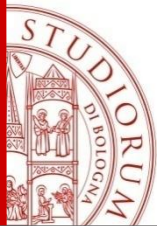


Metodi Numerici per Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali (4)

- Principio Variazionale
- Metodi agli elementi finiti FEM



Richiami di analisi funzionale

Definizione

*Dato uno spazio funzionale V si dice **funzionale** su V un operatore che associa ad ogni elemento di V un numero reale :*

$$F:V \rightarrow \mathbb{R}$$

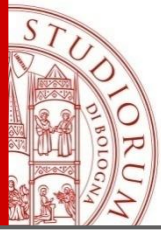
Si indica $F(v) = \langle F, v \rangle$

Funzionale **lineare**

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in V$$

è **limitato** se

$$\exists C > 0 \quad |F(v)| \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V$$



Spazio delle funzioni a quadrato sommabile

Sia Ω un aperto di R^n .

Consideriamo lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile su Ω :

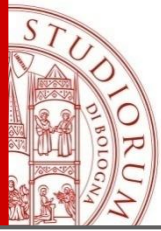
$$L^2(\Omega) \equiv \left\{ v : \Omega \rightarrow R \text{ t.c. } \int_{\Omega} v(x)^2 d\Omega < \infty \right\}$$

Esso è uno spazio di Hilbert il cui prodotto scalare è:

$$(v, u)_{L^2(\Omega)} \equiv \int_{\Omega} v(x)u(x) d\Omega$$

da cui la norma

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{(v, v)_{L^2(\Omega)}}$$



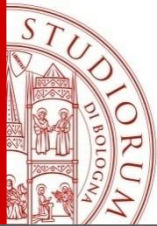
Spazio delle funzioni a quadrato sommabile

Sia Ω un aperto di R^n .

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$\left| \int_{\Omega} v(x)u(x)d\Omega \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{\int_{\Omega} |\cdot| d\Omega}$$



Spazi di Sobolev

Sia Ω un aperto di R^n e k un intero positivo.

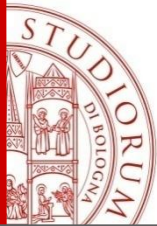
Lo spazio di Sobolev di ordine k su Ω è formato dalla totalità delle funzioni di $L^2(\Omega)$ aventi tutte le derivate (distribuzionali) fino all'ordine k appartenenti ad $L^2(\Omega)$:

$$H^k(\Omega) \equiv \left\{ v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha: |\alpha| \leq k \right\}$$

Gli spazi di Sobolev risultano essere spazi di Hilbert rispetto al prodotto scalare seguente:

$$(v, u)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)(D^\alpha u) d\Omega$$

da cui le norme $\|v\|_k = \|v\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_k} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 d\Omega}$



Forma

Dato uno V uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|_V$, si dice **forma** un'applicazione a che associa ad ogni coppia di elementi di V un numero reale

$$a : V \times V \mapsto \mathfrak{R},$$

Bilineare se è lineare rispetto ad entrambi i suoi argomenti

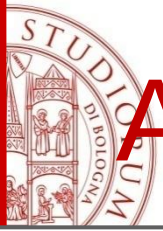
$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu w, v) &= \lambda a(u, v) + \mu a(w, v) & \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R}, \forall u, v, w \in V \\ a(u, \lambda w + \mu v) &= \lambda a(u, w) + \mu a(u, v) & \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R}, \forall u, v, w \in V \end{aligned}$$

Continua

$$\text{se } \exists M > 0 \text{ tale che } |a(u, v)| < M \|u\|_V \|v\|_V$$

Coerciva

$$\text{se } \exists \alpha > 0 \text{ tale che } a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$



Analisi del problema di Poisson

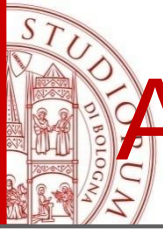
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un **aperto limitato** e **connesso** (che chiameremo **dominio**) e sia $\partial\Omega$ la sua frontiera. Consideriamo il problema:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

dove $f=f(x)$ è una funzione assegnata.

L'equazione è **ellittica** del **second'ordine**, **lineare**, **non omogenea** (se $f \neq 0$).

Fisicamente, u può rappresentare lo spostamento verticale di una membrana elastica dovuto all'applicazione di una forza specifica pari ad f , oppure può essere la distribuzione di potenziale elettrico dovuta ad una densità di carica elettrica f .



Analisi del problema di Poisson

Per avere un'unica soluzione, all'equazione vanno aggiunte delle opportune condizioni al contorno. Si può ad esempio assegnare il valore di u sul bordo (**problema di Dirichlet**)

$$u = g \quad \text{su } \partial\Omega$$

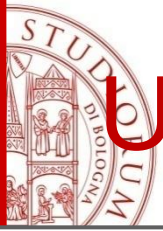
g è una funzione assegnata. Il caso $g=0$ si dice **omogeneo**.

Oppure imporre il valore della **derivata normale** di u

$$\nabla u \bullet n = \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{su } \partial\Omega$$

essendo n la normale uscente ad Ω e h una funzione assegnata (**problema di Neumann**), corrisponde, nel caso della membrana, ad aver imposto la trazione al bordo. Si possono infine assegnare condizioni di tipo diverso, ad esempio

$$\begin{cases} u = g & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (\text{problema misto})$$



Una considerazione sulla regolarità

$$-\Delta u = 1 \quad \forall x \in (0,1) \times (0,1)$$

Potrebbe non aver senso cercare una soluzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mentre si hanno maggiori probabilità di trovare una soluzione

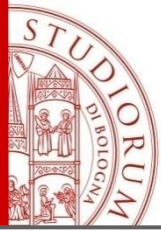
$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

Uno spazio più grande di $C^2(\overline{\Omega})$

Si cerca una formulazione alternativa a quella forte perchè essa non consente di trattare alcuni casi fisicamente significativi.

In effetti, in presenza di dati poco regolari, la soluzione fisica potrebbe addirittura non appartenere nemmeno allo spazio

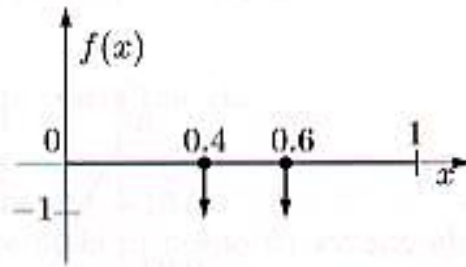
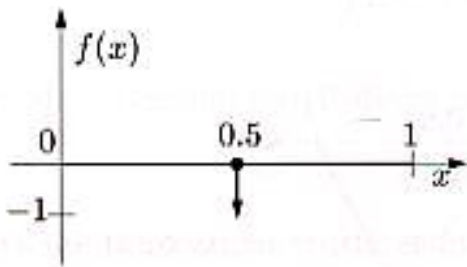
$$u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$



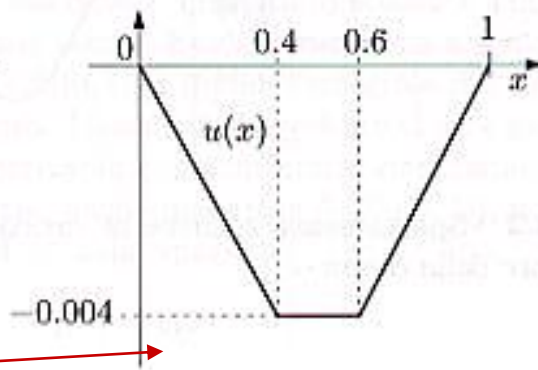
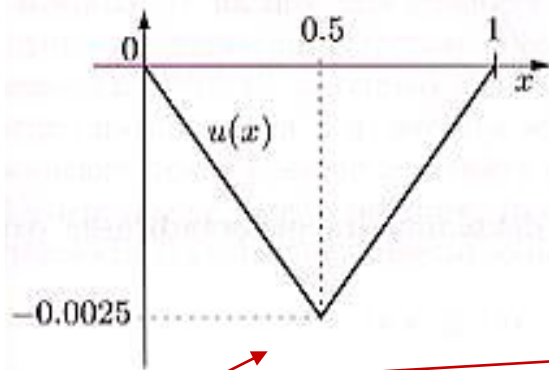
Problema di Poisson monodimensionale

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases}$$

Condizione di equilibrio di un filo elastico con tensione pari ad uno, fissato agli estremi, in regime di piccoli spostamenti e soggetto ad una forza trasversale di intensità f .



f carico



u spostamento verticale del filo rispetto alla posizione di riposo $u=0$.

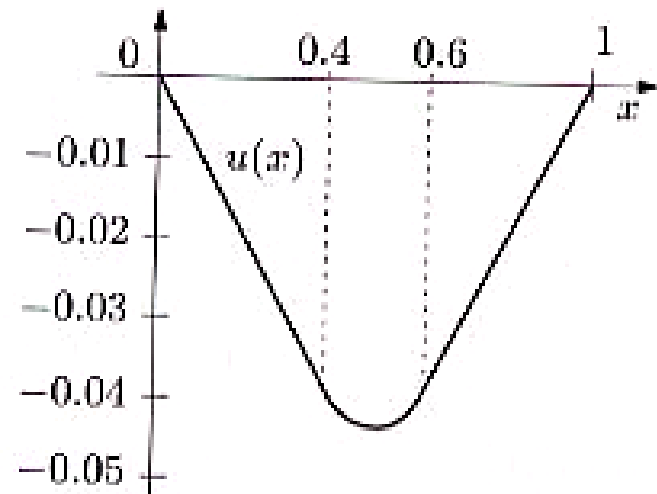
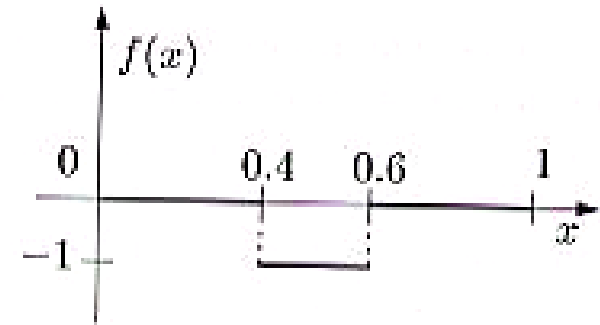
Formulazione forte non adeguata

Soluzione fisica, continua ma non derivabile,
Soluzione analitica continua fino derivata seconda

Problema di Poisson monodimensionale

f costanti a tratti

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{10}x & \text{per } x \in [0, 0.4], \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{25} & \text{per } x \in [0.4, 0.6], \\ -\frac{1}{10}(1-x) & \text{per } x \in [0.6, 1]. \end{cases}$$

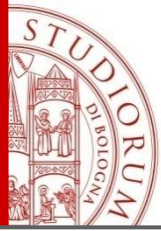


**Soluzione
di classe solo $C^1([0,1])$**

Serve dunque una formulazione del problema alternativa a quella forte che consenta di ridurre l'ordine di derivazione richiesto sulla soluzione incognita u .

Passeremo da un **problema differenziale** del secondo ordine ad uno in **forma integrale** del primo ordine.

Questo problema costituisce la **formulazione debole** del problema differenziale.



Formulazione debole del Problema di Dirichlet omogeneo

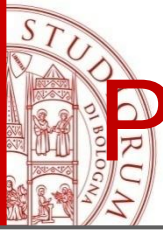
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo per una funzione test $\mathbf{v}$ (per ora arbitraria) ed integriamo sull'intervallo $(0,1)$

$$-u''v = fv \quad \Rightarrow \quad -\int_0^1 u''v \, dx = \int_0^1 fv \, dx \quad \text{Integriamo per parti}$$

$$-\int_0^1 u''v \, dx = \int_0^1 u'v' \, dx - [u'v]_0^1$$

Essendo u nulla al bordo, imponiamo che la funzione test $\mathbf{v}$ sia nulla agli estremi dell'intervallo, non potendo pretendere che u' si annulli.



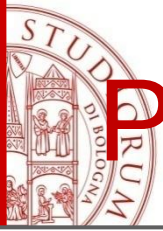
Problema di Dirichlet omogeneo

$$\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \text{Scelta dello spazio } V:$$

1) Spazio delle funzioni test V se $v \in V$ allora $v(0) = v(1) = 0$

2) Se u, v appartenessero a $C^1([0,1])$ avremmo $u', v' \in C^0([0,1])$ e quindi l'integrale al primo membro avrebbe senso. Nella realtà le soluzioni fisiche possono non essere derivabili con continuità. Inoltre, anche quando $f \in C^0([0,1])$ non vi è certezza che il problema ammetta soluzione nello spazio

$$V = \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$



Problema di Dirichlet omogeneo

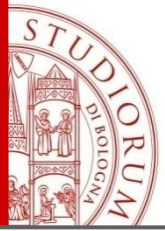
$V = \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$ Non è uno spazio vettoriale completo con il prodotto scalare $(u, v)_1 = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$

$$L^p(0,1) \equiv \left\{ v : (0,1) \mapsto \mathfrak{R} \text{ t.c. } \|v\|_{L^p(0,1)} \equiv \left(\int_0^1 |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty$$

Proprietà: Se $u, v \in L^2(0,1)$ allora $u'v' \in L^1(0,1)$

Spazio delle funzioni a potenza p-esima integrabile secondo Lebesgue

Affinche' l'integrale sia ben definito la richiesta minima è che $v'u'$ stia in $L^1(0,1)$



Funzioni a quadrato integrabile con derivate a quadrato integrabile

Spazio di Sobolev

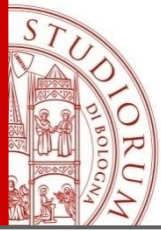
$$H^1(0,1) \equiv \{v \in L^2(0,1) : v' \in L^2(0,1)\}$$

Scegliamo dunque come spazio V il sottospazio di $H^1(0,1)$

$$H_0^1(0,1) \equiv \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$$

$$H^1(0,1) \not\subset C^1([0,1])$$

Le funzioni di H^1 non sono derivabili in senso classico. Funzioni continue a tratti con raccordi a spigolo appartengono ad H^1 ma non a C^1 . Sono dunque contemplate anche le soluzioni continue ma non derivabili.



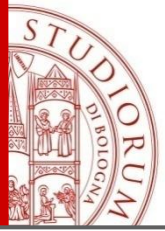
Formulazione debole del Problema di Dirichlet omogeneo

Problema
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

è ricondotto a trovare

(2)
$$u \in V : \int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V, \quad V = H_0^1(0,1)$$

Il problema debole (2) risulta equivalente ad un problema variazionale in virtù del seguente risultato:



Formulazione variazionale del Problema di Dirichlet omogeneo

Teorema Il problema variazionale

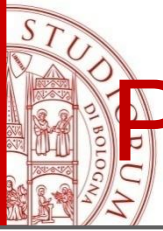
$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{cercare } u \in V: J(u) = \min_{v \in V} J(v) \quad \text{con} \\ J(v) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 f v dx \end{array} \right.$$

è equivalente al problema

$$(2) \text{ cercare } u \in V: \int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V, \quad V = H_0^1(0,1)$$

nel senso che u è soluzione di (2) se e solo se u è soluzione di (3)

Principio dei lavori virtuali della meccanica.



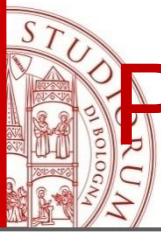
Problema di Dirichlet omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cercare } u \in V: J(u) = \min_{v \in V} J(v) \quad \text{con} \\ J(v) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 f v dx \end{array} \right.$$

$J(v)$ esprime infatti **l'energia potenziale** globale corrispondente alla configurazione v del sistema, il principio dei lavori virtuali stabilisce che fra gli spostamenti ammissibili del filo elastico, quello che corrisponde alla soluzione è quello che minimizza l'energia potenziale.

In questo senso il Teorema afferma che la soluzione debole è anche quella che minimizza l'energia potenziale.

Principio del minimo dell'energia potenziale



Problema di Neumann omogeneo

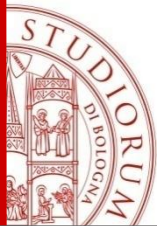
$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u = f(x), & 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases} \quad \sigma \text{ funzione positiva}$$

Moltiplichiamo per una funzione test v (per ora arbitraria) ed integriamo sull'intervallo $(0,1)$. Integriamo poi per parti

$$\int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 \sigma u v dx - [u' v]_0^1 = \int_0^1 f v dx$$

Supponiamo $f \in L^2(0,1)$ e $\sigma \in L^\infty(0,1)$ ossia che σ sia una funzione limitata quasi ovunque (q.o.) su $(0,1)$.

Il termine di bordo è identicamente nullo in virtù delle condizioni di Neumann imposte su u e quindi non è necessario richiedere che v si annulli.



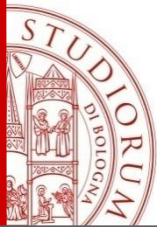
Problema di Neumann omogeneo

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u = f(x), & 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases}$$

Formulazione debole

cercare $u \in H^1(0,1)$:

$$\int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 \sigma u v dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V \quad \text{con } V = H^1(0,1)$$



Problema misto omogeneo

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases}$$

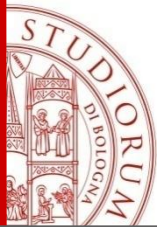
Dirichlet Neumann

$$\int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 \sigma u v dx - [u' v]_0^1 = \int_0^1 f v dx$$

Il termine di bordo si annulla solo in $x=1$, per cui si deve chiedere che le funzioni test siano nulle in $x=0$.

Ponendo $\Gamma_D = \{0\}$ e definendo

$$H_{\Gamma_D}^1(0,1) \equiv \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$$



Problema misto omogeneo

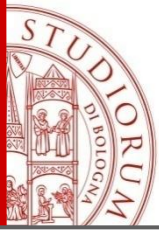
$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases}$$

Formulazione debole

cercare $u \in H_{\Gamma_D}^1(0,1)$:

$$\int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 \sigma u v dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V \quad \text{con } V = H_{\Gamma_D}^1(0,1)$$

$$f \in L^2(0,1) \quad e \quad \sigma \in L^\infty(0,1)$$



Equazione di Poisson 2D

Problema di Dirichlet omogeneo

Cercare u tale che

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Moltiplichiamo per una funzione test v (per ora arbitraria) ed integriamo su Ω .

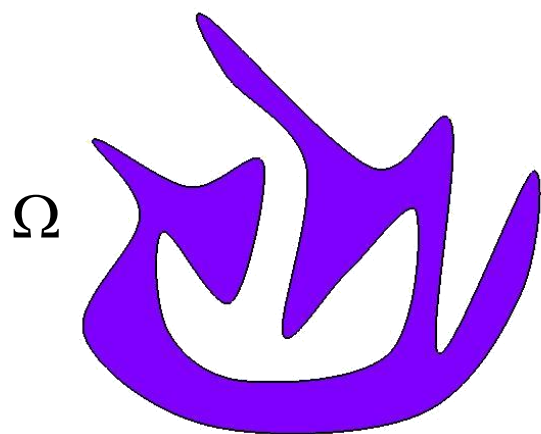
$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Teorema divergenza. Formula di Gauss-Green.

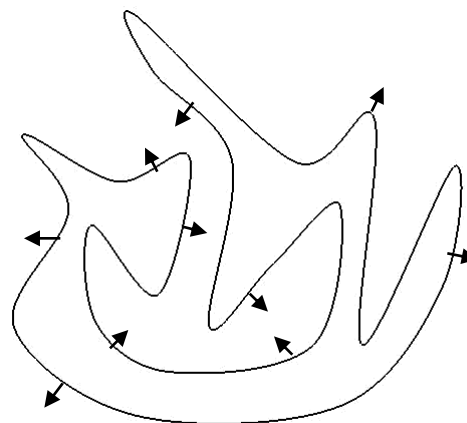
Teorema di Divergenza

Dato un campo vettoriale $\mathbf{a}(x)=(a_1(x),a_2(x))$ definito su una regione Ω , l'integrale di volume di $\nabla \cdot \mathbf{a}$ su Ω e l'integrale di superficie di $\mathbf{a}$ su $\partial\Omega$ sono uguali:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{a}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma$$

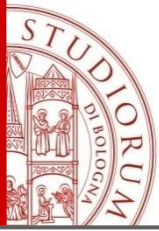


=



$$\operatorname{div}(\mathbf{a}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$$

$\mathbf{n}(x)=(n_1(x),n_2(x))$ è il versore normale uscente a Ω



Equazione di Poisson 2D-Problema di Dirichlet omogeneo

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$$\nabla \bullet (v \nabla u) = \nabla v \bullet \nabla u + v \Delta u$$

Regola del prodotto mult.

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet (v \nabla u) = \int_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u$$

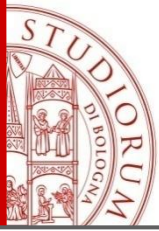
$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \bullet n = \int_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u$$

Teorema divergenza

$$\nabla u \bullet n = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial u}{\partial n}$$

Formula di Green

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla v \bullet \nabla u \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\gamma \quad , \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^T$$



Equazione di Poisson 2D-Problema di Dirichlet omogeneo

Formulazione debole

cercare $u \in H_0^1(\Omega)$:

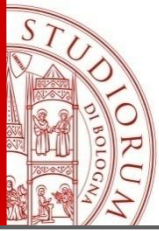
$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$f \in L^2(\Omega)$$

$$H^1(\Omega) \equiv \left\{ v : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2 \right\}$$

Funzione test nulle al bordo

$$H_0^1(0,1) \equiv \left\{ v \in H^1(0,1) : v = 0 \text{ su } \partial\Omega \right\}$$



Equazione di Poisson 2D-Problema di Dirichlet omogeneo

cercare $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

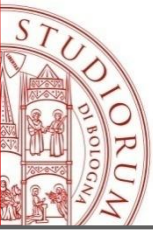
$$f \in L^2(\Omega)$$

è equivalente al **problema variazionale**

cercare $u \in V$: $J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$ con

$$J(v) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$$V = H_0^1(\Omega)$$



Formulazione più compatta

Forma bilineare

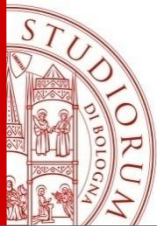
$$a : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}, \quad a(u, v) \equiv \int_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla v \, d\Omega$$

Funzionale lineare

$$F : V \rightarrow \mathfrak{R}, \quad F(v) \equiv \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

cercare $u \in V :$

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$



Teorema di esistenza ed unicità

Teorema di Lax-Milgram

Sia V uno spazio di Hilbert, $a : V \times V \mapsto \mathfrak{R}$, una forma bilineare continua e coerciva. Sia $F : V \rightarrow \mathfrak{R}$, un funzionale lineare continuo. Allora esiste unica la soluzione del problema

$$\begin{array}{ll} \text{cercare } u \in V : & (*) \\ a(u, v) = F(v) & \forall v \in V \end{array}$$

Nelle ipotesi del Teorema di Lax-Milgram, se inoltre $a(.,.)$ è anche **simmetrica**: $a(u, v) = a(v, u) \quad u, v \in V$ allora il problema (*) è equivalente al problema variazionale

$J(v)$: energia totale
 $a(v, v)$: energia interna
 $F(v)$: energia forze
esterne

$$\begin{array}{ll} \text{cercare } u \in V : & J(u) \geq J(v) \quad \forall v \in V \\ \text{per il funzionale quadratico} & \\ J(v) \equiv \frac{1}{2} a(v, v) - F(v) & (**) \end{array}$$

Dim.

Sia u soluzione di (**). Ponendo

$$v = u + \delta w, \quad \delta \in R \quad \Rightarrow \quad J(v) > J(u) \quad \forall v \in V, v \neq u$$

$$J(u + \delta w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + \delta w)|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f(u + \delta w) d\Omega$$

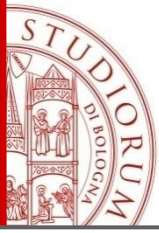
$$J(u + \delta w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \delta \nabla w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f(u + \delta w) d\Omega$$

$$J(u + \delta w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 + \delta^2 (\nabla w)^2 + 2\delta \nabla u \nabla w d\Omega - \int_{\Omega} f(u + \delta w) d\Omega$$

$$J(u + \delta w) = \frac{1}{2} [a(u, u) + 2\delta a(u, w) + \delta^2 a(w, w)] - (f, u) - \delta(f, w)$$

Dim.

$$\begin{aligned} J(u + \delta w) &= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2\delta a(u, w) + \delta^2 a(w, w)] - [(f, u) + \delta(f, w)] = \\ &= J(u) + \frac{1}{2}[\delta^2 a(w, w) + 2\delta a(u, w)] - \delta(f, w) = \\ \frac{J(u + \delta w) - J(u)}{\delta} &= \frac{1}{2}[\delta a(w, w) + 2a(u, w)] - (f, w) \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(u + w) - J(u)}{\delta} &= 0 \\ \Rightarrow a(u, w) - (f, w) &= 0 \quad \forall w \in V, \text{ ovvero } u \text{ soddisfa } (*). \end{aligned}$$

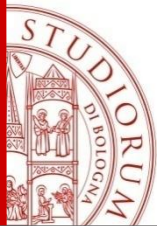


Risoluzione numerica di problemi ellittici

METODO DI GALERKIN per problemi ellittici



Metodo agli elementi finiti



Metodi variazionali

Idea

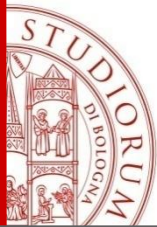
Problema ai limiti in forma generale

$$\begin{cases} Ly = f & \text{su } \Omega \\ By = g & \text{su } \Gamma \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L} \text{ operatore differenziale} \\ \mathbf{B} \text{ condizioni ai limiti} \end{array}$$

La soluzione y viene cercata in un opportuno spazio funzionale V , solitamente di dimensione infinita.

Si può introdurre un *problema discreto* scegliendo uno spazio V_n a dimensione n finita, in cui si fissa una particolare base:

$$\text{Base in } V_n := \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$$



Metodi variazionali

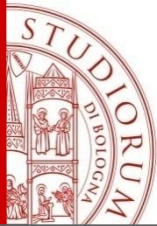
Lo spazio V_n può essere uno spazio di polinomi, nelle varie forme di Lagrange, Legendre, Chebyshev, oppure uno spazio di splines o di funzioni trigonometriche, ecc..

L'idea consiste, quindi, nel cercare un'*approssimazione* della soluzione **y** nella seguente forma

$$y(x) \approx y_n := c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_n \psi_n$$

Le funzioni ψ_i sono anche dette le **funzioni forma** (*shape functions*), mentre i parametri c_i sono i **gradi di libertà**.

In questo modo il problema è ricondotto a quello della determinazione dei parametri c_i . A seconda di come si imposta tale problema, si ottiene un particolare metodo.



Idea variazionale

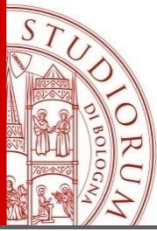
- In realtà, i problemi ai limiti derivano, in gran parte, dalla applicazione di *principi variazionali*, quali il *minimo di un funzionale dell'energia* ed il *principio dei lavori virtuali*.
- Allora la soluzione discreta può essere ottenuta imponendo lo stesso principio variazionale sullo spazio V_n , anziché sullo spazio continuo V .

Metodo degli elementi finiti.

V_n spazio di polinomi a tratti

Metodo spettrale.

V_n spazio di polinomi, algebrici o trigonometrici, su tutto Ω .



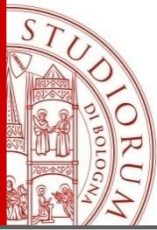
Breve confronto tra spettrali e FE

Metodi Spettrali:

Usano funzioni base globali per approssimare una soluzione sull'intero dominio.

Metodo (FE) :

Usa funzioni base a supporto locale per approssimare una soluzione su singoli elementi del partizionamento dell'intero dominio.



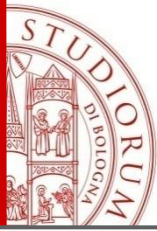
Breve confronto tra FD e FE

Metodo Finite Difference (FD) :

FD approssima un *operatore* (derivate) e risolve un problema su un insieme di *punti* (griglia)

Metodo Finite Element (FE) :

FE usa operatori esatti ma approssima le *funzioni base della soluzione*. Inoltre, FE risolve un problema anche all'interno delle celle griglia.



Idea base Metodo Finite Element

$$(S) \Leftrightarrow (W) \approx (G) \Leftrightarrow (M)$$

Forma
Forte

Forma
debole

Formulazione
di Galerkin

Forma
matriciale

Metodi:

- Spettrali
- FE