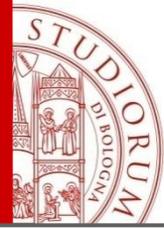
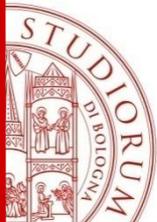


Equazioni Differenziali Ordinarie – IVP Esempi



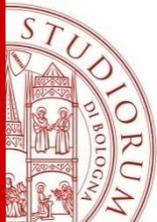
Soluzione simbolica di ODE con MATLAB

- A volte è possibile determinare la soluzione in forma analitica di un'equazione differenziale.
- Tale funzione è detta soluzione simbolica e si ottiene con la function **dsolve** del **Symbolic Math Toolbox**.
- Potenzialità del **Symbolic Math Toolbox**:
 - algebra simbolica;
 - risoluzione di equazioni algebriche e trascendenti;
 - calcolo di integrali, derivate, serie, ecc...;
 - metodi simbolici per risolvere ODE.



La funzione dsolve

dsolve('eqn')	Restituisce la soluzione dell'equazione differenziale specificata in 'eqn'
dsolve('eq1', 'eq2',...)	restituisce la soluzione del sistema di equazioni differenziali eq1, eq2, ...
dsolve('eq1', 'cond1', 'cond2',...)	Risolve l'equazione differenziale eq1 con condizioni iniziali cond1, cond2,...
dsolve('eq1', 'eq2',..., 'cond1', 'cond2',...)	risolve il sistema di equazioni differenziali con condizioni iniziali cond1, cond2,...



Esempi

1) Risolvere l'equazione:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 12$$

```
>> dsolve('Dy+2*y=12')
```

```
ans =
```

```
6+exp(-2*t)*C1
```

N.B. Per indicare la derivata prima si utilizza la lettera D, per la derivata seconda D2, e così via.

2) Risolvere l'equazione:

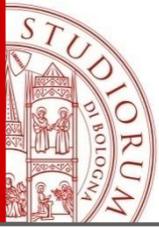
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 y$$

```
>> dsolve('D2y=c^2*y')
```

```
ans =
```

```
C1*sinh(c*t)+C2*cosh(c*t)
```

La soluzione è trovata in funzione di costanti arbitrarie C1, C2



Esempi

3) Risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x + 3y\end{aligned}$$

```
>> [x,y]=dsolve('Dx=3*x+4*y','Dy=-4*x+3*y')
```

```
x = exp(3*t)*(cos(4*t)*C1+sin(4*t)*C2)
```

```
y = -exp(3*t)*(sin(4*t)*C1-cos(4*t)*C2)
```

4) Risolvere l'equazione:

```
>> dsolve('Dy=sin(b*t)','y(0)=0')
```

```
ans =
```

```
(-cos(b*t)+1)/b
```

$$\frac{dy}{dt} = \sin(bt)$$

$$y(0) = 0$$

Esempi

5) Risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x + 3y$$

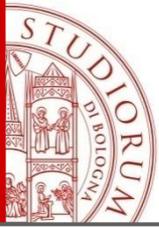
$$x(1) = 0$$

$$y(0) = 1$$

```
>> [x,y]=dsolve('Dx=3*x+4*y','Dy=-4*x+3*y','x(1)=0','y(0)=1')
```

$$x = \exp(3*t)*(-\cos(4*t)*\sin(4)/\cos(4)+\sin(4*t))$$

$$y = -\exp(3*t)*(-\sin(4*t)*\sin(4)/\cos(4)-\cos(4*t))$$



Esempi

6) MATLAB risolve anche molte equazioni differenziali del primo ordine non lineari:

$$\frac{dy}{dt} = 4 - y^2$$

$$y(0) = 1$$

```
>> dsolve('Dy=4-y^2','y(0)=1')
```

```
ans =
```

```
(2*exp(4*t+log(-3))+2)/(-1+exp(4*t+log(-3)))
```

```
>> simple(ans)
```

```
ans =
```

```
(-6*exp(4*t)+2)/(-1-3*exp(4*t))
```

Esempi

7) Risolvere l'equazione:

$$\frac{dy}{dt} = x + y \quad y(0) = 2$$

```
>> sol=dsolve('Dy=x+y','y(0)=2','x')
```

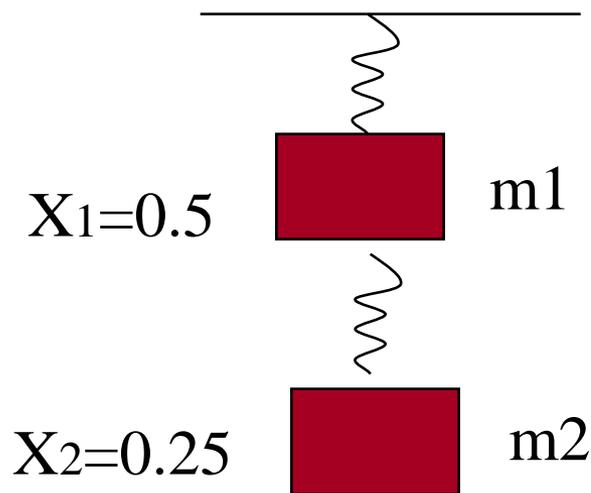
```
sol =
```

```
-x-1+3*exp(x)
```

Fare il grafico della soluzione calcolata

```
>> ezplot(sol,[-1,2])
```

Esempio: sistema massa-molla



Lo spostamento verticale di due masse sospese in serie da molle di costante elastica k_1 , k_2 , è dato dalla legge di Hooke come un sistema di due ODE del secondo ordine:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - k_2 (x_2 - x_1) + k_1 x_1 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 (x_2 - x_1) = 0$$



Esempio: sistema massa-molla

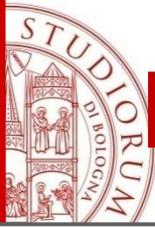
- Sostituzione di variabili per avere un sistema di 4 ODE del primo ordine:

$$u_1 = x_1$$

$$u_3 = x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = + \frac{k_2}{m_1} (u_3 - u_1) - \frac{k_1}{m_1} u_1 \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = - \frac{k_2}{m_2} (u_3 - u_1) \end{array} \right.$$

Condizioni iniziali: $u_1(0) = a_1$ $u_2(0) = a_2$ $u_3(0) = a_3$ $u_4(0) = a_4$

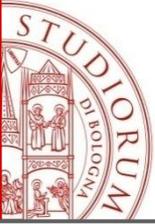


Esempio: sistema massa-molla

- Passo 1: Scrivere la function che definisce il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = +\frac{k_2}{m_1}(u_3 - u_1) - \frac{k_1}{m_1}u_1 \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = -\frac{k_2}{m_2}(u_3 - u_1) \end{array} \right.$$

```
function dydt=massamolla(t,y)
global k1 m1 k2 m2
dydt=[y(2);
      (-k1*y(1)+k2*(y(3)-y(1)))/m1;
      y(4);
      -k2*(y(3)-y(1))/m2];
```



script esempioODE.m

Passo 2: Definizione dei dati del problema:

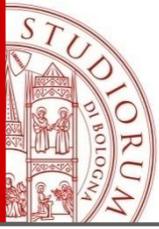
```
% Dati del problema
a=0; b=5; tspan=[a b];           % intervallo di integrazione
y0=[0.5 0 0.25 0];             % condizioni iniziali
global k1 m1 k2 m2
k1=100; m1=10; k2=120; m2=2; % misure in Kg, metri, Newton
```

Passo 3: Richiamo solutore del sistema di ODE:

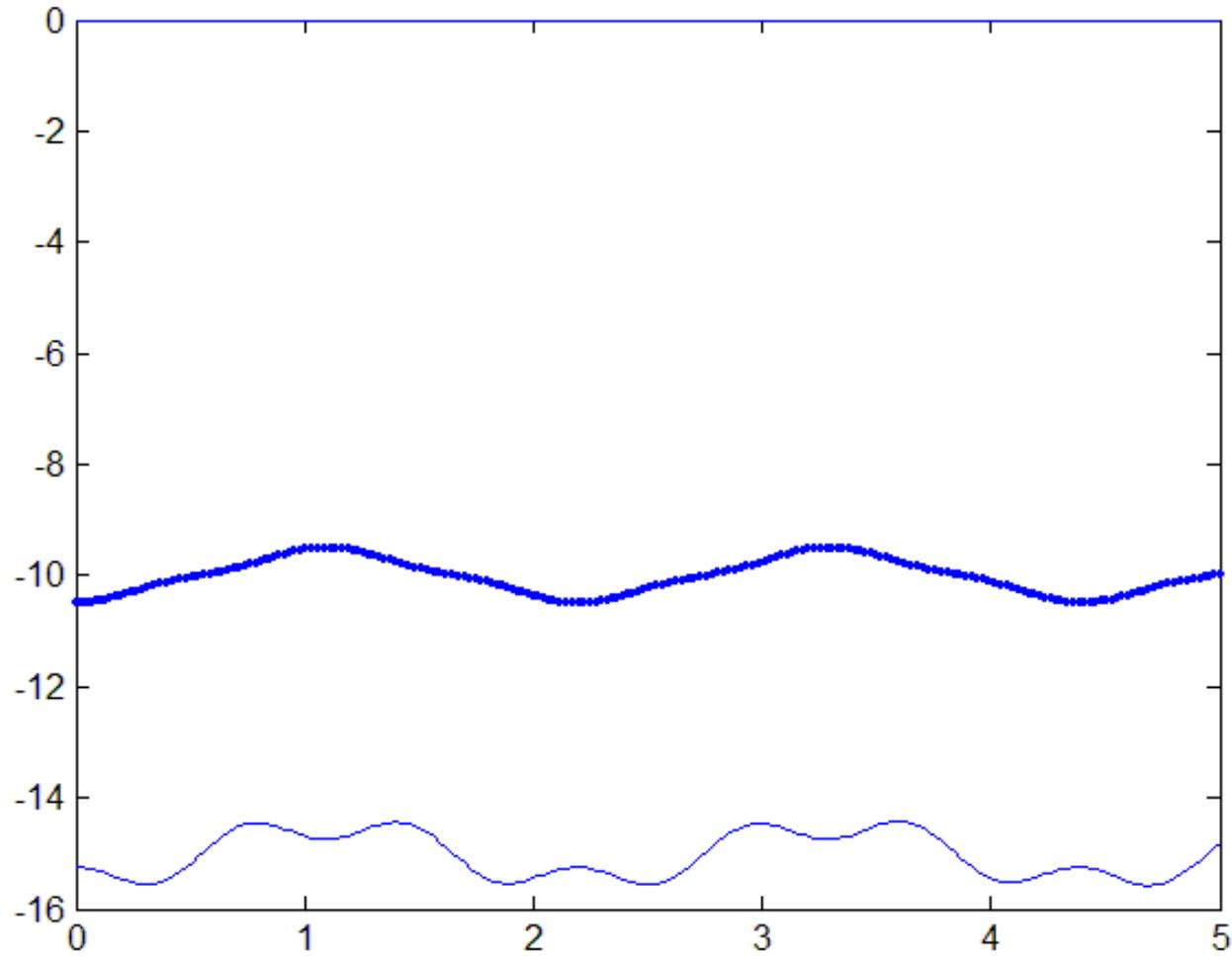
```
% Solutore del sistema di ode:
[t,y]=ode45('massamolla',tspan,y0);
```

Passo 4: Visualizzazione della soluzione:

```
% Visualizzazione soluzione ottenuta:
% la direzione è verso il basso, quindi il grafico è di -y
% la posizione reale dipende anche dalla lunghezza delle molle
% quindi consideriamo r1 ed r2:
r1=10; r2=15;
plot(t,-r1-y(:,1),'-');
hold on
plot(t,-r2-y(:,3),'-');
plot([a b],[0 0]);
```



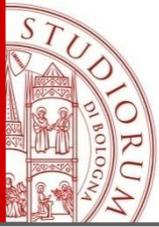
Esempio: sistema massa - molla



Solutori disponibili

<i>solver</i>	<i>metodo implementato</i>	<i>osservazioni</i>
ode45	Runge-Kutta 4-5 esplicito ad un passo	da usare come primo tentativo
ode23	Runge-Kutta 2-3 esplicito ad un passo	tipicamente più efficiente di ode45
ode113	Adams-Bashforth-Moulton	consigliabile se la valutazione di F è costosa
ode15s	multistep implicito di ordine variabile	da usare come primo tentativo
ode23s	solutore ad un passo	tipicamente più efficiente di ode15s
ode15s	multistep implicito di ordine variabile	da usare come primo tentativo
ode23s	solutore ad un passo	tipicamente più efficiente di ode15s
ode23t	schema basato sul metodo del trapezio	non dissipativo
ode23tb	trapezio + differenze all'indietro	equivalente a Runge-Kutta implicito

Tabella 1: Descrizione e caratteristiche degli ode solver. I solver con suffisso “s” sono specifici per problemi *stiff*



Event in MATLAB

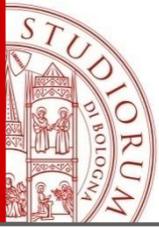
- Soluzione in $[t_0, t_{\text{finale}}]$
- Quando t_{finale} non è noto

Trovare una funzione $y(t)$ ed un valore finale t^* tali che

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$g(t^*, y(t^*)) = 0$$



Event in MATLAB

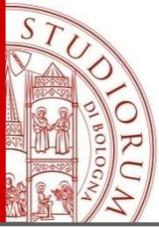
ESEMPIO:

corpo in caduta libera sotto la forza di gravità. Quando colpisce il terreno?

$$y'' = -1 + (y')^2$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

Per quale t $y(t)=0$?



Event in MATLAB

```
function ydot = f(t,y)
ydot = [y(2); -1+y(2).^2];
```

```
function [gs,isterm,direct] = gstop(t,y)
```

```
gs = y(1);
```

```
isterm = 1;
```

```
direct = [];
```

% Valore che deve annullarsi

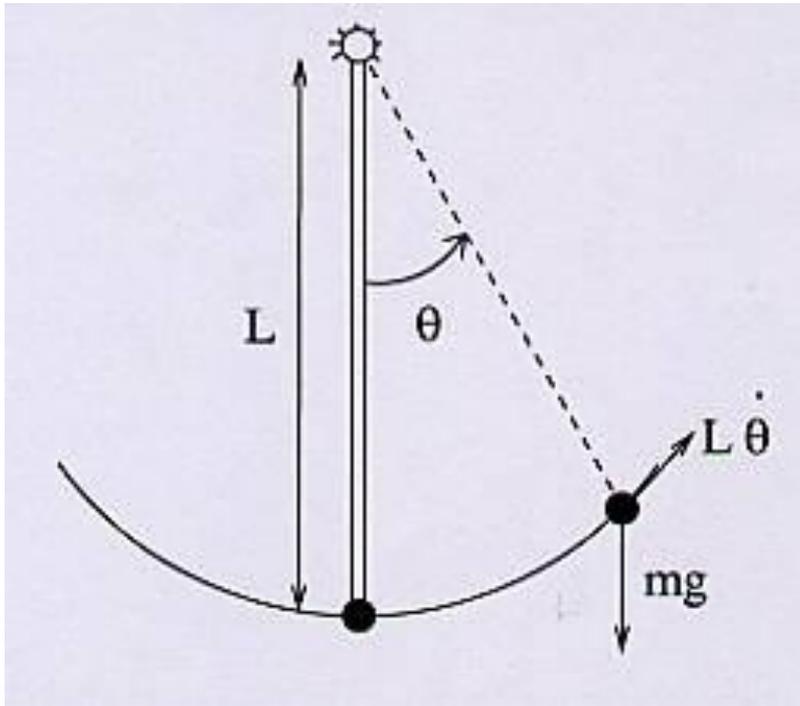
% 1 -> L'ODE termina quando gs=0

```
opts = odeset('events', @gstop);
```

```
[t,y,tfinal] = ode23(@f,[0 Inf],[1; 0],opts);
```

```
tfinal
```

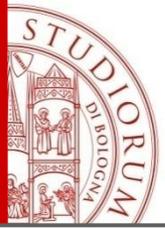
Equazione di moto del pendolo senza attrito



Per semplicità $\omega^2=1$

Pendolo di **massa m**, **lunghezza L**
Evoluzione temporale dell'angolo θ
formato dal pendolo con la verticale
passante per la cerniera a cui esso è
vincolato

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 & \text{con } \omega^2 = \frac{g}{L} \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$



Equazione di moto del pendolo senza attrito

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\sin(y_1) \end{cases}$$

Condizioni
iniziali

$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \dot{\theta} = \dot{y}_1 \end{cases}$$

Il corrispondente **ode file** *pendolo.m* è:

```
function yp=pendolo(t,y)
% pendolo senza attrito
yp=[y(2); -sin(y(1))];
```

Risolviamo il problema con **ode45** nell'intervallo [0 100], con condizioni iniziali

$$\theta_0 = \pi - \delta, \quad \dot{\theta}_0 = 0.$$

Per $\delta=0.01$ (il pendolo si trova quindi inizialmente in alto in posizione quasi verticale con velocità nulla)

Equazione di moto del pendolo senza attrito

```
>> [t,y]=ode45('pendolo',[0 100],[pi-0.01 0]);  
>> x=plot(t,y(:,1),y(:,2));
```

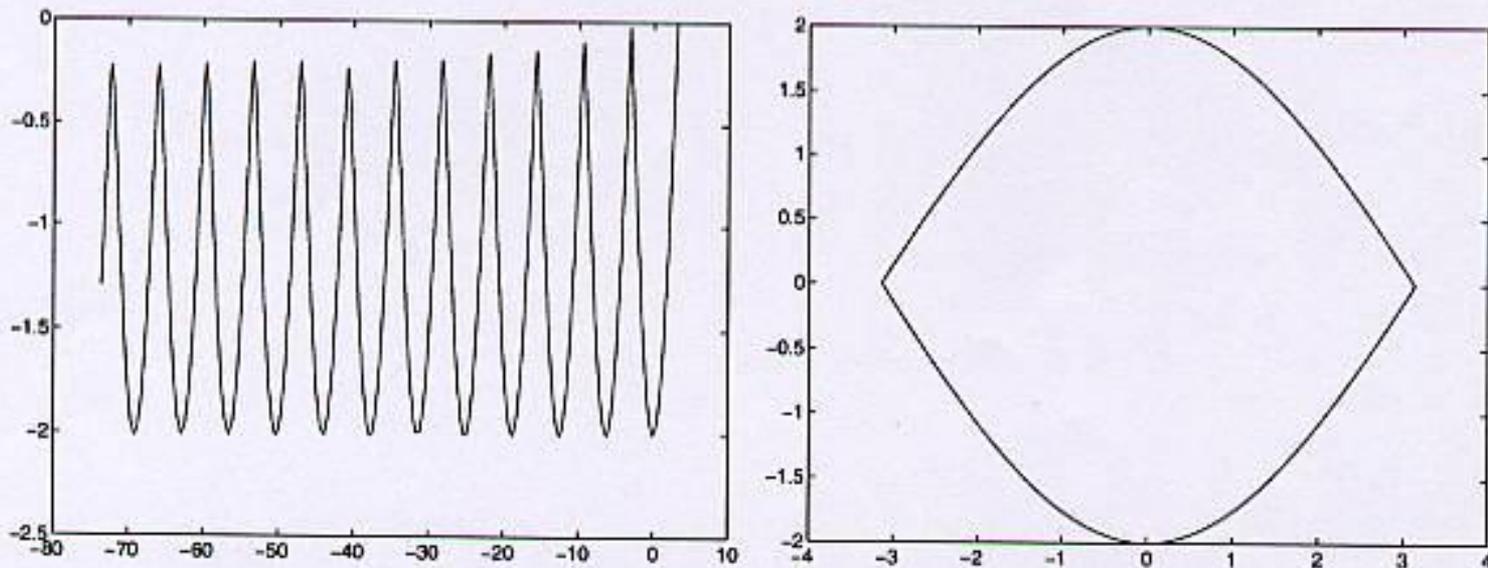
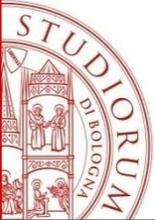


Figura 35: Soluzione nel piano delle fasi per il pendolo con velocità angolare iniziale al di sotto della velocità limite: a sinistra è rappresentata la soluzione fisicamente non accettabile ottenuta con i parametri di default di ode45 mentre a destra è rappresentata la soluzione corretta ottenuta variando i parametri RelTol e AbsTol



Equazione di moto del pendolo senza attrito

- Infatti per $\dot{\theta}_0 = 0$ ci troviamo sicuramente al di sotto della velocità limite del pendolo $\dot{\theta}_{\text{lim}} = 2$, oltre la quale il pendolo compie delle rotazioni complete.
- Quindi le traiettorie nel piano delle fasi devono essere linee chiuse, ossia il pendolo non riesce a compiere un giro completo ma continua ad oscillare fra l'angolo
$$\theta_0 = \pi - \delta \quad \text{e} \quad \theta_f = -(\pi - \delta)$$
- Come rimediare a questa situazione? Dobbiamo intervenire sulle impostazioni (dette **proprietà**) che determinano la precisione con cui opera il solutore.
- A questo scopo utilizziamo la **struttura options**: essa viene costruita dal comando **odeset** e viene accettata in ingresso da tutti i solutori.



Equazione di moto del pendolo senza attrito

La sintassi per assegnare alla *proprietà NomeProp-i* il *valore Val-i* è:

```
options=odeset('NomeProp1',Val1,'NomeProp2',Val2,...)
```

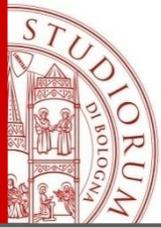
Proviamo a modificare tramite le proprietà *RelTol* e *AbsTol* la tolleranza relativa all'errore locale commesso sulla componente *i*-esima della soluzione ad ogni passo di integrazione. Matlab cerca di soddisfare il seguente criterio sull'errore commesso nell'approssimazione della *i*-esima componente della soluzione $y(i)$:

$$|e(i)| \leq \max(\mathbf{RelTol} * \mathbf{abs}(y(i)), \mathbf{AbsTol})$$

```
>>options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-7)  
>>[t,y]=ode45('pendolo',[0 100],[pi-0.01 0],options);  
>>plot(y(:,1),y(:,2));
```

La soluzione ottenuta in questo modo mostra un comportamento corretto.

Equazione di moto del pendolo senza attrito



Help *odeset*

Comando *odeset*

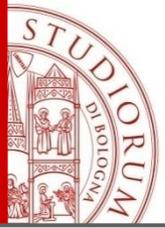
{ } valori di default

```
AbsTol: [ positive scalar or vector {1e-6} ]
  BDF: [ on | {off} ]
  Events: [ on | {off} ]
InitialStep: [ positive scalar ]
  Jacobian: [ on | {off} ]
  JConstant: [ on | {off} ]
  JPattern: [ on | {off} ]
  Mass: [ {none} | M | M(t) | M(t,y) ]
MassSingular: [ yes | no | {maybe} ]
  MaxOrder: [ 1 | 2 | 3 | 4 | {5} ]
  MaxStep: [ positive scalar ]
NormControl: [ on | {off} ]
OutputFcn: [ string ]
OutputSel: [ vector of integers ]
  Refine: [ positive integer ]
  RelTol: [ positive scalar {1e-3} ]
  Stats: [ on | {off} ]
Vectorized: [ on | {off} ]
```

Prima delle modifiche

```
AbsTol: [ positive scalar or vector {1e-7} ]
  BDF: [ on | {off} ]
  Events: [ on | {off} ]
InitialStep: [ positive scalar ]
  Jacobian: [ on | {off} ]
  JConstant: [ on | {off} ]
  JPattern: [ on | {off} ]
  Mass: [ {none} | M | M(t) | M(t,y) ]
MassSingular: [ yes | no | {maybe} ]
  MaxOrder: [ 1 | 2 | 3 | 4 | {5} ]
  MaxStep: [ positive scalar ]
NormControl: [ on | {off} ]
OutputFcn: [ string ]
OutputSel: [ vector of integers ]
  Refine: [ positive integer ]
  RelTol: [ positive scalar {1e-6} ]
  Stats: [ on | {off} ]
Vectorized: [ on | {off} ]
```

Dopo le modifiche



Equazione di moto del pendolo senza attrito

Per uno studio completo del comportamento della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria è utile rappresentare le traiettorie percorse dalle componenti della soluzione *nel piano delle fasi al variare delle condizioni iniziali*.

Consideriamo ancora il problema del pendolo senza attrito e tracciamo le orbite corrispondenti all'insieme delle condizioni iniziali:

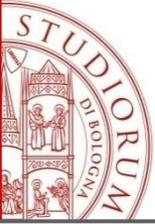
$$\begin{cases} \theta_i(0) = 0 \\ \dot{\theta}_i(0) = -3 + i\Delta\dot{\theta} \end{cases}$$

dove, per $i=0,1,\dots,12$, l'incremento $\Delta\dot{\theta} = 1/2$ fa sì che la velocità angolare iniziale descriva l'intervallo di valori

$$-3 \leq \dot{\theta}_0 \leq 3$$

in modo da comprendere tutta la gamma di situazioni possibili, ovvero:

$$\begin{cases} |\dot{\theta}_0| > \dot{\theta}_{\text{lim}} \\ |\dot{\theta}_0| = \dot{\theta}_{\text{lim}} = 2\omega = 2 \\ |\dot{\theta}_0| < \dot{\theta}_{\text{lim}} \end{cases}$$



Equazione di moto del pendolo senza attrito

A tale scopo, trovata la soluzione corrispondente ad una certa condizione iniziale, eseguiamo un *plot* con il comando *hold* per sovrapporre i vari grafici delle traiettorie.

```
clear all
close all
options=odeset('relTol',1e-6,'AbsTol',1e-7);
hold on
N=12;
deltatp=6/N;
for i=0:N
    tetap=-3+i*deltatp;
    [t,y]=ode45('pendolo',[0 25],[0 tetap],options);
    plot(y(:,1),y(:,2),'b', y(:,1),-y(:,2),'b');
end
axis('equal')
grid
```

Equazione di moto del pendolo senza attrito

Comando **zoom**

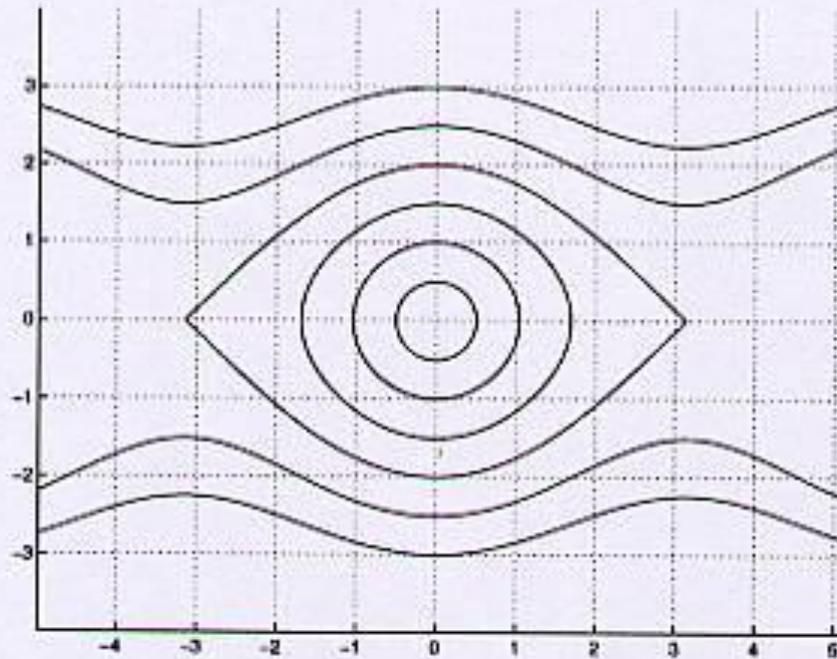
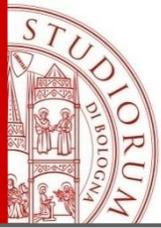


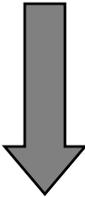
Figura 36: Studio parametrico delle orbite per il problema del pendolo. Le orbite chiuse interne corrispondono a $|\dot{\theta}_0| < \dot{\theta}_{lim}$, l'orbita chiusa più esterna corrisponde a $|\dot{\theta}_0| = \dot{\theta}_{lim} = 2$, mentre le curve che intersecano l'asse delle ordinate per valori in modulo maggiori di 2 corrispondono a $|\dot{\theta}_0| > \dot{\theta}_{lim}$

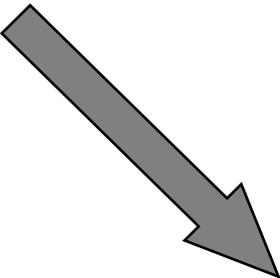


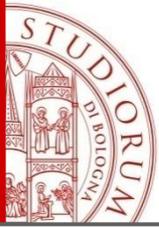
Equazione di Van der Pol

$$\begin{cases} y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad \mu \in \mathfrak{R}^+$$

smorzamento del sistema


$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases}$$


$$\begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$



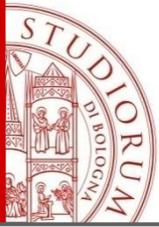
Equazione di Van der Pol

Fissiamo $\mu=1$ (smorzamento debole) e creiamo l'ode file *vdpol.m*

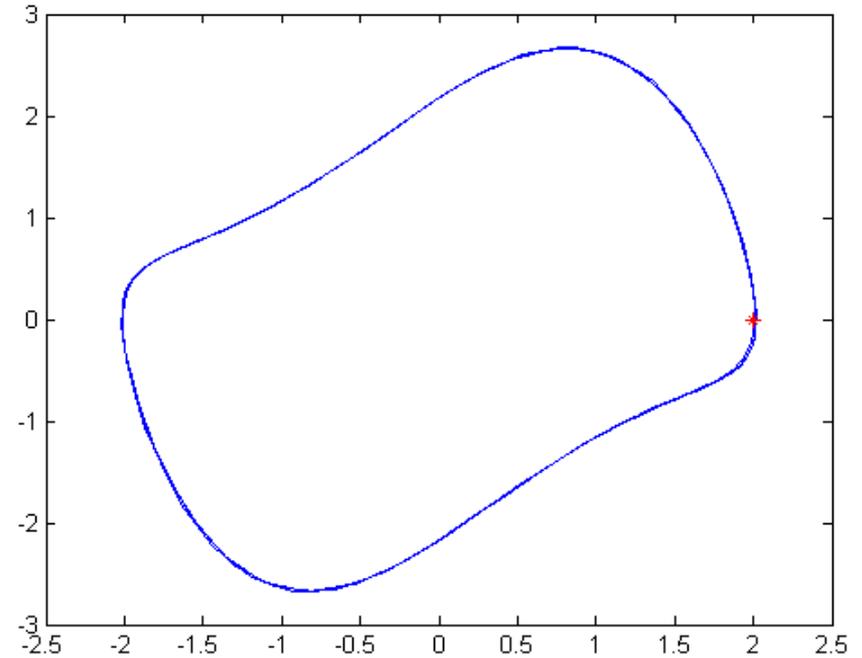
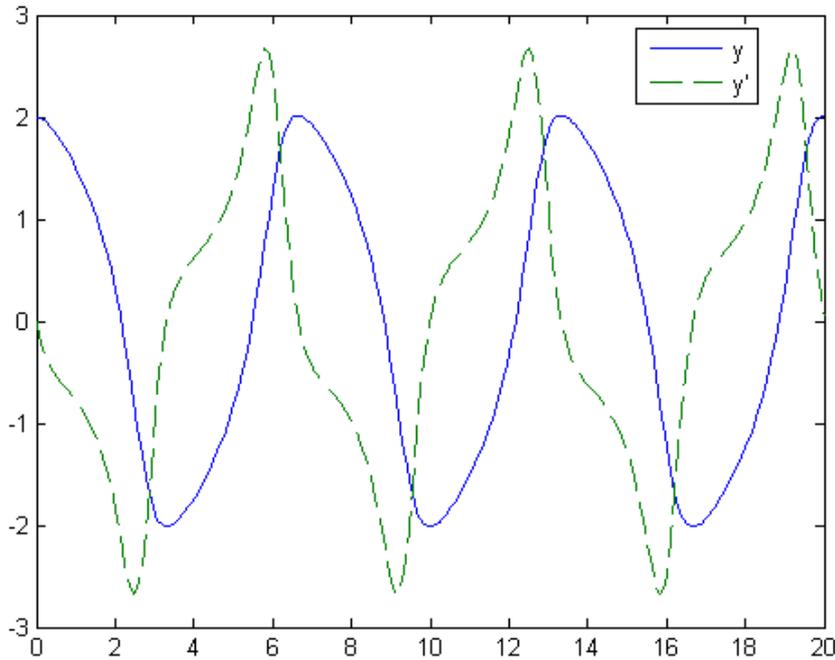
```
function yp=vdpol(t,y)
% equazione di Van der Pol
mu=1;
yp=[y(2);mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

Lanciamo il solver *ode45* nell'intervallo [0 20] e plottiamo i risultati componente per componente...

```
>> [t,y]=ode45(@vdpol,[0 20],[2 0]);
>> plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'—');
```



Equazione di Van der Pol



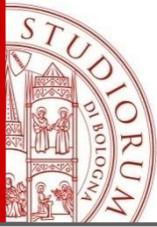
plot nel piano delle fasi (y, y')

```
>>plot(y(:,1),y(:,2))
```

```
>>hold
```

```
>>plot(2,0,'*')
```

(*piano y, y'* , l'asterisco
evidenzia la condizione iniziale)



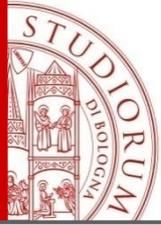
Equazione di Van der Pol

Fissiamo $\mu=1000$ (forte smorzamento) e correggiamo *vdpol.m*

```
function yp=vdpol(t,y)
% equazione di Van der Pol
mu=1000;
yp=[y(2);mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

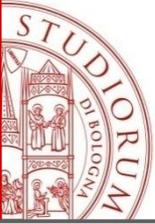
Rilanciamo il solver *ode45* nell'intervallo [0 1000] e plottiamo i risultati

```
>> [t,y]=ode45(@vdpol,[0 1000],[2 0]);
```



Equazione di Van der Pol

- Osserviamo come il solutore impieghi molto tempo per integrare il sistema di Van der Pol; il problema è diventato ***stiff*** perché le **componenti della soluzione Y subiscono variazioni su scale temporali molto diverse tra loro.**
- Il metodo numerico risente di questo squilibrio nelle scale temporali e ne paga il prezzo in termini di scelta sul passo di integrazione che in alcuni punti risulta molto stringente.
- In questo caso è opportuno ricorrere alla classe di solutori, indicati con il suffisso ***“s”*** appositamente studiati per questo genere di problemi,
- ad esempio ***ode15s*** e ***ode23s***.



Equazione di Van der Pol

```
>> [t,y]=ode15s(@vdpol,[0 1000],[2 0]);  
>> semilogy(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'o');
```

- Ora i tempi di calcolo sono notevolmente diminuiti.
- Il grafico in scala semilogaritmica delle due componenti evidenzia chiaramente le diverse scale temporali caratteristiche di ciascuna componente, da cui la natura ***stiff*** del problema.

Equazione di Van der Pol

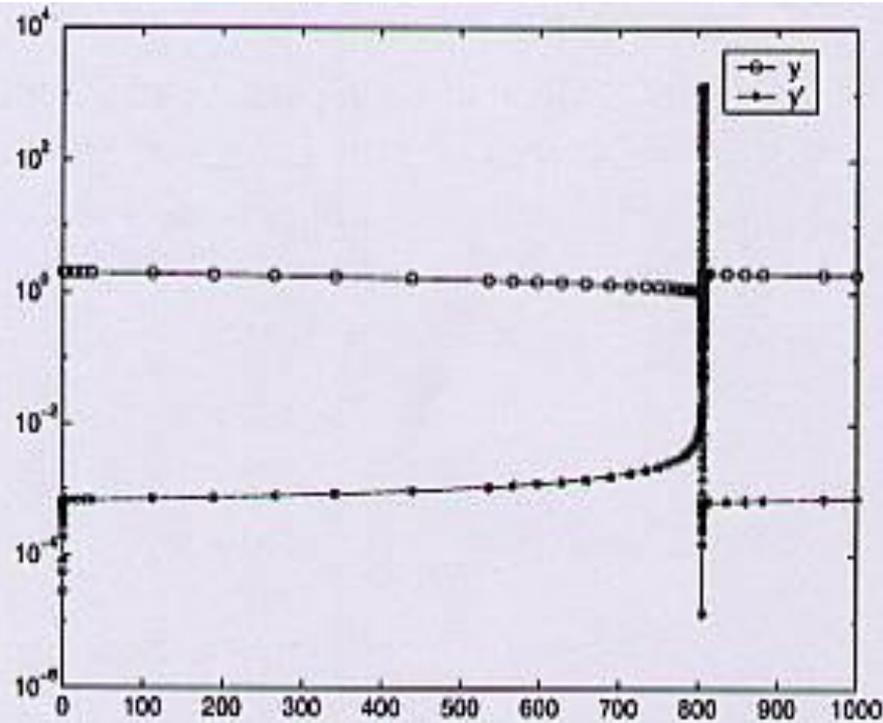
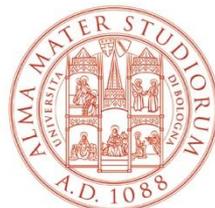
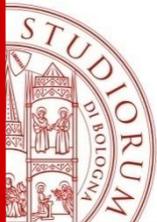


Figura 33: Soluzione dell'equazione di Van der Pol per $\mu = 1000$ ottenuta con un solver specifico per problemi *stiff*. Si notino le diverse scale di variazione delle due componenti (rappresentate in valore assoluto)



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

morigi@dm.unibo.it

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>