

Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP

4

Metodi numerici per ODE

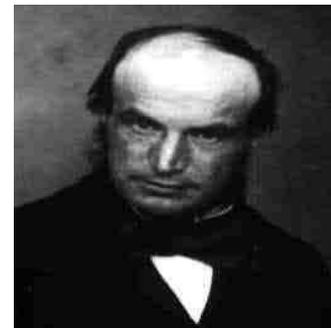
- **Metodi one-step**
 - Metodi Eulero
 - Analisi dei metodi one-step
 - Metodi Runge-Kutta
- **Metodi Multi-step**
 - Adams-Bashforth
 - Adams-Moulton
 - Predictor-Corrector
- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**



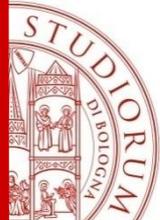
Eulero

Martin Kutta

Carl David Runge (1856-1927)

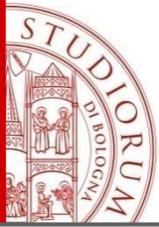


J.C. Adams
(1819-1882)



Metodi Runge-Kutta (1905)

- I metodi di Runge-Kutta sono famosi grazie alla loro efficienza; sono inseriti in quasi tutti i pacchetti software per ODE.
- Sono metodi ad un passo, come i metodi di Eulero, ma sono più accurati (ordine $p \geq 2$)
- Aumenta però il numero di valutazioni di funzione per ogni passo.



Metodi Runge-Kutta

Forma generale dei metodi ad un passo:

$$u_{n+1} = u_n + h\Phi(x_n, u_n, h; f)$$

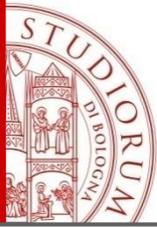
Idea: si determina calcolando numericamente l'integrale

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Consideriamo una partizione di $[x_n, x_{n+1}]$:

$$x_n \leq x_n + hc_1 \leq x_n + hc_2 \leq \dots \leq x_n + hc_m \leq x_{n+1}$$

Approssimiamo l'integrale con una formula di quadratura su ***m*** nodi:



Metodi Runge-Kutta a m stadi

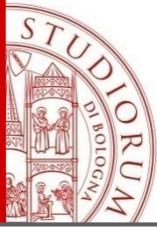
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \sum_{r=1}^m b_r \underbrace{f(x_n + hc_r, y(x_n + hc_r))}_{K_r}$$

NON E' NOTO IL VALORE DI $y(x)$ NEI NODI $x_n + hc_r$,
approssimiamolo con v_r .

Ogni stadio calcola un'approssimazione K_r calcolando $f(t, y)$
come combinazione lineare delle stime ottenute agli stadi
precedenti, ponendo $y(x_n) = v_1 = u_n$

$$y(x_n + hc_r) \approx v_r \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$v_r = u_n + h \sum_{s=1}^{r-1} a_{rs} f(x_n + hc_s, v_s)$$



Metodi Runge-Kutta a m stadi

Formula generale dei metodi RK:

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{r=1}^m b_r K_r$$

$$K_r = f \left(x_n + c_r h, u_n + h \sum_{s=1}^{m-1} a_{rs} K_s \right) \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$\{a_{rs}\}, \{c_r\}, \{b_r\}$$

Caratterizzano il metodo
m = numero degli stadi

Metodi Runge-Kutta a m stadi Espliciti ed Impliciti

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{r=1}^m b_r K_r$$

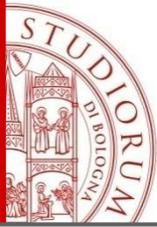
$$K_r = f \left(x_n + c_r h, u_n + h \sum_{s=1}^m a_{rs} K_s \right) \quad r = 1, 2, \dots, m$$

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdot	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdot	a_{2s}
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdot	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdot	b_s

Matrice di Butcher

Se $a_{ij} = 0$ per $j \geq i$, con $i = 1, 2, \dots, m$ allora ogni K_r può essere calcolato esplicitamente in funzione dei soli $r-1$ coefficienti K_1, K_2, \dots, K_{r-1} già precedentemente calcolati.

In tal caso lo schema è **esplicito**. In caso contrario è **implicito** (il calcolo dei K_i richiede in generale sistema non lineare).



Metodi Runge-Kutta a m stadi

Matrice di Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdot & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdot & b_s \end{array}$$

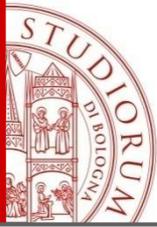
Condizione:

$$c_r = \sum_{s=1}^m a_{rs} \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$\Phi(x_n, u_n, f_n; h) = \sum_r b_r K_r$$

Il metodo è certamente consistente se:

$$\sum_{r=1}^m b_r = 1$$

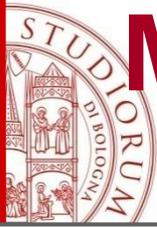


Metodi RK: calcolo coefficienti

L'ordine di un metodo è l'esponente della potenza di h dell'ELT.

I coefficienti incogniti si calcolano **richiedendo l'ordine desiderato s nell'errore locale di troncamento**, ovvero

richiedendo che s termini nello sviluppo in serie di Taylor della soluzione esatta $y(x_{n+1})$ in un intorno di x_n siano coincidenti con quelli della soluzione approssimata u_{n+1} .



Metodi Runge-Kutta del 2° ordine (m=2)

Formula generale per un metodo del secondo ordine:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

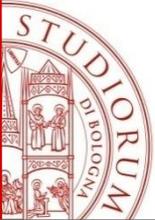
$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1)$$

$$u_{n+1} = u_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

$$\{a_{rs}\}, \{c_r\}, \{b_r\}$$

Caratterizzano il metodo
m= numero degli stadi

c_2	a_{21}	
	b_1	b_2



Metodi RK del 2° ordine: esempio

Se usiamo i coefficienti:

1	1
1/2	1/2

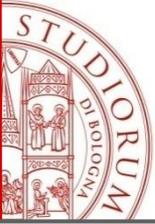
Otteniamo lo schema RK:

$$k_1 = f(x_i, u_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, u_i + hk_1)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2}h[k_1 + k_2]$$

Metodo di Heun



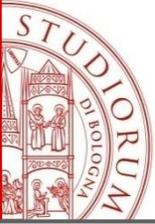
Metodi RK del 2° ordine: esempio

Se usiamo i coefficienti:

$2/3$	$2/3$
$1/4$	$3/4$

Otteniamo lo schema RK:

$$k_1 = f(x_i, u_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{2}{3}h, u_i + \frac{2}{3}k_1\right)$$
$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{4}hk_1 + \frac{3}{4}hk_2$$



Metodi RK del 4° ordine: esempio

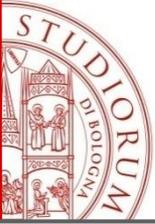
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = f(x_n, u_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

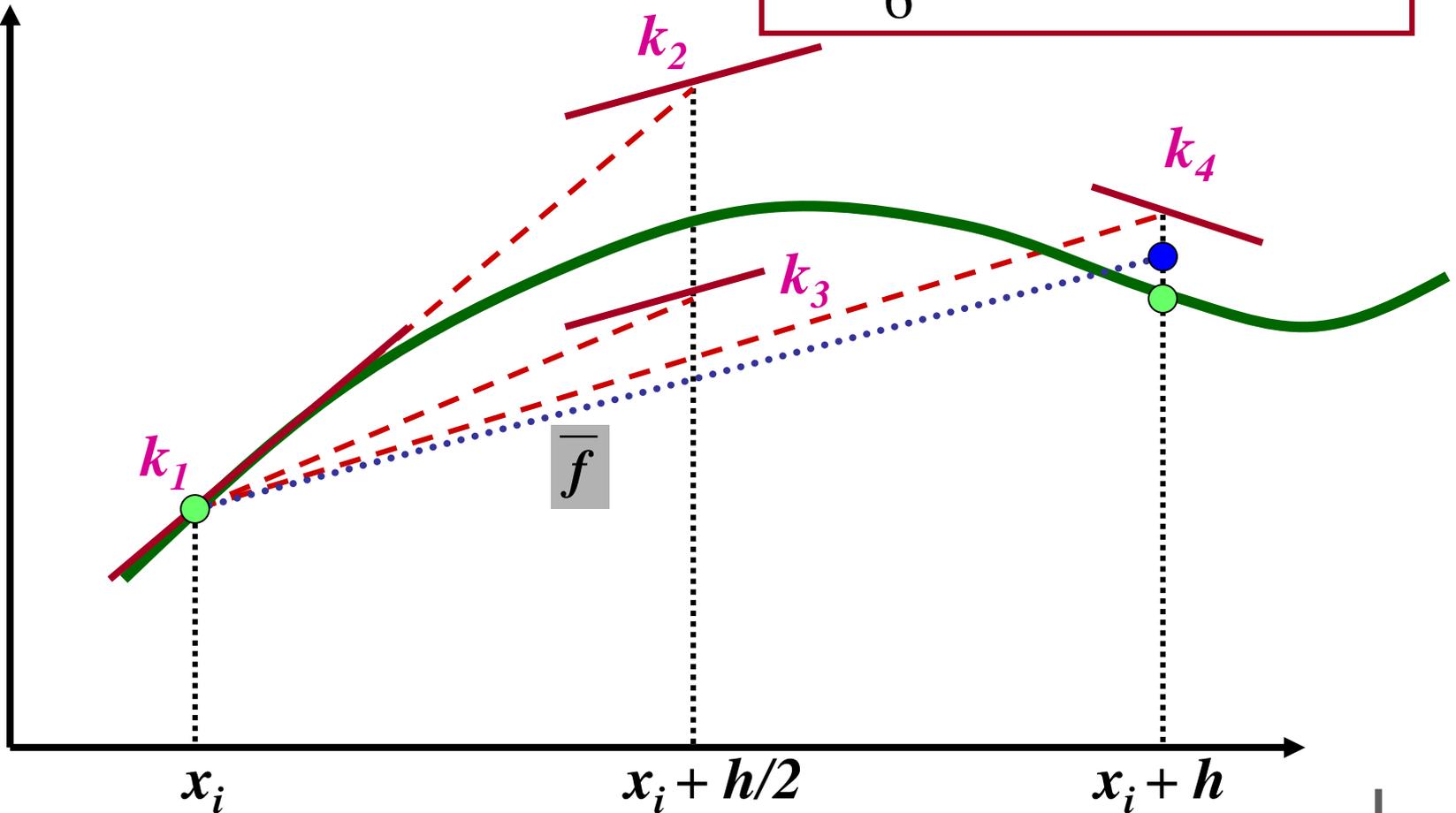
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

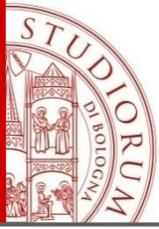
$$k_4 = f(x_n + h, u_n + k_3)$$



Metodi RK del 4° ordine

$$\bar{f} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

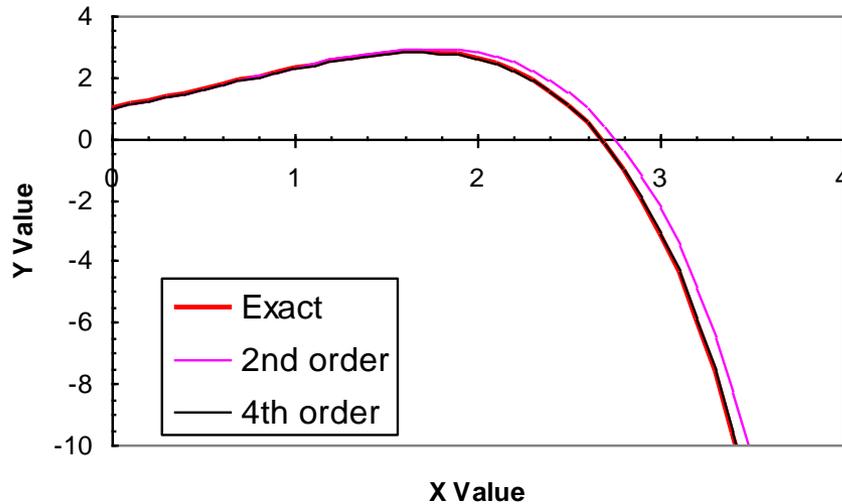




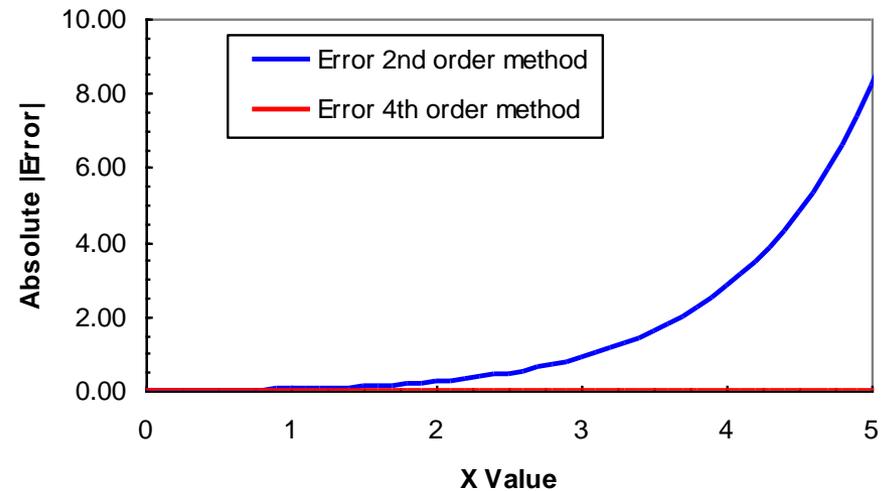
Metodi RK : esempio

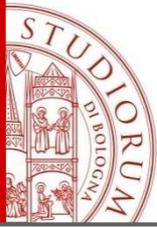
Confronto tra un metodo di Runge-Kutta del 2° ordine e del 4° ordine.

Runge Kutta Comparison



Error of the Methods





Metodi Runge-Kutta a m stadi

La relazione tra il numero di valutazioni della funzione f (m) e l'ordine dell'errore locale di troncamento (p) è data dalla seguente tabella:

RK Espliciti

Ordine p	1	2	3	4	5	6	7	8
stadi m	1	2	3	4	6	7	9	11

Ordine_{max} = m per $m=1,2,3,4$

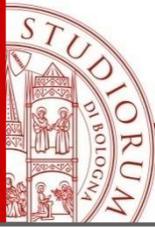
Ordine_{max} = $m-1$ per $m=5,6,7$

Ordine_{max} = $m-2$ per $m=8,9$

Ordine_{max} = $m-3$ per $m \geq 10$

Proposizione: per $p \geq 8$ non esiste alcun metodo esplicito di ordine p con $m=p+2$ stadi

RK Impliciti m passi massimo ordine $2m$



Scelta del passo di integrazione h

$$h_n = x_{n+1} - x_n$$

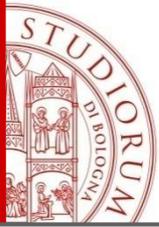
h grande

basso costo ma grande errore
di discretizzazione

h piccolo

dispendio di calcolo ma
maggior accuratezza

Determinare il più grande incremento del passo h in modo tale che l'errore di discretizzazione, dopo aver eseguito un passo con tal incremento, rimanga ancora al di sotto di una certa tolleranza



Adattività del passo

- Essendo ad un passo, i metodi Runge-Kutta ben si prestano al cambio del passo di integrazione h , purchè si disponga di uno stimatore efficiente dell'errore locale commesso al singolo passo.
- Strategie per la stima dell'errore locale di troncamento
 - 1) utilizzando lo stesso metodo Runge-Kutta con due passi diversi (tipicamente $2h$ e h);
 - 2) impiegando contemporaneamente due metodi Runge-Kutta di ordine diverso, ma con lo stesso numero m di stadi.



Stima dell'errore LT

2. Strategia con ordini diversi

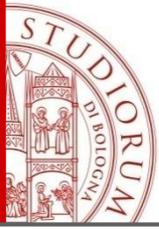
Utilizziamo simultaneamente **due metodi RK a m e m^* stadi**, di **ordine p e $p+1$** rispettivamente, che presentino lo **stesso insieme di valori $K_i, i=1, \dots, m$**

Si assume la seguente stima dell'ELT:

$$\tau_n \cong \frac{u_{n+1} - \widehat{u}_{n+1}}{h}$$

u_{n+1} : metodo di *ordine p* ad m stadi

\widehat{u}_{n+1} : metodo di *ordine $p+1$* a m^* stadi



Verifica

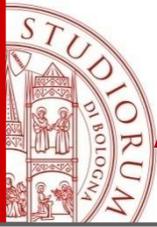
$$u_{n+1} = u_n + h_n \Phi(x_n, u_n, f_n; h) \quad \text{Ordine } p, \text{ errore locale di troncamento } \tau_n$$

$$\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + h_n \hat{\Phi}(x_n, \hat{u}_n, f_n; h) \quad \text{Ordine } p+1, \text{ errore locale di troncamento } \hat{\tau}_n$$

Supponiamo

$$u_n = \hat{u}_n = y(x_n) \quad \longleftarrow \quad \text{Soluzione analitica uscente dal punto } x_n.$$

$$\begin{aligned} O(h^p) \quad \tau_n &= \frac{1}{h} [y(x_{n+1}) - u_{n+1}] = \frac{1}{h} [y(x_{n+1}) - \hat{u}_{n+1}] + \frac{1}{h} [\hat{u}_{n+1} - u_{n+1}] = \\ &= \hat{\tau}_n + \frac{1}{h} [\hat{u}_{n+1} - u_{n+1}] \\ O(h^{p+1}) \end{aligned}$$



Adattività del passo: algoritmo

Fissata una tolleranza ε

Ad ogni passo:

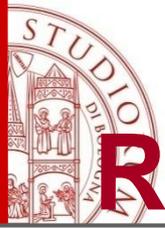
- calcolo

$$\hat{u}_{n+1}, u_{n+1}$$

- stima errore locale di troncamento $\tau_n \approx \frac{1}{h} [\hat{u}_{n+1} - u_{n+1}]$

- Se $|\tau_n| > \varepsilon$ allora u_{n+1} non è accettato,
diminuisce il passo h , ricalcolo,

- Altrimenti, u_{n+1} accettato si prosegue



Metodo RKF45:

Runge-Kutta Fehlberg del 4° ordine

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	0	0	0	0
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$	0	0	0
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	0
RK 4	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
RK 5	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
	$\frac{1}{360}$	0	$-\frac{128}{4275}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{55}$

Runge-Kutta del 4° ordine accoppiato con uno schema del 5° ordine, stesso numero di stadi:

routine con passo adattivo con controllo automatico dell'ELT. Per questo motivo è noto come

RKF45

b

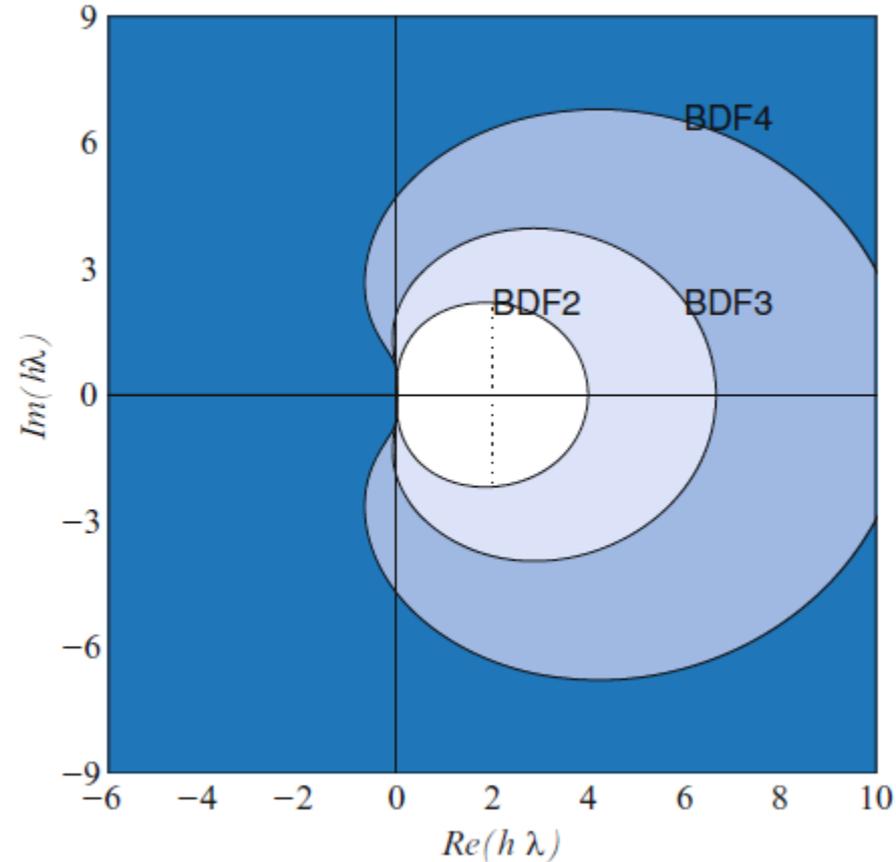
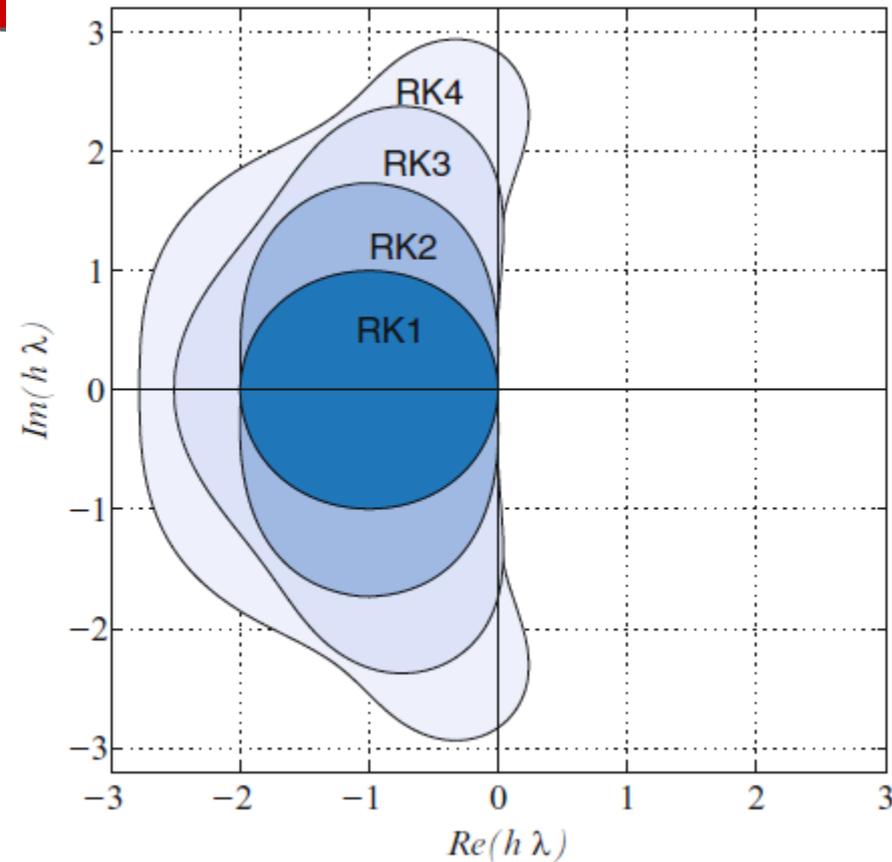
b1

E=b-b1

Attenzione: l'esistenza di punti di singolarità nella soluzione sono segnalati dalla presenza di passi eccessivamente piccoli

RK23

Regioni di assoluta stabilità

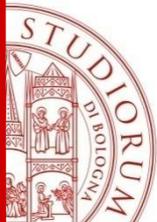


RK espliciti r stadi, $r=1, \dots, 4$

Explicit Runge–Kutta methods are generally unsuitable for the solution of stiff ODE because their region of absolute stability is small; in particular, it is bounded.

They can never be A-stable. **A-stable Runge-Kutta method is necessarily implicit.**

RK impliciti r stadi



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>