

# Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP

## 3

# Metodi numerici per ODE

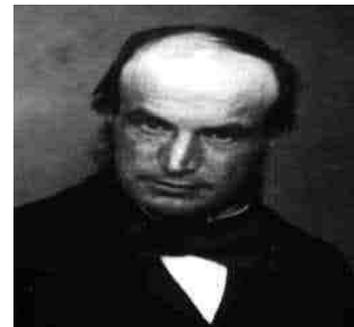
- **Metodi one-step**
  - Metodi Eulero
  - Analisi dei metodi one-step
  - Metodi Runge-Kutta
- **Metodi Multi-step**
  - Adams-Bashforth
  - Adams-Moulton
  - Predictor-Corrector
- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**



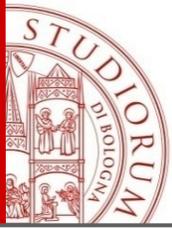
Eulero

Martin Kutta

Carl David Runge (1856-1927)



J.C. Adams  
(1819-1882)



# Comportamento dei metodi ad un passo

- Errori di arrotondamento

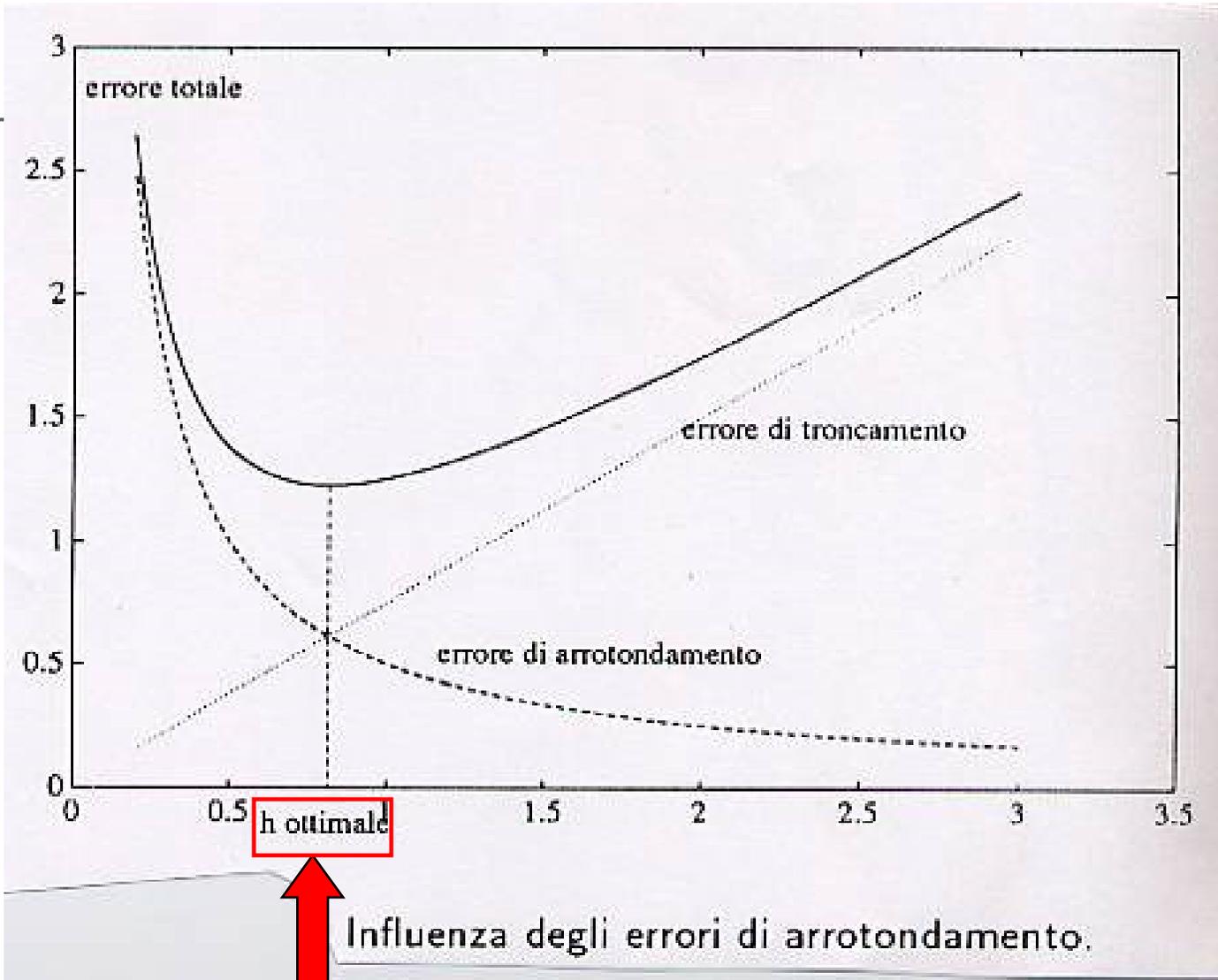
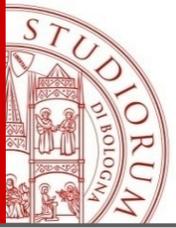
Studiando la propagazione degli errori di arrotondamento, si dimostra che il suo contributo all'errore totale si comporta, a parte alcune costanti, come  $1/h$ .

- Errori di troncamento

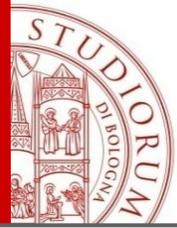
- Errori globali (errore al passo  $k$ -esimo)

- Errori locali (errore di ogni singolo passo)
- Sensibilità alle perturbazioni (zero-stabilità)

- Assoluta Stabilità



Si osserva che esiste un passo di integrazione  $h$  che bilancia in modo ottimale le due componenti dell'errore.



# Comportamento locale dei metodi ad un passo: accuratezza

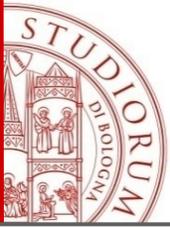
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall x \in I \equiv [a, b] \\ x_0 \in [a, b] \end{array}$$

**Metodo esplicito ad un passo**

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, f_n; h) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \quad u_0 = y_0$$

**Funzione di incremento**

posto  $f_n = f(x_n, u_n)$



# Comportamento locale dei metodi ad un passo

## Metodo esplicito ad un passo

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\Phi(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n; h) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0$$

**Soluzione esatta della ODE** Ponendo  $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(\mathbf{x}_n)$

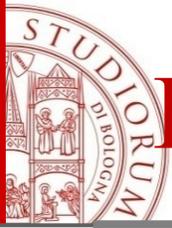
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\Phi(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n); h) + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad 0 \leq n \leq N_h - 1$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  è il residuo che si genera nel punto  $\mathbf{x}_{n+1}$  calcolando la soluzione numerica  $\mathbf{u}_{n+1}$  a partire dalla soluzione esatta  $\mathbf{y}_n$  al tempo  $\mathbf{x}_n$ .

Riscriviamo il residuo nella forma

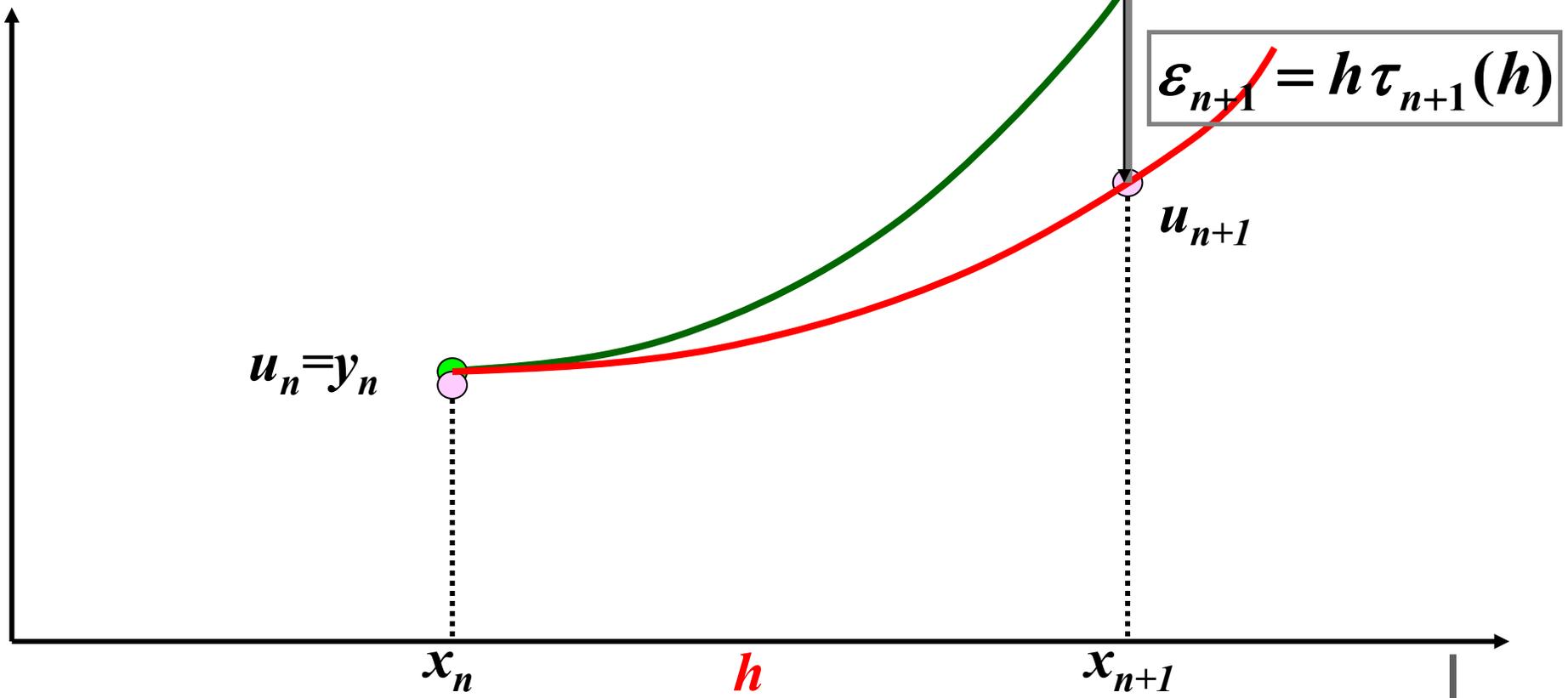
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = h\boldsymbol{\tau}_{n+1}(h)$$

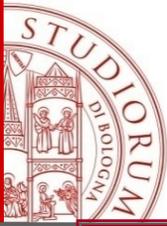
$\boldsymbol{\tau}_{n+1}(h)$  errore di troncamento locale nel punto  $\mathbf{x}_{n+1}$



# Errore Locale di Troncamento (ELT)

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h} [y_{n+1} - y_n - h\Phi(x_n, y_n, f(x_n, y_n); h)] = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{h}$$





# Consistenza dei metodi ad un passo

$$\tau(h) = \max_{0 \leq n \leq N_h - 1} |\tau_{n+1}(h)| \quad \text{errore di troncamento globale}$$

**Definizione.** Un metodo ad un passo si dice **consistente** con il problema di Cauchy

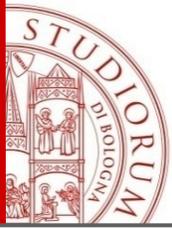
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a, b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

quando il suo errore di troncamento locale è infinitesimo rispetto ad  $h$ , cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$$

Inoltre, uno schema è consistente di **ordine  $p$** , se  $\forall x \in I$  la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy soddisfa la condizione

$$\tau(h) = O(h^p) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$



# Analisi del Metodo di Eulero

Il metodo è **consistente**, infatti :  $\Phi = f$

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h} [y_{n+1} - y_n] - f(x_n, u_n)$$

$$f(x_n, u_n) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$$

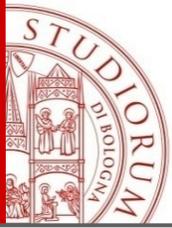
Formula di Taylor per  $y_{n+1}$

$$\tau_{n+1}(h) \cong \frac{1}{h} [y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2} h^2 y''(\eta) - y(x_n)] - y'(x_n)$$

$$= \frac{1}{2} h y''(\eta) \quad x_n < \eta < x_{n+1}$$

$$\Rightarrow \tau_{n+1}(h) = O(h) \quad \forall n \Rightarrow \tau(h) = O(h)$$

allora il Metodo di Eulero è di **ordine 1**



# Analisi del Metodo di Crank-Nicolson

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h} [y_{n+1} - y_n] - \frac{1}{2} [f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]$$

Poniamo  $y_n = y(x_n)$ . Se osserviamo lo sviluppo in serie di Taylor

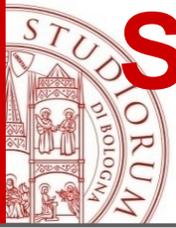
$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{1}{2} h^2 y''_n + O(h^3)$$

e usiamo una differenza finita in avanti per rappresentare la derivata 2°

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h y'_n + \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{y'_{n+1} - y'_n}{h} + O(h) \right) + O(h^3) \\ &= y_n + h y'_n + \frac{1}{2} h y'_{n+1} - \frac{1}{2} h y'_n + O(h^3) \\ &= y_n + h \left( \frac{y'_{n+1} + y'_n}{2} \right) + O(h^3) \end{aligned}$$

allora il Metodo dei trapezi è di **ordine 2**.





# Stabilire sperimentalmente l'ordine $p$ di un metodo

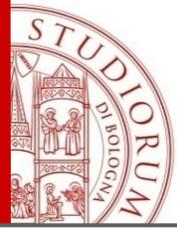
- $e_i$  errore relativo al passo  $h_i$

$$p_i = \frac{\log(e_i / e_{i-1})}{\log(h_i / h_{i-1})} \quad i = 2, \dots, N$$

- Conggettura

$$e_i = Ch_i^p$$

- In realtà l'errore non sarà possibile calcolarlo poiché la soluzione esatta non è nota. Ma è possibile stimarlo.



# Zero-stabilità per i metodi ad un passo

Il metodo numerico

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, f_n; h) \quad 0 \leq n \leq N_h - 1 \quad u_0 = y_0$$

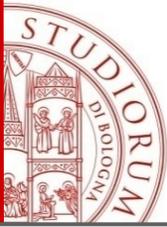
che risolve il problema  $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a, b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$   
è **zero-stabile** se

$$\exists h_0 > 0, \exists C > 0: \forall h \in (0, h_0], \left| z_n^{(h)} - u_n^{(h)} \right| < C\varepsilon \quad 0 \leq n \leq N_h.$$

Cost. C indipendente da h dove  $z_n^{(h)}, u_n^{(h)}$  sono soluzioni dei problemi

$$\begin{array}{|l} z_{n+1}^{(h)} = z_n^{(h)} + h[\Phi(x_n, z_n^{(h)}, f(x_n, z_n^{(h)}; h)) + \delta_{n+1}] \\ z_0 = y_0 + \delta_0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} u_{n+1}^{(h)} = u_n^{(h)} + h\Phi(x_n, u_n^{(h)}, f(x_n, u_n^{(h)}; h)) \\ u_0 = y_0 \end{array}$$

per  $0 \leq n \leq N_h - 1$ , sotto l'ipotesi che  $|\delta_k| \leq \varepsilon, 0 \leq k \leq N_h$



# Zero-stabilità

La proprietà

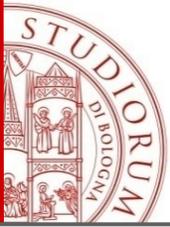
$$\exists h_0 > 0, \exists C > 0: \forall h \in (0, h_0], \left| z_n^{(h)} - u_n^{(h)} \right| < C\varepsilon \quad 0 \leq n \leq N_h.$$

garantisce che il metodo sia poco sensibile alle piccole perturbazioni.

Riguarda il comportamento del metodo numerico nel caso limite  $h \rightarrow 0$  e questo giustifica il nome di zero-stabilità.

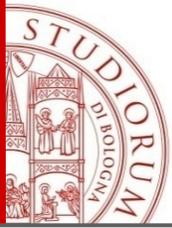
È una proprietà specifica del metodo numerico e non del problema di Cauchy (il quale è stabile, grazie alla uniforme lipschitzianità di  $f$ ).

**Nota:** la costante  $C$  è indipendente da  $h$  (e dunque da  $N_h$ ), ma può dipendere dall'ampiezza dell'intervallo di integrazione  $I$ . In effetti la formula non esclude a priori che la costante  $C$  diventi tanto più grande quanto maggiore è l'ampiezza di  $I$ .



# Zero-stabilità

- L'esigenza di formulare una richiesta di stabilità per il metodo numerico è suggerita, prima di ogni altra cosa, dalla necessità di tenere sotto controllo gli inevitabili errori che l'aritmetica finita di ogni calcolatore introduce.
- Se il metodo numerico non fosse zero-stabile, gli errori di arrotondamento introdotti su  $y_0$  e propagati nel calcolo di  $f(x_n, u_n)$  ad ogni passo, renderebbero infatti la soluzione calcolata del tutto priva di significato.



# Teorema (Zero-stabilità)

Dato il generico metodo numerico ad un passo

$$u_{n+1}^{(h)} = u_n^{(h)} + h\Phi(x_n, u_n^{(h)}, f(x_n, u_n^{(h)}; h)) \quad u_0 = y_0$$

per la risoluzione del problema di Cauchy

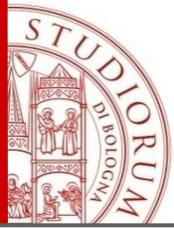
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \equiv [a, b] \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Supponiamo che la **funzione di incremento  $\Phi$  sia lipschitziana di costante  $\Lambda$**  rispetto al secondo argomento, uniformemente rispetto ad  $h$  e a  $x_j \in [x_0, x_0 + T]$ , ossia

$$\exists h_0 > 0, \quad \exists \Lambda > 0 : \quad \forall h \in ]0, h_0]$$

$$\left| \Phi(x_n, u_n^{(h)}, f(x_n, u_n^{(h)}; h)) - \Phi(x_n, z_n^{(h)}, f(x_n, z_n^{(h)}; h)) \right| \leq \Lambda |u_n^{(h)} - z_n^{(h)}|, \quad 0 \leq n \leq N_h$$

Allora il metodo **è zero-stabile**



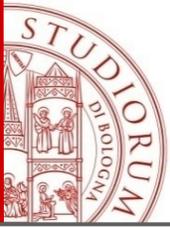
# Convergenza: errore globale di troncamento

- **Definizione:** Un metodo numerico si dice **convergente** nel punto  $x_n$  se, data una suddivisione dell'intervallo di integrazione  $I$  in  $N_h$  intervallini di ampiezza  $h$ , la soluzione numerica tende alla soluzione esatta dell'equazione nel medesimo punto al tendere all'infinito del numero di suddivisioni, cioè che

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (N_h \rightarrow \infty)}} u_n = y(x_n)$$

- Diremo che il metodo numerico converge in tutto l'intervallo se è convergente per ogni valore  $x_n$  in  $I$ .

$$\forall n = 0, 1, \dots, N_h, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (N_h \rightarrow \infty)}} u_n = y(x_n)$$



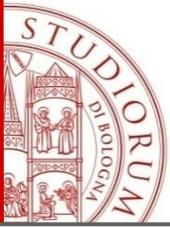
# Convergenza

L'errore globale

$$\forall n = 0, 1, \dots, N_h, \quad e_n = |u_n - y_n|$$

è il risultato dell'accumulo eccessivo degli **errori locali di troncamento** e della loro propagazione, più precisamente ad ogni passo viene introdotto un nuovo errore locale e questo si propaga successivamente. Per la convergenza allora occorre che l'accumulo degli errori locali 'non esploda' quando il passo diventa piccolo. Questa è in sostanza la nozione di **zero-stabilità**.

Si richiede che l'errore globale di discretizzazione possa essere reso piccolo quanto si vuole rendendo il passo  $h$  sufficientemente piccolo. Se il problema però è mal condizionato per rendere accettabile l'amplificazione dell'errore al passo precedente occorre prendere un passo  $h$  molto piccolo con il rischio che il processo di integrazione non avanzi più.

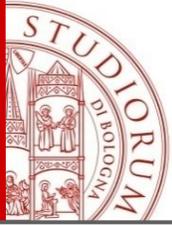


# Convergenza

## Teorema di Lax-Richtmyer o di equivalenza.

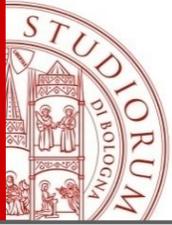
Un metodo consistente e zero-stabile è dunque convergente.

- Anche il viceversa: un metodo convergente è zero-stabile.
- Tutti i metodi one-step presentati sono convergenti.



# Assoluta stabilità (h fissato)

- La convergenza non è una garanzia perché il metodo numerico fornisca dei risultati “accettabili”. Non è accettabile che il passo debba essere reso piccolissimo per garantire la stabilità.
- Necessità di una nuova definizione di stabilità nella quale si pensi fissato il passo  $h$  e si richieda che l'errore si propaghi in maniera limitata per  $N_h \rightarrow \infty$
- La proprietà di **assoluta stabilità** è in un certo senso speculare rispetto alla zero-stabilità, per quanto riguarda il ruolo di  $h$  e dell'insieme di integrazione  $I$ .
- Tale proprietà ha a che vedere con il **comportamento asintotico di  $u_n$** , a differenza della zero-stabilità nella quale, fissato l'intervallo, si studia l'andamento di  $u_n$  per  $h \rightarrow 0$



# Assoluta stabilità (h fissato)

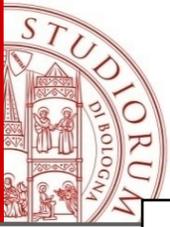
Definizione più precisa:

**problema modello – problema di Cauchy lineare**

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & x > 0, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0 \quad \text{se } \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Nello studio della stabilità si cerca di vedere se anche la soluzione numerica decresce nel tempo



# Assoluta stabilità

## Definizione:

Un metodo numerico  
per l'approssimazione di

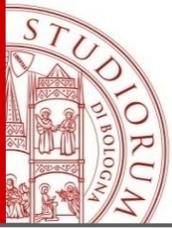
$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & x > 0, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è **assolutamente stabile** se  $|u_n| \rightarrow 0$  per  $x_n \rightarrow +\infty$

Sia  $h$  il **passo di discretizzazione**. La soluzione  $u_n$  dipende ovviamente da  $h$  e da  $\lambda$ . Si definisce **regione di assoluta stabilità** del metodo numerico il seguente sottoinsieme del piano complesso

$$A = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : |u_n| \rightarrow 0 \text{ per } x_n \rightarrow +\infty\}$$

Dunque  $A$  è l'insieme dei valori del prodotto  $h\lambda$  per i quali il metodo numerico produce soluzioni che tendono a zero quando  $x_n$  tende all'infinito.



# Assoluta stabilità: Metodo di Eulero in avanti

$$u_{n+1} = u_n + hf_n$$

Applicato al problema modello  $u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$ , per  $n \geq 0$ , con  $u_0 = 1$

Procedendo ricorsivamente rispetto a  $n$  si ricava  $u_n = (1 + h\lambda)^n u_0$ ,  $n \geq 0$

La condizione  $|u_n| \rightarrow 0$  per  $x_n \rightarrow +\infty$  è verificata se e soltanto se

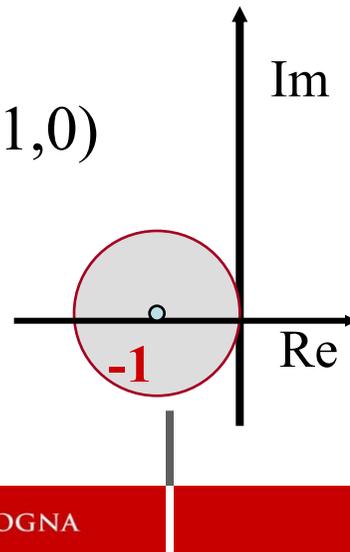
$$|1 + h\lambda| < 1$$

ovvero se  $h\lambda$  appartiene al cerchio di raggio unitario e centro  $(-1, 0)$

Tale richiesta equivale a

$$h\lambda \in C^- \quad \text{e} \quad 0 < h < -\frac{2 \operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2}$$

$$\text{essendo} \quad C^- = \{z \in C : \operatorname{Re}(z) < 0\}$$



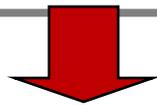


# Assoluta stabilità: Metodi di Eulero in avanti, esempio

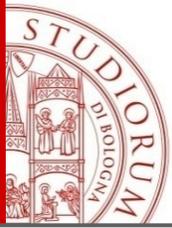
$$u_{n+1} = u_n + hf_n$$

$$y'(x) = -1y(x) \quad \text{per } x > 0 \quad \text{con } y(0) = 1.$$

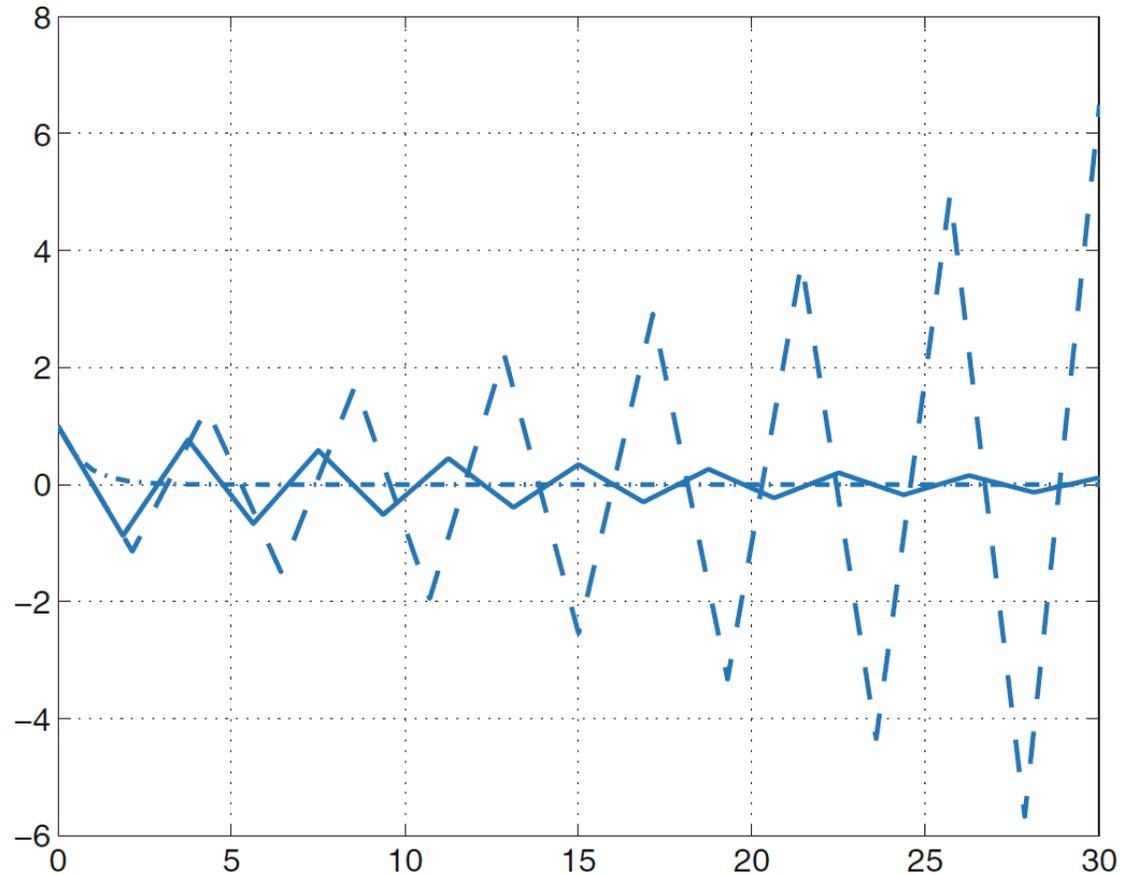
$$h\lambda \in C^- \quad \text{e} \quad 0 < h < -\frac{2 \operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2}$$



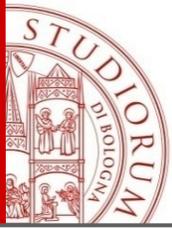
$$0 < h < 2$$



# Assoluta stabilità - esempio



- $h = 30/14$  ( $> 2$ ) (*dashed line*)
- $h = 30/16$  ( $< 2$ ) (*solid line*)
- $h = 1/2$  (*dashed-dotted line*)



# Assoluta stabilità: Metodo di Eulero all'indietro

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$$

Analogamente si ottiene

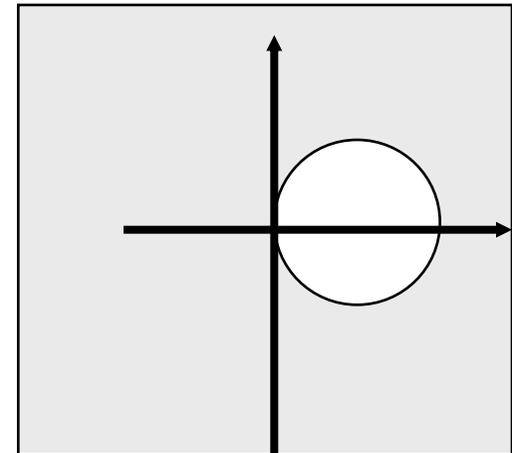
$$(1 - h\lambda)u_{n+1} = u_n$$



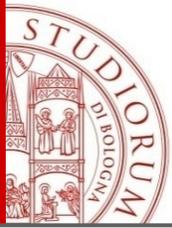
$$u_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} u_0, \quad n \geq 0$$

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| \leq 1$$

In questo caso la proprietà di assoluta stabilità è soddisfatta per **ogni valore di  $h$  che non appartiene al cerchio del piano complesso di centro  $(1,0)$  e raggio unitario.**



La soluzione numerica del metodo di Eulero implicito nell'esempio precedente non presenta oscillazioni per alcun valore di  $h$ .



# Assoluta stabilità: Metodi dei trapezi (Crank-Nicolson)

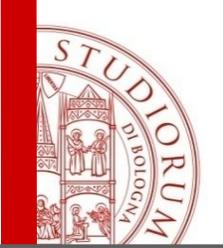
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}]$$

Si ottiene:

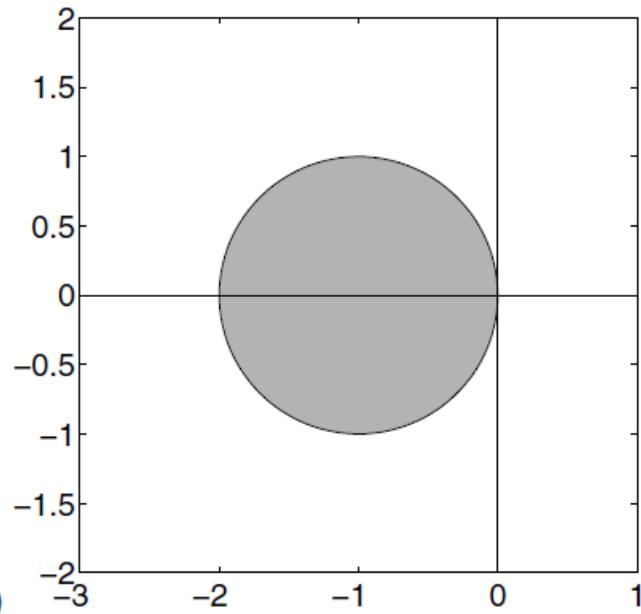
$$u_n = \left[ \frac{\left(1 + \frac{1}{2} h\lambda\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} h\lambda\right)} \right]^n u_0, \quad n \geq 0$$

Pertanto la condizione di assoluta stabilità è verificata **per ogni**

$$h\lambda \in C^-$$

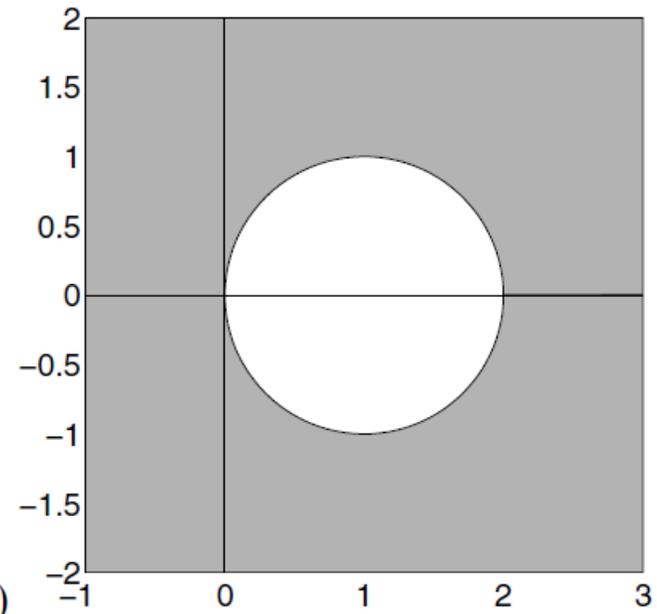


Forward Euler



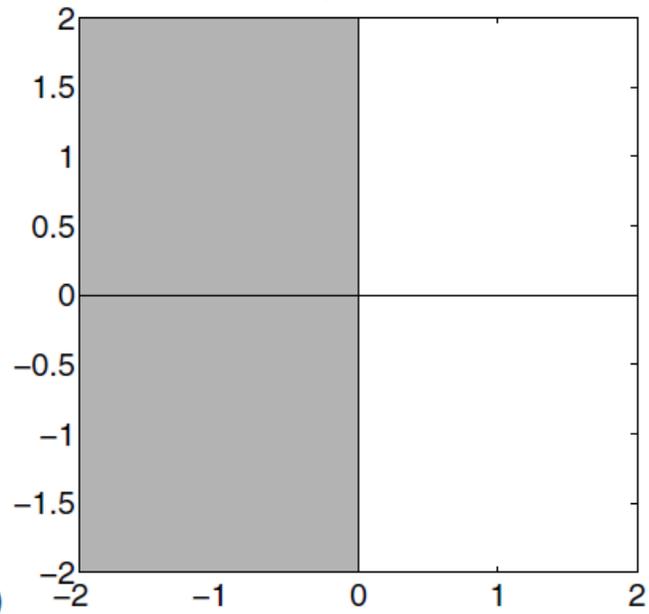
(a)

Backward Euler



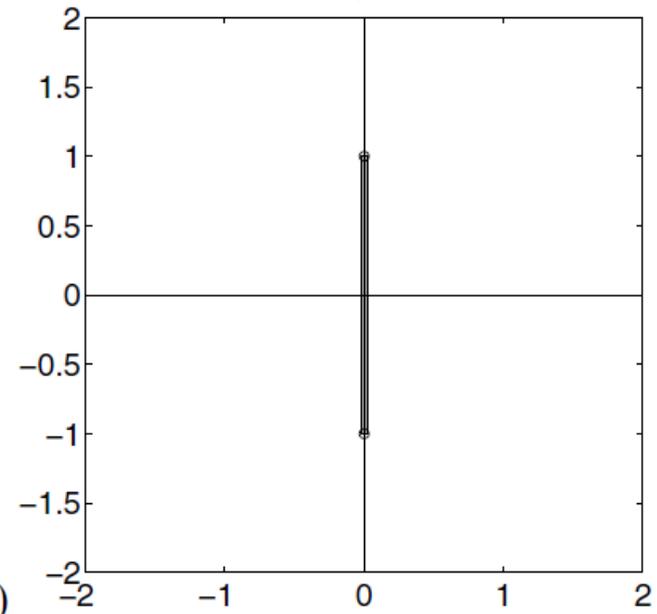
(b)

Trapezoidal

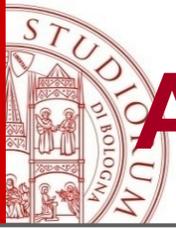


(c)

Midpoint



(d)



# Assoluta stabilità: Metodo di Heun

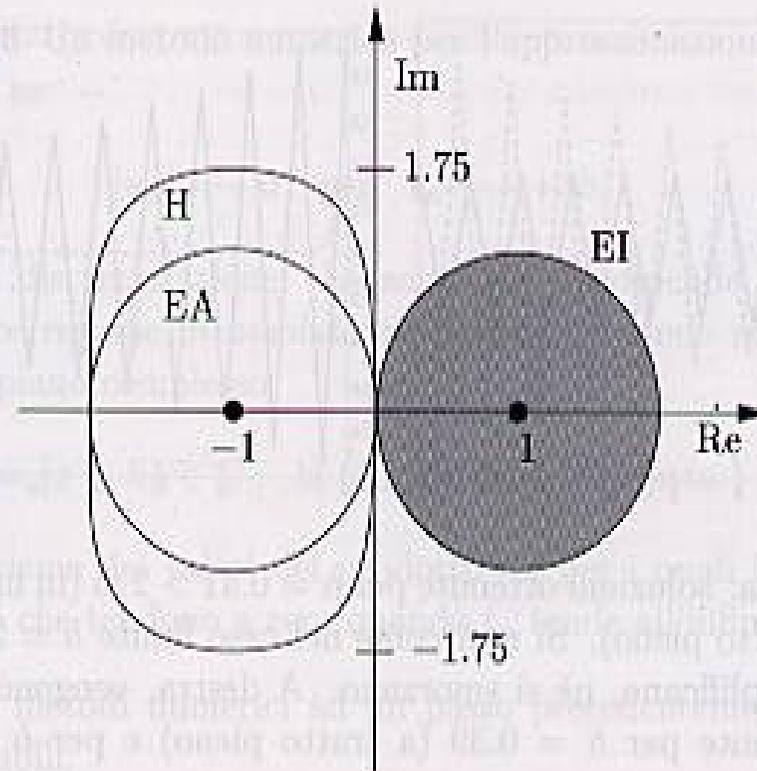
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f_n + f(x_{n+1}, u_n + hf_n)]$$

Si ottiene

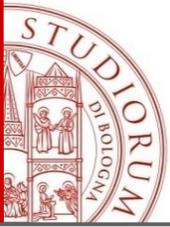
$$u_n = \left[ 1 + \frac{1}{2} h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right]^n, \quad n \geq 0$$

La regione di assoluta stabilità del metodo di Heun è più ampia di quella del metodo di Eulero in avanti. Soltanto la sua restrizione all'asse reale è la stessa.

# Regioni di assoluta stabilità - esempi



**Fig. 10.3.** Le regioni di assoluta stabilità per il metodo di Eulero in avanti (EA), di Eulero all'indietro (EI) e per il metodo di Heun (H). Si noti che la regione di assoluta stabilità per il metodo EI è il complementare del cerchio unitario di centro (1, 0) (in grigio)



# Metodi A-stabili

Nei casi limite in cui  $A$  coincide con l'intero semipiano complesso negativo, il metodo si dice *A-stabile*

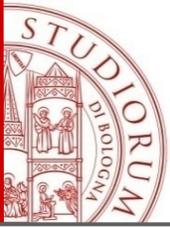
in tal caso il metodo soddisfa la condizione di stabilità  $|u_n| \rightarrow 0$  incondizionatamente rispetto a  $h$ .

*A-stabili:*

Metodi dei trapezi e Eulero all'indietro

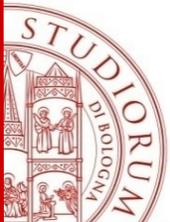
$$r_0(h\lambda) = \frac{\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)}{\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)}$$

$$r_0(h\lambda) = \frac{1}{(1 - h\lambda)}$$



# Metodi A-stabili

- **Metodo di Eulero in avanti** *non è A-stabile*: la sua regione di assoluta stabilità coincide con il cerchio di raggio unitario avente come centro il punto di coordinate  $(-1,0)$
- Tra i metodi sono da preferire quelli per i quali la regione di assoluta stabilità  $A$  è molto estesa o addirittura illimitata.
- Più grande è la regione di assoluta stabilità, meno restrittiva sarà la condizione da richiedere su  $h$ .



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**Serena Morigi**

Dipartimento di Matematica

[serena.morigi@unibo.it](mailto:serena.morigi@unibo.it)

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>