metodi impliciti utilizza il metodo di Newton per calcolare la soluzione del sistema non lineare, richiede perciò lo jacobiano della funzione f.

Metodo di Crank-Nicolson (trapezi):ESEMPIO

- Consideriamo

$$y' = x + y$$

- La condizione iniziale è: $y(0) = 1$
- Il passo è: $h = 0.02$
- La soluzione analitica è:

$$y(x) = 2e^{x} - x - 1$$

Metodo di Crank-Nicolson (trapezi):ESEMPIO

				Estimated	Solution	Average	Exact	Error
x_n	y_n	y'_n	hy'_n	y_{n+1}	y'_{n+1}	$h(y'_n+y'_{n+1})/2$	Solution	
0	1.00000	1.00000	0.02000	1.02000	1.04000	0.02040	1.00000	0.00000
0.02	1.02040	1.04040	0.02081	1.04121	1.08121	0.02122	1.02040	0.00000
0.04	1.04162	1.08162	0.02163	1.06325	1.12325	0.02205	1.04162	-0.00001
0.06	1.06366	1.12366	0.02247	1.08614	1.16614	0.02290	1.06367	-0.00001
0.08	1.08656	1.16656	0.02333	1.10989	1.20989	0.02376	1.08657	-0.00001
0.1	1.11033	1.21033	0.02421	1.13453	1.25453	0.02465	1.11034	-0.00001
0.12	1.13498	1.25498	0.02510	1.16008	1.30008	0.02555	1.13499	-0.00002
0.14	1.16053	1.30053	0.02601	1.18654	1.34654	0.02647	1.16055	-0.00002
0.16	1.18700	1.34700	0.02694	1.21394	1.39394	0.02741	1.18702	-0.00002
0.18	1.21441	1.39441	0.02789	1.24229	1.44229	0.02837	1.21443	-0.00003
0.2	1.24277	1.44277	0.02886	1.27163	1.49163	0.02934	1.24281	-0.00003

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi