Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP
6

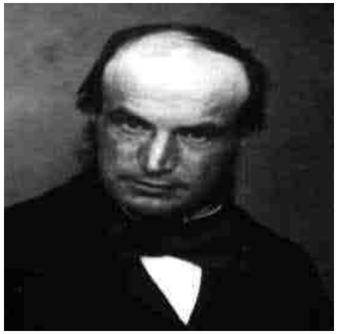
Problemi STIFF

Metodi numerici per ODE

Eulero

Martin Kutta
Carl David Runge (1856-1927)

- **Metodi one-step**
  - Metodi Eulero
  - Analisi dei metodi one-step
  - Metodi Runge-Kutta
- **Metodi Multi-step**
  - Adams-Bashforth
  - Adams-Moulton
  - Predictor-Corrector
- **Sistemi**
- **Stabilità**
- **Problemi stiff**



J.C. Adams
(1819-1882)

Problemi stiff

STIFF: Indica una sorta di mal condizionamento capace di rendere instabili quasi tutti i metodi alle differenze visti

Un sistema ODE e' detto **stiff** se, approssimato con un metodo numerico caratterizzato da una regione di assoluta stabilita' di estensione finita, **obbliga** quest'ultimo, per ogni condizione iniziale per la quale il problema ammetta soluzione, **ad utilizzare un passo di discretizzazione eccessivamente piccolo** rispetto a quello necessario per descrivere ragionevolmente l'andamento della soluzione esatta.

→ Consideriamo per questi problemi metodi caratterizzati da una zona "larga" di assoluta stabilità

Come individuare un Problema stiff

- Sistema di ODE lineari a coefficienti costanti

$$\boxed{y'(x) = Ay(x) + \phi(x) \qquad A \in \Re^{mxm}, \ \phi \in \Re^{m}}$$

- Supponiamo che **A** abbia **m autovalori distinti**
- Soluzione

$$\boldsymbol{y(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{\lambda_j x} v_j + \psi(x)}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ costanti

$\{v_j\}$ base formata da autovettori di A associati ai $\lambda_j, j = 1,2,\ldots,m$

$\psi(x)$ soluzione particolare della ODE.

Esempio

- Problema 1

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ 2(\cos(x) - \sin(x)) \end{pmatrix}$$

$$\textbf{condizioni iniziali} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 3 \end{pmatrix}$$

- Problema 2

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ 999(\cos(x) - \sin(x)) \end{pmatrix}$$

$$\textbf{condizioni iniziali} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 3 \end{pmatrix}$$

Stessa soluzione:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = 2e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}}$$

Soluzione numerica

- Problema 1

- Metodo RK ordine 45

  Con passo adattivo con toll=0.01, in [0,10].
  - **25** passi
  - **169** valutazioni di funzione

- Metodo implicito ordine 4
  - **41** passi
  - **90** valutazioni

- Problema 2

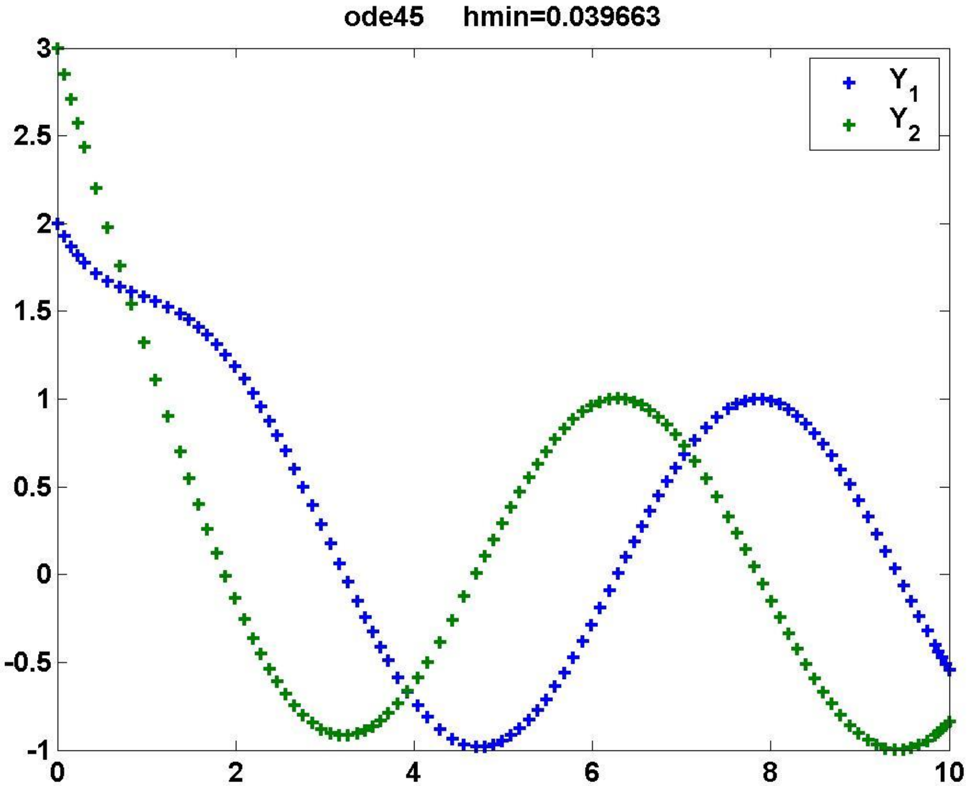
- Metodo RK ordine 45

  Con passo adattivo con toll=0.01, in [0,10].
  - **3015** passi
  - **18769** valutazioni di funzione

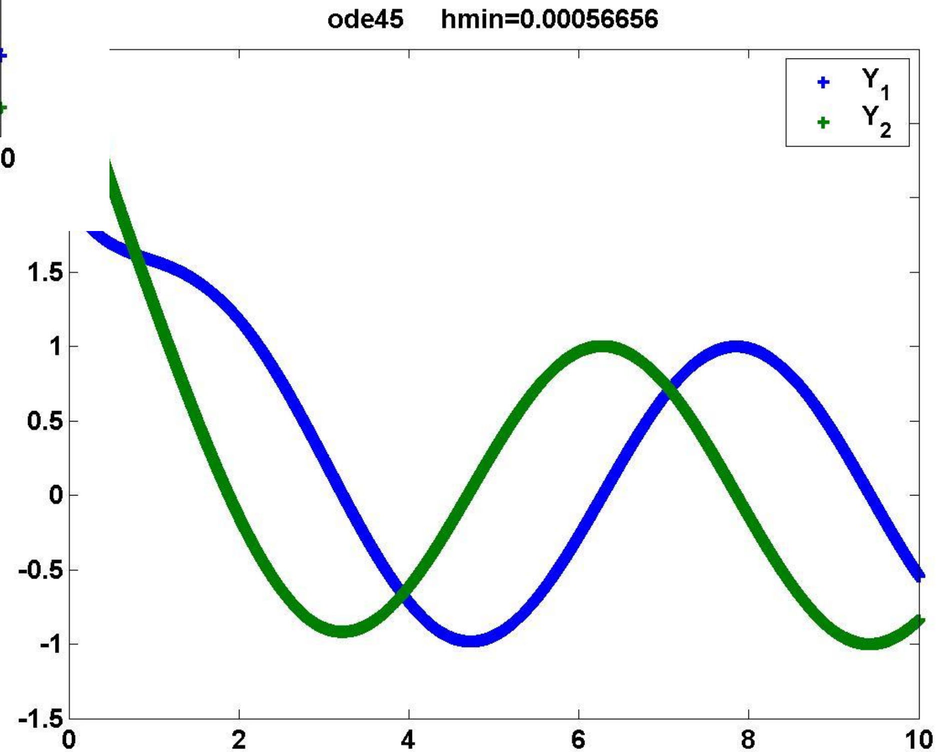
- Metodo implicito ordine 4
  - **48** passi
  - **112** valutazioni

Con passo fissato h=0.1: non otteniamo soluzione (overflow)

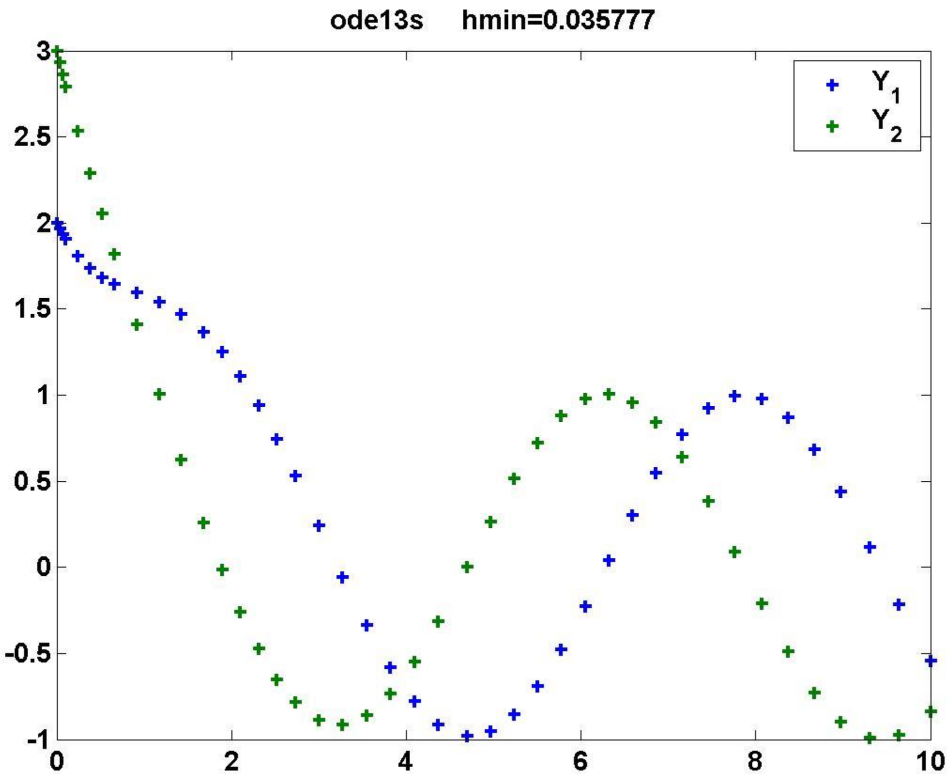
Problema 1



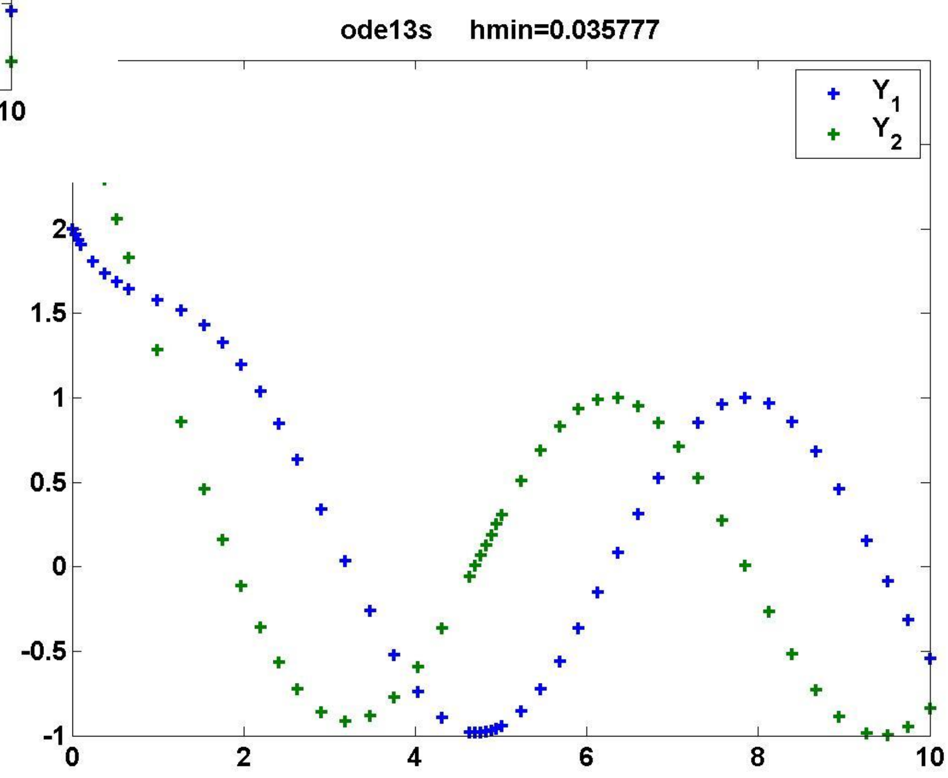
Problema 2



Problema 1



Problema 2



Osservazioni

- Il fenomeno che si presenta è una sorta di mal condizionamento noto come STIFFNESS
- Il problema 2 è detto stiff,

  mentre il problema 1 è non stiff.
- Non è una proprietà dipendente dalla soluzione, è una proprietà del sistema stesso.

Come individuare un Problema stiff

Soluzione generale

$$y(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j e^{\lambda_j x} v_j + \psi(x)$$

Nell'esempio

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-1000x}\begin{pmatrix} 1 \\ -998 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}\end{aligned}}$$

- c_1 e c_2 sono costanti. Allora per $x \to +\infty$ la soluzione *y* tende alla soluzione particolare Ψ, in quanto ciascuna delle soluzioni particolari $e^{\lambda_j x}$ tende a zero per *x* tendente all'infinito.
- Una spiegazione può essere data in termini di teoria della stabilità.

PROBLEMA 1 autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \{\lambda = -1, \lambda = -3\}$$

PROBLEMA 2 autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \qquad \{\lambda = -1, \lambda = -1000\}$$

Metodo RK 45 ha intervallo di assoluta stabilità (-3,0):

- per il problema 1 si ha assoluta stabilità se

  –3*h $\in$ (-3,0) quindi deve essere h<1.0
- per il problema 2 si ha assoluta stabilità se

  –1000*h $\in$ (-3,0) quindi deve essere h<0.003 e questo vincola notevolmente il passo.

Metodo IMPLICITO 4 ordine ha intervallo di assoluta stabilità che include il semiasse negativo del piano complesso, quindi hλ$\in$Ra per ogni passo h, quando λ ha parte reale negativa.

La natura della stiffness

Soluzione: $$\boldsymbol{y(x)} = \boxed{\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{e}^{\lambda_j x} \boldsymbol{v}_j} + \boldsymbol{\psi(x)}$$

Ipotesi: $$\boxed{\mathbf{Re}\,\lambda_j < 0 \quad \forall j = 1,2,\ldots,m.}$$

Allora per $x \to +\infty$ la soluzione ***y*** tende alla soluzione particolare Ψ ,in quanto ciascuna delle soluzioni particolari $e^{\lambda_j x}$ tende a zero per ***x*** tendente all'infinito.

Ψ soluzione del sistema allo **stato stazionario** (cioè per tempi infiniti)

a soluzione nello **stato transitorio** (per tempi finiti).

La natura della stiffness

- Se $\left|\mathrm{Re}\,\lambda_j\right|$ è grande allora a decade velocemente e si ha un veloce transitorio
- Se $\left|\mathrm{Re}\,\lambda_j\right|$ è piccolo allora a decade lentamente e si ha un lento transitorio

Sia $$\mathrm{Re}\,\underline{\lambda} \le \left|\mathrm{Re}\,\lambda_j\right| \le \mathrm{Re}\,\overline{\lambda}$$

- Se siamo interessati a raggiungere la soluzione allo stato stazionario Ψ allora dobbiamo continuare ad integrare fino a che il più lento transitorio non sia trascurabile. Più piccolo $\left|\mathrm{Re}\,\underline{\lambda}\right|$ e più a lungo dovremo continuare ad integrare.
- Se usiamo uno schema numerico con regione di assoluta stabilità ($h^*\lambda \in Ra$) e $\left|\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\right|$ è grande allora il passo h dovrà essere molto piccolo per un periodo di tempo molto lungo per poter ottenere la soluzione stazionaria.
- Allora il passo h risulta avere delle limitazioni che dipendono dal massimo modulo degli autovalori di A.

Come individuare un Problema stiff

Sembra quindi che si abbia stiffness quando:

$\left|\mathrm{Re}\,\underline{\lambda}\right|$ è molto piccolo

$\left|\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\right|$ è molto grande

Quoziente di stiffness

$$\boxed{r_s = \frac{\left|\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\right|}{\left|\mathrm{Re}\,\underline{\lambda}\right|}}$$

Un sistema di ODE lineare a coefficienti costanti e' **stiff** se gli autovalori della matrice A hanno tutti parte reale negativa e $r_s >> 1$

Metodi numerici per problemi stiff

- Nessun metodo condizionatamente assolutamente stabile risulta adatto per approssimare un problema stiff.

- Ciò rivaluta i metodi impliciti, multistep o Runge-Kutta, più costosi degli schemi espliciti, ma aventi regioni di assoluta stabilità infinite.

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi