

Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP

5

Metodi numerici per ODE

- **Metodi one-step**
 - Metodi Eulero
 - Analisi dei metodi one-step
 - Metodi Runge-Kutta



Eulero

Martin Kutta

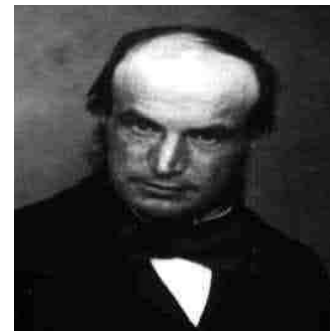
Carl David Runge (1856-1927)



→ Metodi Multi-step

- Adams-Bashforth
- Adams-Moulton
- Predictor-Corrector

- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**

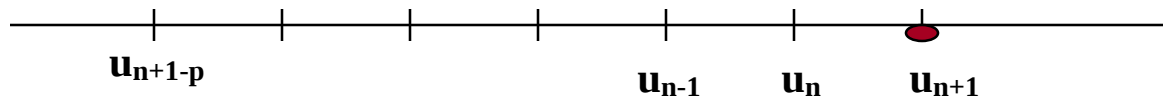


J.C. Adams
(1819-1892)

Metodi Multi-Step

Definizione. Un metodo si dice a **p passi** ($p \geq 1$) se

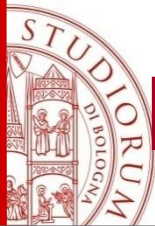
$\forall n \geq p-1$, u_{n+1} **dipende da** u_{n+1-p} ,
ma non da valori u_k con $k < n+1-p$.



Per innescare un metodo multistep servono p valori di innesco:

$$u_0, u_1, \dots, u_{p-1}.$$

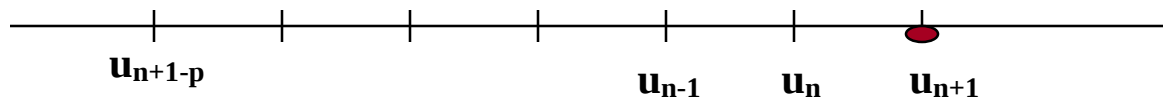
Poiché il problema di Cauchy ne fornisce una sola (u_0), un modo per assegnare le condizioni mancanti consiste nell'utilizzare inizialmente metodi espliciti ad un passo.



Esempi Metodi Multi-Step 2 passi

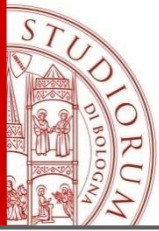
ESEMPIO: Simpson u_0 dato, u_1 da determinare

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{h}{3} [f(x_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]$$



ESEMPIO: metodo del punto medio u_0 dato, u_1 da determinare

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(x_n, u_n)$$



Metodi Multi-Step lineari (LMM) a $p+1$ passi

Generico metodo LMM:

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j} + h b_{-1} f_{n+1}, \quad n = p, p+1, \dots, N$$

Valori iniziali: $u_0 (= y_0), u_1, \dots, u_p$

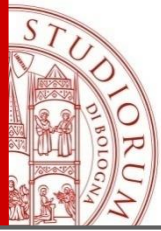
I coefficienti a_j e b_j , assegnati in $\mathbf{R}$, individuano lo schema e sono tali che $a_p \neq 0$ o $b_p \neq 0$.

$$b_{-1} \neq 0$$

Schema implicito

$$b_{-1} = 0$$

Schema esplicito

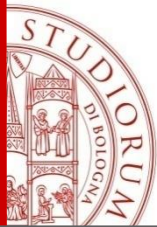


Metodi Multi-Step lineari a $p+1$ passi

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j} + h b_{-1} f_{n+1}, \quad n = p, p+1, \dots, N$$

Per $p=0$ si ottengono i metodi ad un passo.

Eulero esplicito:	$a_0 = 1, \quad b_0 = 1, \quad b_{-1} = 0$	1 passo	$p = 0$
Eulero implicito:	$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_{-1} = 1$	1 passo	$p = 0$
Punto medio:	$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_0 = 2, \quad b_1 = 0, \quad b_{-1} = 0$	2 passi	$p = 1$



Consistenza

Posto $y_n = y(x_n)$ e $y'_n = y'(x_n)$

Definiamo **errore di troncamento locale** del metodo multistep nel punto x_{n+1}

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1} - \left[\sum_{j=0}^p a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^p b_j y'_{n-j} \right]}{h}, \quad n \geq p$$

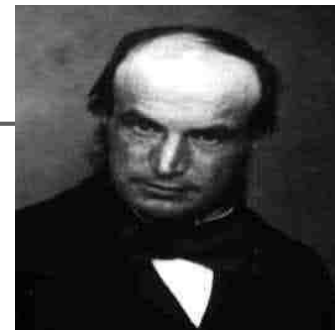
Indicando con $\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|$ l'**errore di troncamento (globale)**

Definizione. Il metodo multistep è **consistente** se

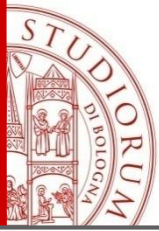
$$\tau(h) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad h \rightarrow 0.$$

Se inoltre $\tau(h) = O(h^p)$, per qualche $p \geq 1$, allora il metodo si dirà di **ordine p**.

Metodi di Adams



John Couch Adams (1819-1892), matematico e astronomo britannico. Ha predetto la scoperta del pianeta Nettuno (1845), con l'astronomo francese Urbain Le Verrier (1846). Il pianeta fu scoperto dall'astronomo Galle nell' osservatorio di Berlino nel novembre 1846.



Esempi di Metodi multistep: Metodi di Adams

Idea base: usare i valori già ottenuti per costruire un polinomio che interpoli la funzione $f(x, y(x))$.

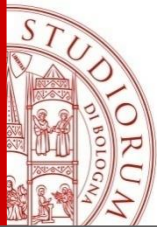
Dalla relazione $y'(x) = f(x, y(x))$ si ottiene

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \longrightarrow \mathbf{P(x)}$$

Si suppone che i nodi di discretizzazione siano equispaziati, ovvero:

$$x_j = x_0 + jh, \quad h > 0, \quad j \geq 1$$

Quindi, **anzichè f , si integra il suo polinomio interpolante su nodi distinti**. Gli schemi che si ottengono sono perciò *consistenti* per costruzione.



Metodi di Adams

I nodi di interpolazione sono:

1) $p+1$ nodi - polinomio grado p

$x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p}$, in tal caso $b_{-1}=0$

metodi espliciti di Adams-Bashforth a $p+1$ passi

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{j=0}^p b_j f(x_{n-j}, u_{n-j})$$

2) $p+2$ nodi – polinomio grado $p+1$

$x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-p}$, in tal caso $b_{-1} \neq 0$,

metodi impliciti di Adams-Moulton a $p+1$ passi

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{j=-1}^p b_j f(x_{n-j}, u_{n-j})$$

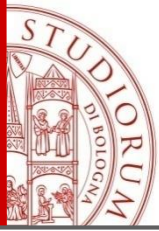


Tabella Coefficienti ed Errori Adams-Bashforth

<i>ordine</i>	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$t(x, y; h, f)$
1	1						$\frac{1}{2} h f''(\eta)$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$					$\frac{5}{12} h^2 f'''(\eta)$
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$				$\frac{9}{24} h^3 f^{iv}(\eta)$
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$			$\frac{251}{720} h^4 f^v(\eta)$
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$		$\frac{475}{1440} h^5 f^{vi}(\eta)$
6	$\frac{4277}{720}$	$-\frac{7923}{720}$	$\frac{9982}{720}$	$-\frac{7298}{720}$	$\frac{2877}{720}$	$-\frac{475}{720}$	$\frac{19087}{60480} h^6 f^{vii}(\eta)$

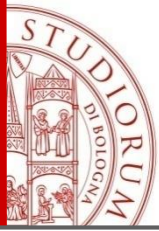
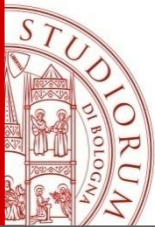


Tabella Coefficienti ed Errori Adams-Moulton

<i>order</i>	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	<i>tuncation error</i>
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{12}h^2 f'''(\eta)$
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$				$-\frac{1}{24}h^3 f^{iv}(\eta)$
4	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$			$-\frac{19}{720}h^4 f^{(v)}(\eta)$
5	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$		$-\frac{27}{1440}h^5 f^{(vi)}(\eta)$
6	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$	$-\frac{863}{60480}h^6 f^{(vii)}(\eta)$



Metodi di Adams

ORDINE: grado massimo del polinomio per cui la formula approssimata risulta esatta

Il metodo AB esplicito a q passi ha ordine q

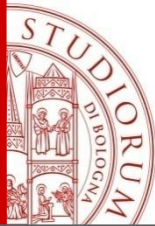
$$\tau(h) = O(h^q),$$

Es. Eulero in avanti (1 passo)

Il metodo AM implicito a q passi ha ordine $q+1$

$$\tau(h) = O(h^{q+1})$$

Es. Trapezi (1 passo)



Esempio I

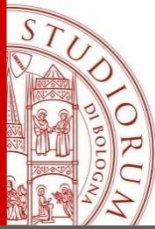
$$\begin{cases} y' = x^2 + xy, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Metodo A-M a 2 passi

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} (5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}),$$
$$\left(u_{i+1} - 5\frac{h}{12} f_{i+1} \right) = u_i + \frac{h}{12} (8f_i - f_{i-1}),$$

- f è lineare, si può calcolare u_{i+1} in modo esplicito:

$$\left(1 - 5\frac{h}{12} x_{i+1} \right) u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} (5x_{i+1}^2 + 8f_i - f_{i-1}),$$



Esempio II

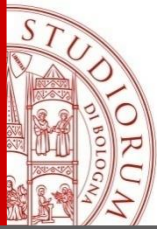
$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

- Metodo A-M a 2 passi

$$\left(u_{i+1} - 5 \frac{h}{12} f_{i+1} \right) = u_i + \frac{h}{12} (8 f_i - f_{i-1}),$$

$$\left(u_{i+1} - 5 \frac{h}{12} x_{i+1} \sqrt{u_{i+1}} \right) = u_i + \frac{h}{12} (8 f_i - f_{i-1}),$$

- Ad ogni passo si deve risolvere un'equazione non lineare:
 - uso di un metodo iterativo
 - definizione di un valore di inizio (starting point)



Metodo di Adams-Bashforth – Esempio 1

Consideriamo

con soluzione esatta

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

$$y = 2 + 2x + x^2 - e^x$$

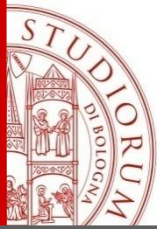
Condizione iniziale:

$$y(0) = 1$$

Ampiezza del passo:

$$h = 0.1$$

Confronto di metodi di ordine 4: AB, RK4, AM



Metodo di Adams-Bashforth – Esempio 1

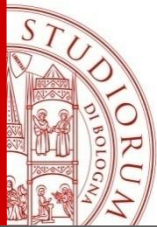
Applichiamo un metodo AB a 4 passi

$$p = 3 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24} [55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}]$$

$$y = \frac{0.1}{24} [55 f_{0.3} - 59 f_{0.2} + 37 f_{0.1} - 9 f_0]$$

$$y(0.4) = 1.340141 + 0.128038 = 1.468179$$

$$f(0.4, 1.468179) = 1.308179$$

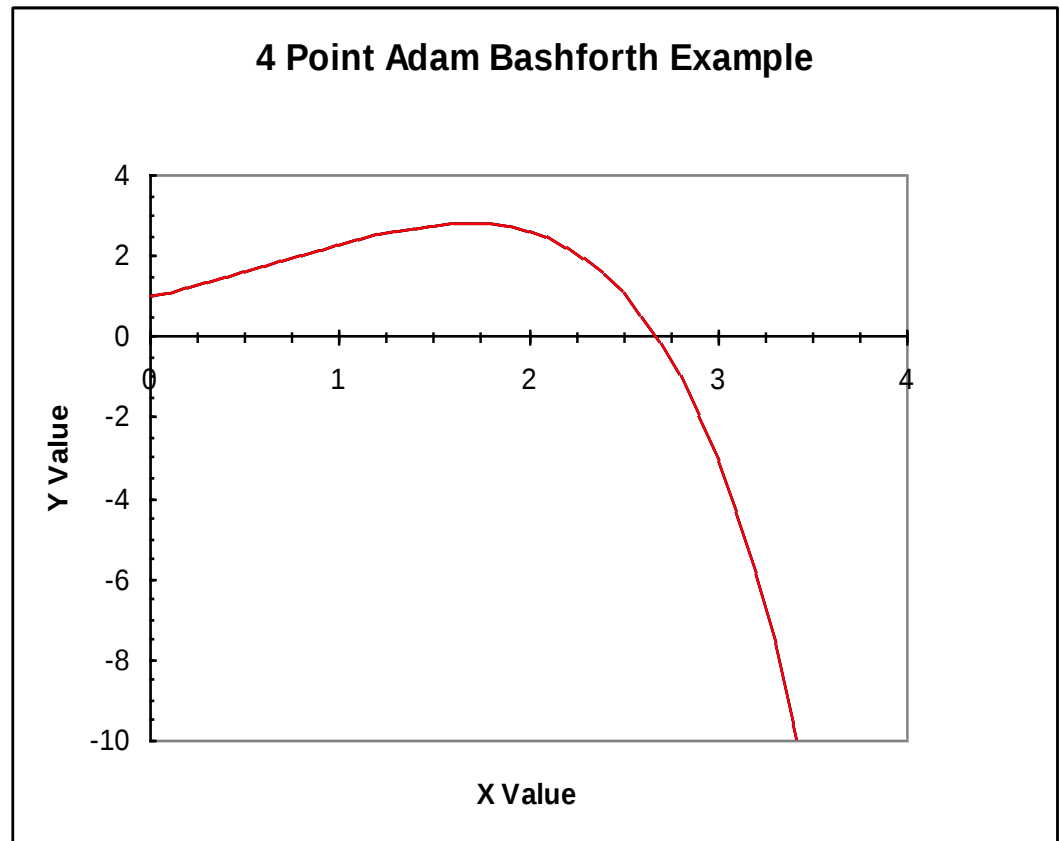


Metodo di Adams-Bashforth – Esempio 1

x	Adam Bashforth	f(x,y)	sum	4th order Runge-Kutta	Exact
0	1	1		1	1
0,1	1,104828958	1,094829		1,104828958	1,104829
0,2	1,218596991	1,178597		1,218596991	1,218597
0,3	1,34014081	1,250141	30,72919	1,34014081	1,340141
0,4	1,468179116	1,308179	31,94617	1,468174786	1,468175
0,5	1,601288165	1,351288	32,78612	1,601278076	1,601279
0,6	1,737896991	1,377897	33,20969	1,737880409	1,737881
0,7	1,876270711	1,386271	33,17302	1,876246365	1,876247
0,8	2,014491614	1,374492	32,62766	2,014458009	2,014459
0,9	2,150440205	1,34044	31,52015	2,150395695	2,150397
1	2,281774162	1,281774	29,79136	2,281716852	2,281718

Metodo di Adams-Bashforth – Esempio 1

Il metodo di Adams Bashforth fornisce una “buona” soluzione senza dover fare troppe valutazioni.



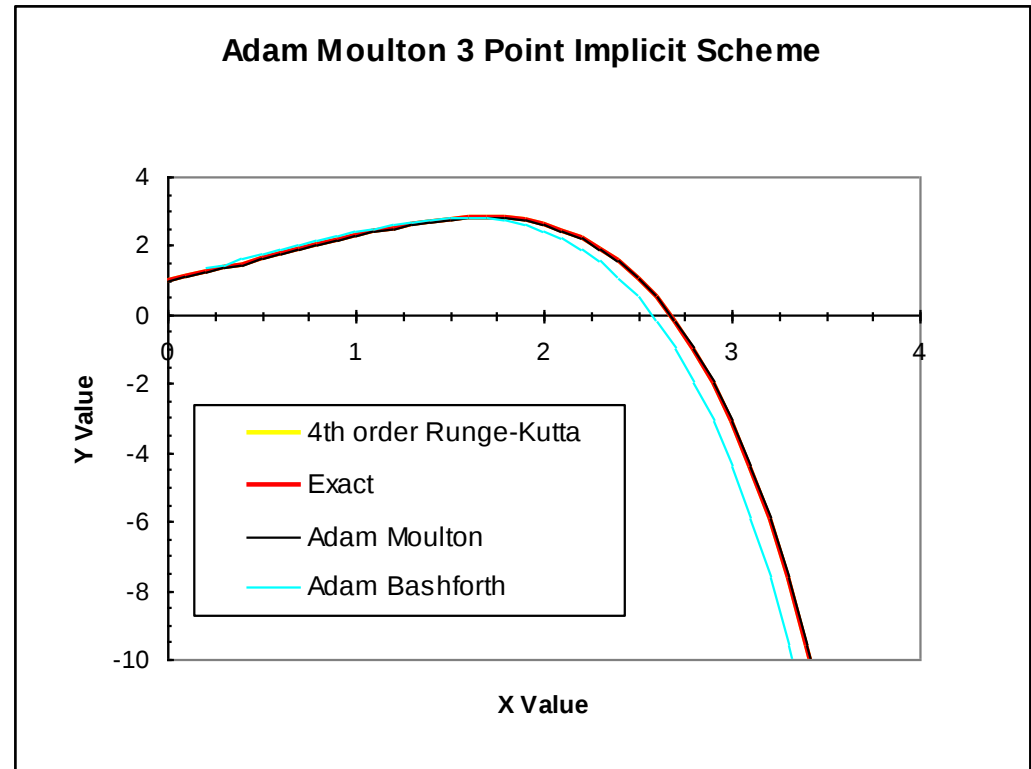
Metodo di Adams-Bashforth – Esempio 1

Il metodo implicito di Adams-Moulton fornisce una buona soluzione senza usare più di 2 passi.

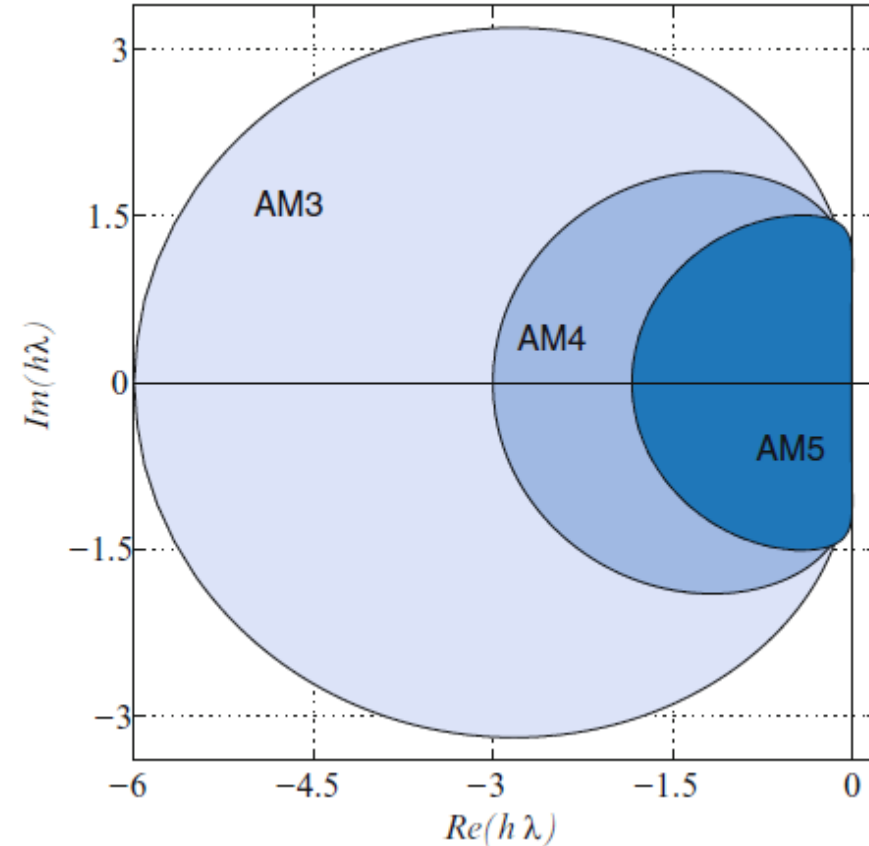
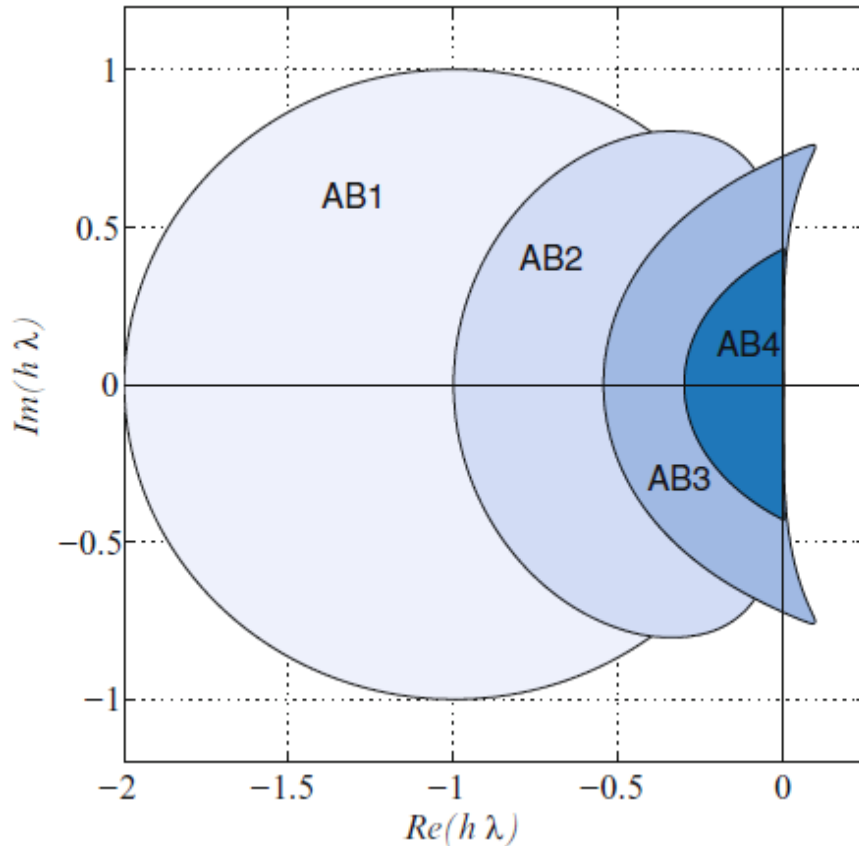
Soluzione esatta

$$y = 2 + 2x + x^2 - e^x$$

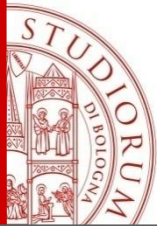
$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 \quad y(0) = 1$$



Regioni di assoluta stabilità



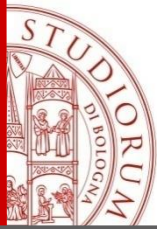
Metodi Adams-Bashforth (a sinistra) e Metodi di Adams-Moulton (a destra)



Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP

6

Predictor-Corrector

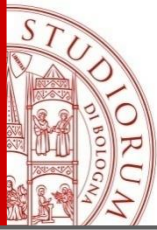


Metodi Multi-Step

- I **metodi impliciti**, a parità di passi, sono più accurati dei metodi espliciti
- I **metodi impliciti** sono più stabili dei metodi espliciti
- I **metodi impliciti** sono più costosi computazionalmente

I metodi multistep di tipo implicito richiedono ad ogni passo la risoluzione di una equazione/sistema, in genere, non lineare nell'incognita u_{n+1} . In maniera sintetica si può scrivere:

$$u_{n+1} = \Psi(u_{n+1})$$



Metodi Predictor-Corrector

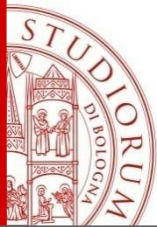
Idea: applicare un *metodo implicito* con opportuna scelta di un “buon” iterato iniziale (ottenuto con un *metodo multistep esplicito*)

$$u_{n+1}^{(0)}$$

Valore ottenuto mediante un metodo multistep esplicito (***predictor***)

$$u_{n+1}^k = \Psi(u_{n+1}^{(k-1)}) \quad \mathbf{k} \geq \mathbf{1}$$

Valori ottenuti mediante un metodo multistep implicito che rende più accurata la stima iniziale (***corrector***)



Metodi Predictor-Corrector

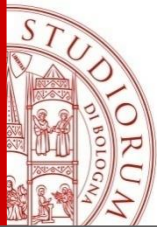
Nella sua versione elementare, il valore $u_{n+1}^{(0)}$ viene calcolato tramite un metodo esplicito a $\tilde{p} + 1$ passi, detto ***predictor***

$$[P] \quad u_{n+1}^{(0)} = \sum_{j=0}^{\tilde{p}} \tilde{a}_j u_{n-j}^{(1)} + h \sum_{j=0}^{\tilde{p}} \tilde{b}_j f_{n-j}^{(0)}$$

dove $f_k^{(0)} = f(x_k, u_k^{(0)})$ e $u_k^{(1)}$ sono le soluzioni calcolate con il metodo PC al passo precedente oppure sono le condizioni iniziali. A questo punto, si valuta la funzione f nel nuovo punto $f(x_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})$

$$[E] \quad f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})$$

Fase di valutazione



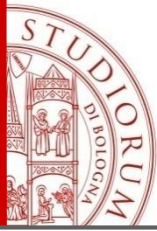
Metodi Predictor-Corrector

Infine si esegue una sola iterazione del metodo del punto fisso usando uno schema multistep implicito

$$[C] \quad u_{n+1}^{(1)} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j}^{(1)} + h b_{-1} f_{n+1}^{(0)} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j}^{(0)}$$

Questo secondo passo della procedura è ora esplicito ed il metodo che si usa è detto *corrector*.

La procedura viene denotata in breve come metodo **PEC** o **P(EC)¹**, in cui **P** e **C** indicano una applicazione del metodo predictor e corrector al passo x_{n+1} , mentre **E** indica che è stata effettuata una valutazione di funzione.



Esempio predictor-corrector

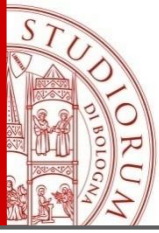
Dati: $u_0^{(0)} = u_0^{(1)} = u_0, u_1^{(0)} = u_1^{(1)} = u_1$ e
 $f_0^{(0)} = f(x_0, u_0^{(0)}), f_1^{(0)} = f(x_1, u_1^{(0)})$

[P] $u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(1)} + \frac{h}{2} [3 f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(0)}]$ Metodo di Adams-Bashforth
di ordine 2

[E] $f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})$

[C] $u_{n+1}^{(1)} = u_n^{(1)} + \frac{h}{12} [5 f_{n+1}^{(0)} + 8 f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(0)}]$

Metodo di Adams-Moulton
di ordine 3

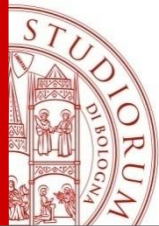


Ordine del metodo predictor-corrector

Utilizzando lo schema PECE , con lo schema P (**predictor**) di ordine $\tilde{q}$ e lo schema C (**corrector**) di ordine q allora lo schema Predictor Corrector si comporta come un metodo di ordine

$$\text{ordine} = \inf (\tilde{q} + 1, q)$$

Al fine di non perdere in precisione sullo schema C, si dovrà scegliere $\tilde{q} + 1 \geq q$ ottenendo in questo modo un metodo di ordine q .



Esempio predictor-corrector

Adams-Bashforth a $p=2$ passi, ordine 3 esplicito

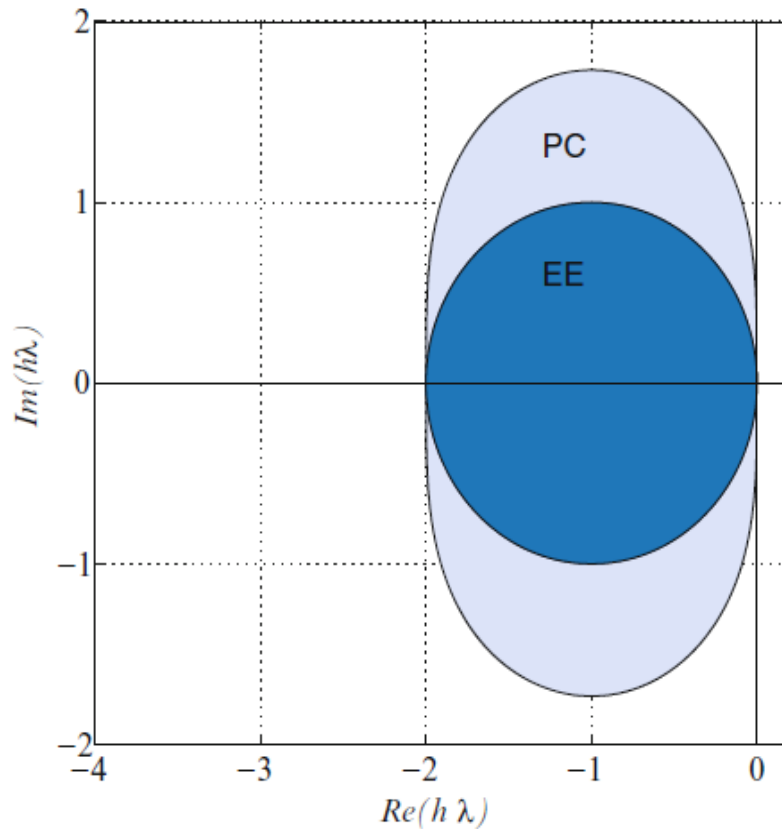
$$[P] \quad \tilde{u}_{i+1} = \tilde{u}_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$$

Adams-Moulton a $p=2$ passi, ordine 3 implicito

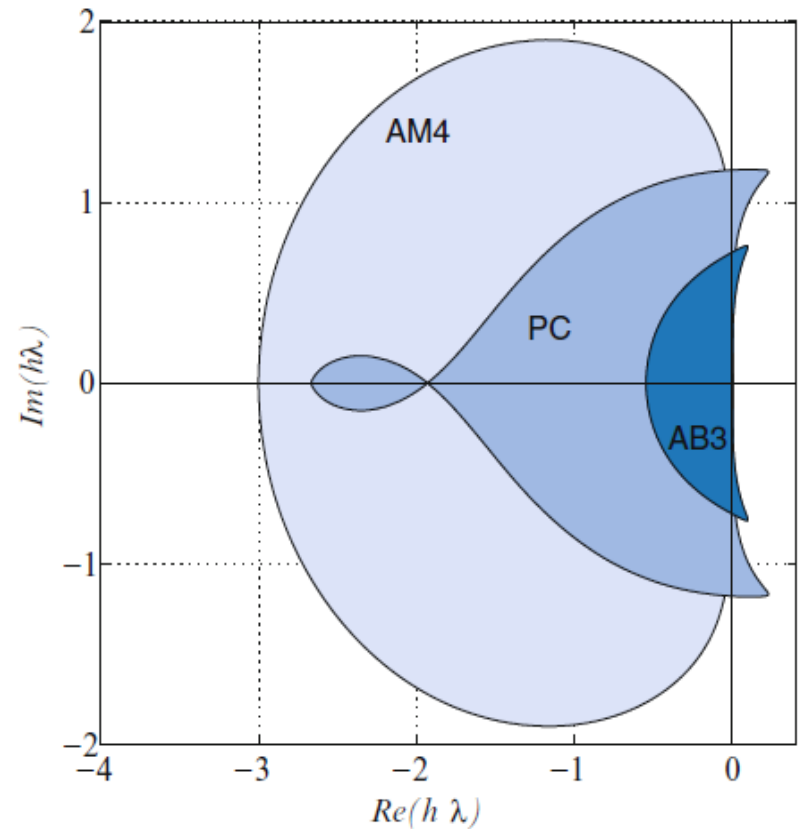
$$[C] \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12} [5\tilde{f}_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]$$

Ordine del metodo $3 = \min(3+1, 3)$

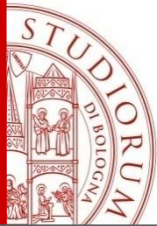
Regioni di assoluta stabilità



PC con explicit Euler (EE) e
Crank-Nicolson



PC con AB3 e AM4



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>