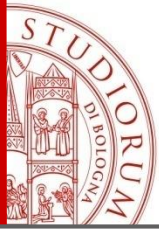


Sistemi Lineari

Metodi diretti



Sistema Lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Esiste $\mathbf{x}$ che verifichi tutte le equazioni lineari simultaneamente?

Sistemi Lineari

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice coefficienti $\mathbf{A}$ $\mathbf{x}$ $\mathbf{b}$ vettore termini noti

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ vettore incognite

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad 1 \leq i \leq m$$

Sistemi Lineari: soluzioni

Problema della ricerca del punto (x,y) di intersezione di due rette nel piano

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Quante soluzioni ci sono?

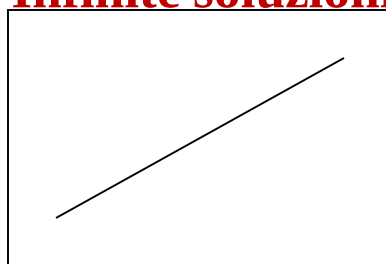
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 10y = 2 \end{cases}$$

Soluzione unica



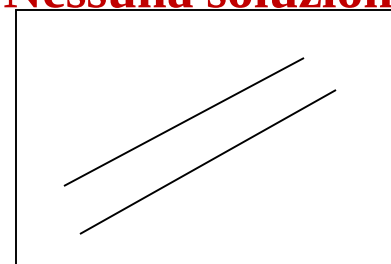
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 10 \end{cases}$$

Infinite soluzioni



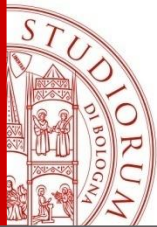
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases}$$

Nessuna soluzione



Compatibile: il sistema ammette almeno una soluzione

Incompatibile: in caso contrario



Classificazione dei sistemi lineari

m equazioni **n** incognite

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{x} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

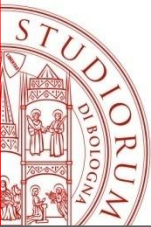
SISTEMA NORMALE ($m = n$)

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{x} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

**SISTEMA
INDETERMINATO
($m < n$)**

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{x} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

**SISTEMA
SOVRADETERMINATO
($m > n$)**



Soluzioni di sistemi lineari

Teorema (Rouche' Capelli)

Il sistema lineare $Ax=b$ ammette soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti A e la matrice completa $[A \ b]$ hanno lo stesso rango:

$$\text{Rank}(A)=r=\text{Rank}([A \ b])$$

Se inoltre $r=n$ la soluzione è unica

Se invece $r < n$ esistono un numero infinito di soluzioni

r variabili incognite possono essere
espresse in termini di $n-r$ variabili con valori arbitrari

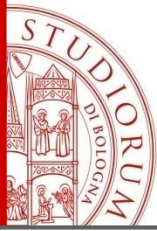
Altrimenti ($\text{Rank}(A) \neq r \neq \text{Rank}([A \ b])$) il sistema non ammette soluzioni

SISTEMA INDETERMINATO $\text{rank}(A)=\min(n,m)$

il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni ($m < n$) non ci sono sufficienti informazioni per determinare un unico valore per tutte le incognite (r sempre $<$ di n)

SISTEMA SOVRADETERMINATO

($m > n$) ci sono più equazioni che incognite: il sistema non ammette una soluzione esatta ma solo approssimata (metodo dei minimi quadrati)



Soluzione di sistemi indeterminati

m equazioni n incognite

$$\boxed{A} \quad \boxed{x} = \boxed{b} \quad \text{SISTEMA INDETERMINATO (m < n)}$$

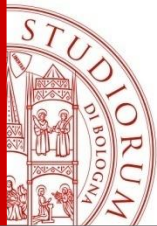
A is an $m \times n$ matrix

$$\text{rank}(A) = \min \{m, n\} = m < n$$

esistono un numero infinito di soluzioni

Si cerca in questo caso la soluzione di minima norma

$$x^* = \arg \min_x \|x\|_2^2 \quad \text{tale che } Ax = y$$



Soluzione di sistemi indeterminati

m equazioni **n** incognite

$$x^* = \arg \min_x \|x\|_2^2 \Rightarrow x^* = A^T (AA^T)^{-1} y$$

tale che $Ax = y$

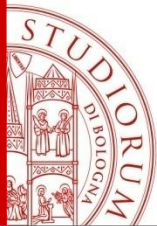
Verifica: $L(x, \mu) = \|x\|_2^2 + \mu^T (y - Ax)$ Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x) = 2x - A^T \mu = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} A^T \mu \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} L(\mu) = y - Ax = 0 \rightarrow y = Ax$$

$$y = \frac{1}{2} AA^T \mu \rightarrow \mu = 2(AA^T)^{-1} y$$

Sostituendo in (1) $x = A^T (AA^T)^{-1} y$



Soluzioni di sistemi lineari $m=n$

Teorema

Il sistema lineare normale ($m=n$) $Ax=b$
ammette una ed una sola soluzione
se e solo se
 A è non singolare

Se il sistema è omogeneo ($b=0$), A non singolare allora
esiste solo la soluzione nulla $x=0$

A (n×n) è detta NON singolare se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

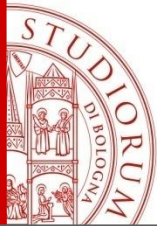
- 1) $\det(A) \neq 0$
- 2) Se esiste la matrice inversa A^{-1} di A
- 3) $\text{rank}(A)=n$

Altrimenti A è singolare.

Se A è non singolare allora esiste A^{-1} inversa di A

$$\underbrace{A^{-1}A}_I x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$



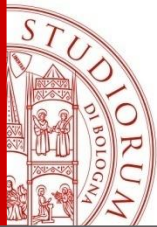
Esempio

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7} = 3.$$

$$x = 7^{-1} \times 21 = 0.142857 \times 21 = 2.99997$$

Il metodo dell'inversa
è meno **efficiente** e meno **accurato**!

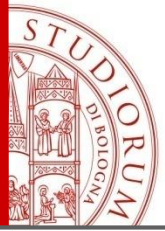


Condizionamento di un sistema lineare

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$\Delta \mathbf{A}$ matrice delle perturbazioni
 $\left. \begin{array}{l} \Delta \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{x} \end{array} \right\}$ vettori delle perturbazioni

1. $\mathbf{A} (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ perturbazione del termine noto
2. $(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b}$ perturbazione matrice coeff.
3. $(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$



Condizionamento di un sistema lineare: caso 1

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

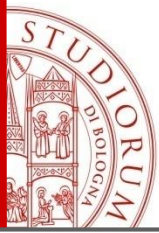
$$\mathbf{A} (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$$

Sottraendo membro a membro

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{b}$$

$$\|\Delta \mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{b}\| \quad \longrightarrow \quad \|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{b}\|$$

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}$$



Condizionamento di un sistema lineare: caso 1

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \|A\|}_{\substack{\text{Indice/numero di} \\ \text{condizionamento}}} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

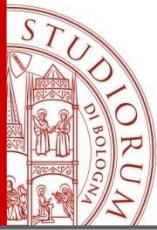
Errore relativo nella soluzione

cond(A)
 $\mu(A)$
 $K(A)$

Errore relativo nei dati

Fattore di amplificazione delle perturbazioni (relative) introdotte in b

Condizionamento di un sistema lineare: caso 2



$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

A non singolare

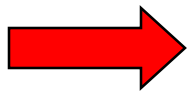
$A + \Delta A$ non singolare

$$Ax = b = (A + \Delta A)(x + \Delta x)$$

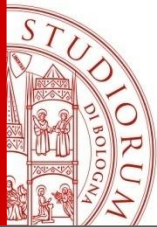
$$0 = A\Delta x + \Delta A(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|$$



$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

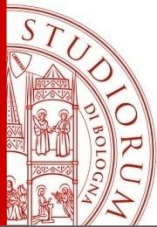


Numero di condizionamento $K(A)$

- **$K(A)$ piccolo** (ordine n^p $p=0,1,2,3$):
il problema/matrice è **ben** condizionato
- **$K(A)$ grande** (ordine 10^n):
Il problema/matrice è **mal** condizionato
(es. Matrice di Hilbert)

E' una misura di quanto una matrice è vicina ad essere singolare.

$K(A)$ grande allora A è quasi singolare



Indice di condizionamento PROPRIETA'

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

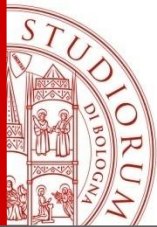
1. $K(A) \geq 1$

Infatti : $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$

2. $K_2(A) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha Q,$

Q unitaria / ortogonale ($Q^T = Q^{-1}$)

Infatti : $\|Q\|_2 = \sqrt{\rho(Q^T Q)} = \sqrt{\rho(I)} = 1$



Indice di condizionamento PROPRIETA'

3. Se A simmetrica, $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$

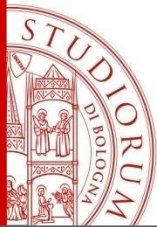
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A) = |\lambda_{\max}|$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{|\lambda_{\min}|}$$

Se inoltre A è hermetiana/simmetrica e definita positiva

$$\|A\|_2 = \lambda_{\max} \quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{\min}}$$

La matrice A è tanto meglio condizionata quanto più vicini sono tra loro i suoi autovalori.



Matrice di Hilbert

$$a_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1} \quad i,j=1,2,\dots,n$$

Esempio n=5

$$A^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$[A^{(5)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}.$$

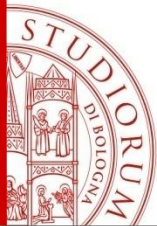
Matrice di Hilbert

$$\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \approx e^{3.5n}$$

n	$\mu_2(A^{(n)})$	$\mu_\infty(A^{(n)})$
2	1.505	27
3	$5.241 \cdot 10^2$	$7.480 \cdot 10^2$
4	$1.551 \cdot 10^4$	$2.837 \cdot 10^4$
5	$4.766 \cdot 10^5$	$9.436 \cdot 10^5$
6	$1.495 \cdot 10^7$	$2.907 \cdot 10^7$
7	$4.754 \cdot 10^8$	$9.852 \cdot 10^8$
8	$1.526 \cdot 10^{10}$	$3.387 \cdot 10^{10}$
9	$4.932 \cdot 10^{11}$	$1.099 \cdot 10^{12}$
10	$1.603 \cdot 10^{13}$	$3.535 \cdot 10^{13}$

Norma 2

Norma infinito



Sistemi mal condizionati: esempio

esatto
$$\begin{cases} 1.000x + 2.000y = 3.000 \\ 0.499x + 1.001y = 1.5 \end{cases} \quad x = 1; y = 1$$

Perturbiamo sulla terza e quarta cifra decimale i coefficienti:

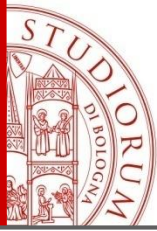
perturbato
$$\begin{cases} 1.000x + 2.000y = 3.000 \\ 0.500x + 1.002y = 1.5 \end{cases} \quad x = 3; y = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 \\ 0.499 & 1.001 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K(A) = 2083$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 \\ 0.500 & 1.002 \end{bmatrix} \quad xx = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K(AA) = 3127$$

$$\frac{\|AA - A\|}{\|A\|} \approx 5.7e-4 \quad \frac{\|xx - x\|}{\|x\|} \approx 1.58$$

le perturbazioni che si hanno sulla matrice (o sul termine noto) si ripercuotono sulla soluzione del sistema, indipendentemente da come questa soluzione si ottiene.



Sistemi ben condizionati: esempio

esatto
$$\begin{cases} 2.000x - 1.000y = -1.000 \\ -1.000x + 2.000y = 5.000 \end{cases} \quad x = 1; y = 3$$

Perturbiamo sulla terza e quarta cifra decimale i coefficienti:

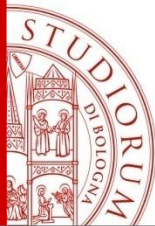
perturbato
$$\begin{cases} 2.000x - 1.000y = -1.000 \\ -1.001x + 2.001y = 5.000 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= 0.9993; \\ y &= 2.9987 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.000 & -1.000 \\ -1.000 & 2.000 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad K(A) = 3$$

$$AA = \begin{bmatrix} 2.000 & -1.000 \\ -1.001 & 2.001 \end{bmatrix} \quad xx = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad K(AA) = 3.001$$

$$\frac{\|AA - A\|}{\|A\|} \approx 4.7e-4 \quad \frac{\|xx - x\|}{\|x\|} \approx 4.7e-4$$

In questo caso la
perturbazione sui dati è
accettabile



Esempio

DATI forniti da:

US Air Force Phillips Laboratory

Immagine originale: 256x256pixel

Vettore $\underline{x}$ 65536 = 256²

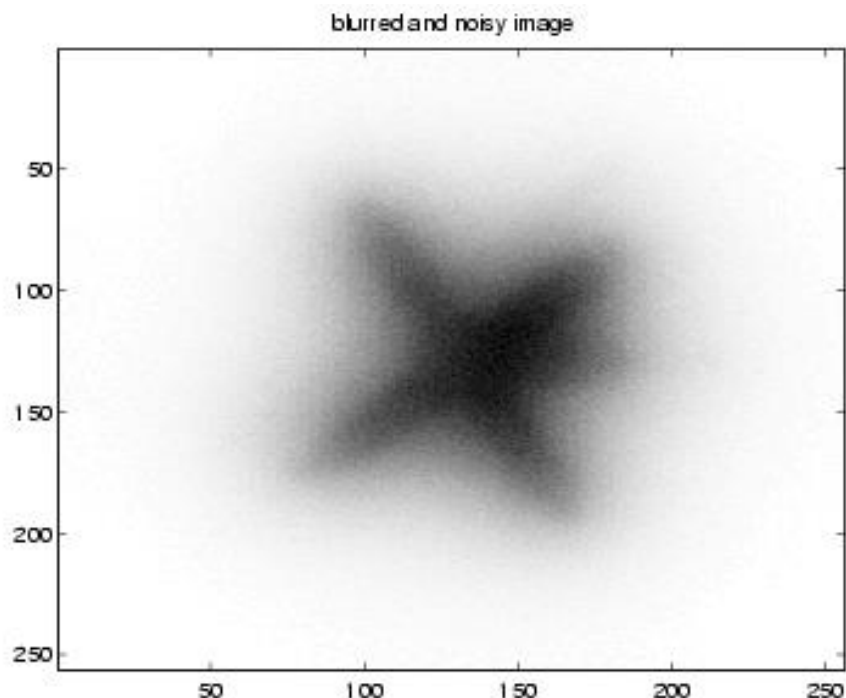
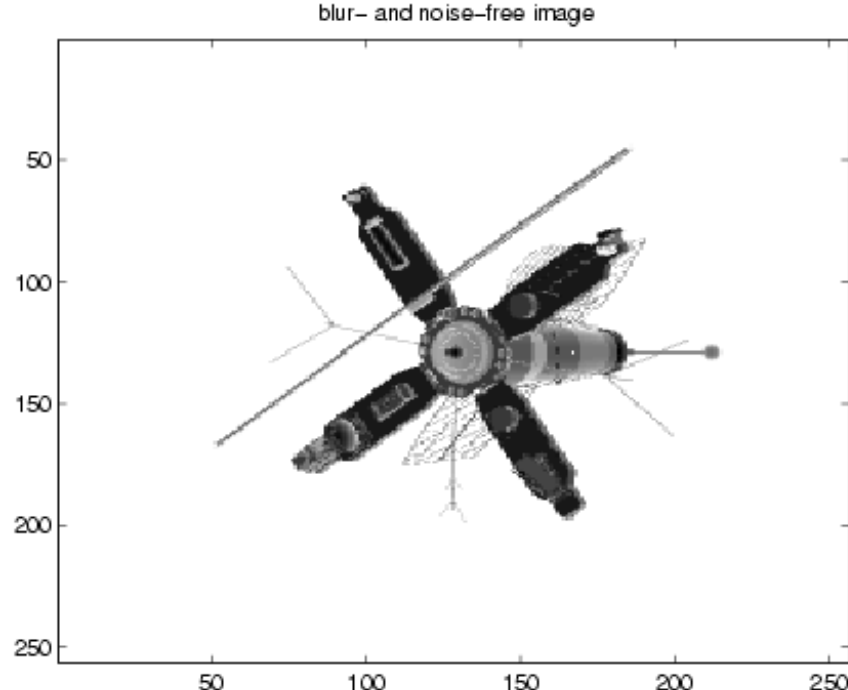
A operatore di sfuocamento
65536 x 65536;

Immagine perturbata b

$$\mathbf{Ax}=\underline{\mathbf{b}} \quad \mathbf{b}=\underline{\mathbf{b}}+\mathbf{err}$$

Determinare un'approssimazione
dell'immagine $\underline{x}$, risolvendo:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$



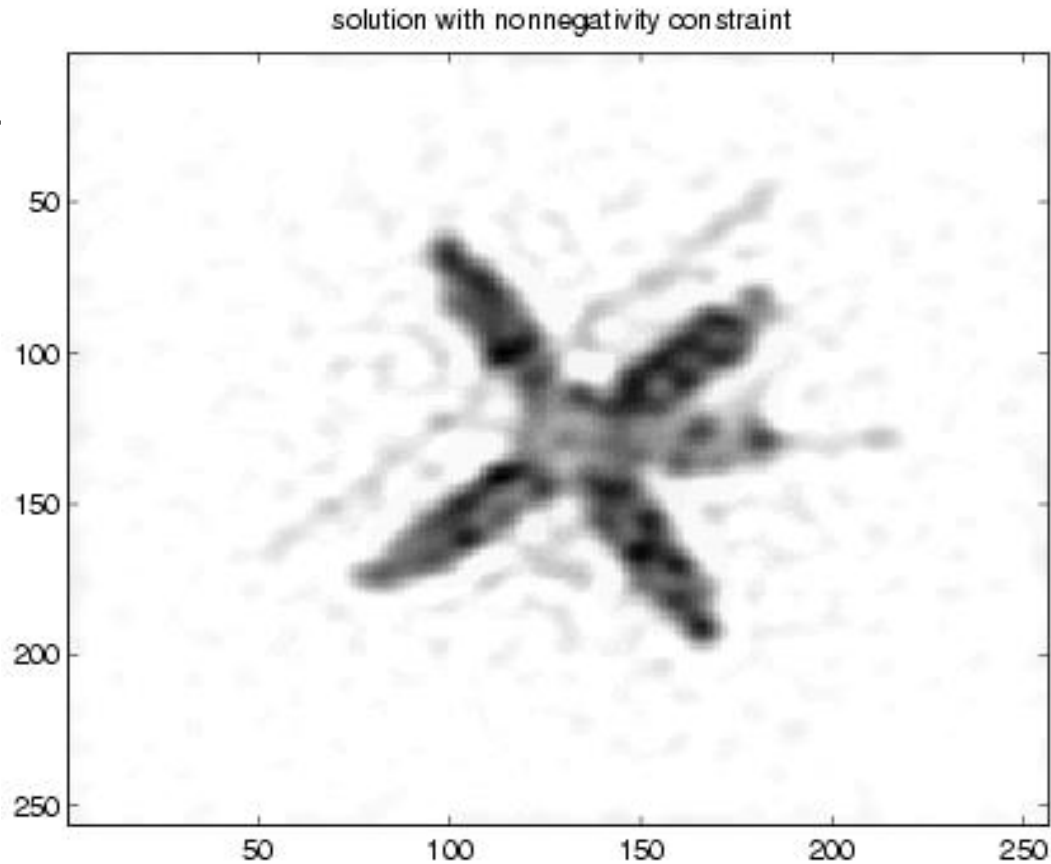
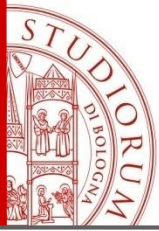


Immagine ricostruita come soluzione del sistema

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

Vettore x $65536 = 256^2$



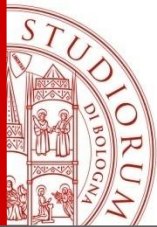
Metodi Numerici per risolvere sistemi lineari $m=n$

METODI DIRETTI

L'esatta soluzione viene costruita, in assenza di errori di arrotondamento nei dati e nei calcoli, in un numero finito di passi. Essi sono adatti per la soluzione di sistemi con matrice dei coefficienti densa e di moderate dimensioni.

METODI ITERATIVI

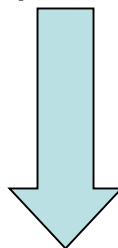
Questi metodi generano una successione di soluzioni, che, sotto opportune ipotesi, convergono alla soluzione del sistema. La matrice dei coefficienti non viene modificata durante il calcolo e quindi è più agevole sfruttarne la sparsità. Sono adatti, quindi, per la soluzione di sistemi con matrice dei coefficienti di grandi dimensioni e sparsa.



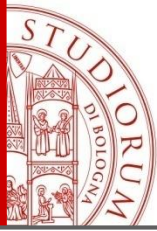
Metodo di eliminazione di Gauss

$$Ax=b$$

Se fosse possibile decomporre $A=LU$, A non singolare
 L triangolare inferiore, U triangolare superiore



$$L\underbrace{Ux}_y = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$



Sistema triangolare inferiore

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \dots + a_{ii}x_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n \end{array} \right. = \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_3 \\ \\ b_n \end{array}$$

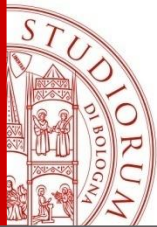
Metodo di sostituzione in avanti (forward substitution)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_k = (b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j) / a_{kk} \quad k = 2, \dots, n \end{array} \right.$$

Costo computazionale

$$\sum_{i=1}^n i \approx \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

$$a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$$



Sistema triangolare superiore

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

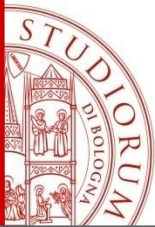
Metodo di sostituzione all'indietro (backward substitution)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j) / a_{kk} \quad k = n-1, \dots, 1 \end{array} \right.$$

Costo computazionale

$$\sum_{i=1}^n i \approx \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

$$a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$$



Esempio 1:

data A trovare L e U tale che $A=LU$

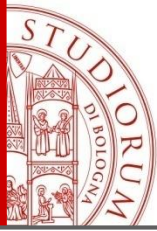
$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

STEP 1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = L_1 A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

STEP 2

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = L_2 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$



Esempio 2:

data A trovare L e U tale che $A=LU$

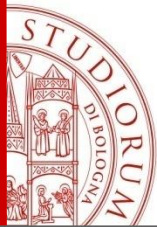
$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

STEP 1

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = L_1 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

STEP 2

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = L_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Fattorizzazione LU

$$A_3 = L_2 A_2$$

$$A_3 = L_2 L_1 A_1$$

$$A_3 = L_2 L_1 A$$

1. A_3 triangolare superiore con elementi diag. non zero
2. L_i triangolare inferiore è non sing. $\longleftrightarrow$ Elem. Diag non zero
3. L_i^{-1} è triangolare inferiore

$$A = [L_1]^{-1} [L_2]^{-1} A_3$$

$$A = \underbrace{[L_2 L_1]^{-1}}_L A_3 = LU$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

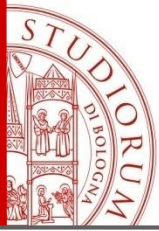
$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fattorizzazione LU

$$A=LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & . & . \\ m_{31} & m_{32} & 1 & . & . \\ .. & . & . & . & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & . & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & .. & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & .. & a_{3n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Gli elementi di A_n sulla diagonale principale si chiamano **PERNI** e devono essere diversi da zero affinché si abbia fattorizzazione LU

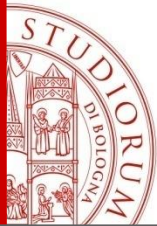


Esempio 1

$$b_1 = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = b_2$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = b_3 = y$$



Esempio 2

$$b_1 = b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = b_2$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix} = b_3 = y$$

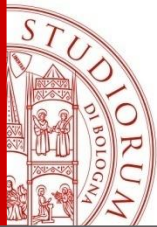
$$b_3 = L_2 b_2$$

$$b_3 = L_2 L_1 b_1$$

$$b_3 = L_2 L_1 b$$

$$b = [L_1]^{-1} [L_2]^{-1} b_3$$

$$b = \underbrace{[L_2 L_1]^{-1}}_L b_3 = Ly$$



Fattorizzazione di Gauss

STEP 1

$$L_1 \left[A \mid b \right]$$

y si ottiene applicando successivamente le trasformazioni elementari di Gauss L_i al vettore b , così come U si ottiene applicando successivamente tali trasformazioni alla matrice A .

STEP 2 $L_2 L_1 \left[A \mid b \right]$

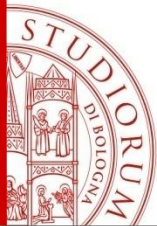
..... Dopo $n-1$ passi

$$L_{n-1} L_{n-2} \dots L_2 L_1 \left[A \mid b \right] = \left[A_n \mid b_n \right] = \left[U \mid y \right]$$

$$\left[A \mid b \right] = \left[L_1 \right]^{-1} \left[L_2 \right]^{-1} \left[L_3 \right]^{-1} \dots \left[L_{n-1} \right]^{-1} \left[A_n \mid b_n \right]$$

$$\left[A \mid b \right] = \underbrace{\left[L_{n-1} L_{n-2} L_{n-3} \dots L_1 \right]^{-1}}_L \underbrace{\left[A_n \mid b_n \right]}_{\begin{matrix} U & y \end{matrix}} = L \left[U \mid y \right]$$

Alla fine non solo abbiamo ottenuto la fattorizzazione $A=LU$ della matrice ma abbiamo anche risolto il sistema $Ly=b$



Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di Gauss consiste

- nella fattorizzazione LU della matrice $[A|b]$ (che risolve anche $Ly=b$) e
- nella risoluzione con sostituzione all'indietro del sistema triangolare:

$$U x = y$$

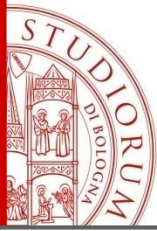
$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = -1$$

$$x_1 = 2$$



Metodo di Eliminazione di Gauss

Data una matrice A tale che $\det(A_k) \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$ e quindi in particolare non singolare, ed un vettore $a_{i,n+1}, i=1, \dots, n$, (colonna dei termini noti), si ha:

For $k=1, \dots, n-1$

For $i=k+1, \dots, n$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

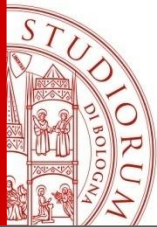
For $j=k+1, \dots, n+1$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

end j

end i

end k



Costo computazionale

Fattorizzazione

Divisioni per ottenere L: $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

Moltiplicazioni per ottenere U :

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + (n-(n-1))^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

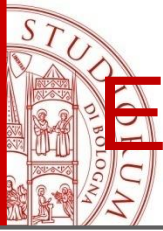
Totale:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \approx \frac{1}{3}n^3$$

Risoluzione del sistema lineare triangolare $\frac{1}{2}n^2$

Perciò in totale la risoluzione del sistema lineare costa

$$O\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right)$$



ESISTENZA della Fattorizzazione LU

SE $\det(A) \neq 0$ ESISTE SEMPRE UNA FATTORIZZAZIONE $A=LU$???

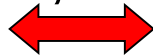
ESEMPIO:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma non esistono matrici L, U tali che $A=LU$

Condizione per avere una fattorizzazione LU di A :

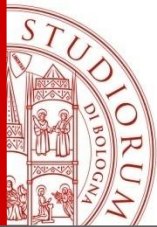
I PERNI $a_{kk}^{(k)}$, $k=1, \dots, n$, sono tutti diversi da zero



I minori principali di ordine k , $k=1, 2, \dots, n$, sono diversi da zero



Allora esiste una ed una sola fattorizzazione LU di A



Strategia del perno nullo

Un sistema lineare normale $Ax=b$ con A non singolare
ammette sempre soluzione

Come garantire che la fattorizzazione di Gauss non fallisca per
una A generica con la sola condizione di essere non singolare?

Esempio

$$\begin{cases} 3y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -3$$

equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3y = 5 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad a_{11} \neq 0 \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Pivoting

Soluzione

Scambiare di posto 2 equazioni

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} \\ a_{k+1,k}^{(k)} \\ a_{k+2,k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(k)} \end{bmatrix}$$

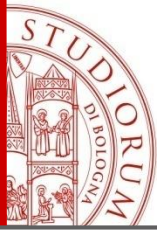


$= 0$



Se non esistesse un $a_{ik}^{(k)} \neq 0 \quad i = k+1, k+2, \dots, n$

allora A sarebbe singolare



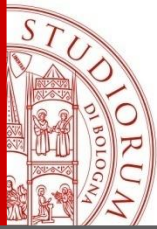
Pivoting – Strategia per avere un algoritmo stabile

Pivoting parziale (scambio righe)

Scegliere r uguale al più piccolo intero $\geq k$ tale che

$$\left| a_{rk}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|$$

e, se $r \neq k$, scambiare l'equazione k -esima
con la r -esima



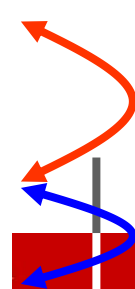
Matrici di Permutazione

- Differiscono dalla matrice Identità per lo scambio di righe
- Premoltiplicazione $\Rightarrow$ scambio di righe,
Postmoltiplicazione $\Rightarrow$ scambio di colonne

Esempio: P_1 scambia riga 1 e 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$


- Permutazioni multiple P

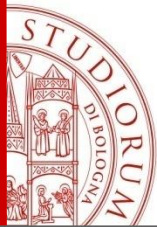
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$


Teorema

Sia $A(n \times n)$ non singolare, allora esiste una matrice di permutazione $P(n \times n)$ non singolare per cui $PA=LU$

Infatti:

Se A è non singolare, allora esiste per ogni ordine almeno una sottomatrice non singolare, quindi applicando su A opportuni scambi di righe e/o colonne si può fare in modo che A abbia le sottomatrici principali non singolari.



Metodo di Gauss con Pivoting

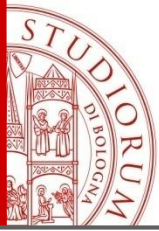
$$Ax = b$$

Pre-moltiplichiamo a dx e sx per la matrice P:

$$PAx = Pb \quad (PA = LU)$$

$$LUx = Pb$$

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

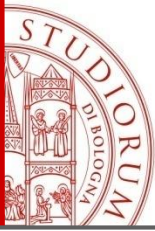


Esempio: metodo di Gauss con Pivoting

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, a_{11} = 4, P_1 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = L_1 P_1 A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}, a_{22}^{(2)} = 1, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0/1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = L_2 P_2 A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$



Esempio: metodo di Gauss con Pivoting

$$U = A_3 = L_2 P_2 A_2 = \underbrace{L_2 P_2 L_1 P_1}_{\text{in generale non triang.inf.}} A_1 =$$

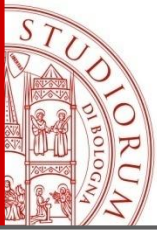
considerato che $P_{i+1,kr} L_i P_{i+1,kr}^{-1} = P_{i+1,kr} L_i P_{i+1,kr}^T = P_{i+1,kr} L_i P_{i+1,kr} = \bar{L}_i$

$\bar{L}_i$ è triang. inf. ma ha scambiate le righe k ed r e le colonne k ed r di L_i

$$U = L_2 \boxed{P_2 L_1 P_2^{-1}} P_2 P_1 A_1$$

$$U = L_2 \bar{L}_1 P_2 P_1 A \Rightarrow L = (L_2 \bar{L}_1)^{-1}, P = P_2 P_1 \quad LU = PA$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = PA \quad P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



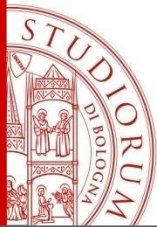
Esempio: metodo di Gauss con Pivoting

$$b_1 = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = L_1 P_1 b_1$$

$$b_3 = L_2 P_2 b_2 = y = \begin{bmatrix} 2 \\ 7/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Risolvere infine $Ux=y$



Calcolo matrice inversa

Il problema di determinare l'inversa A^{-1} di una matrice A quadrata $n \times n$ non singolare si riconduce al problema di risolvere n sistemi normali.

$$A \cdot A^{-1} = I$$

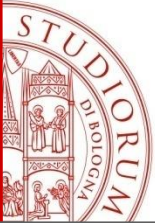
$$A^{-1} = (x_1, x_2, \dots, x_n), I = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$e_j = [0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0]^T$$

Risolvere: $Ax_j = e_j, \quad j = 1, \dots, n$

La matrice A è la medesima: fattorizzare $A=LU$ una sola volta

Costo n^3



Calcolo del determinante

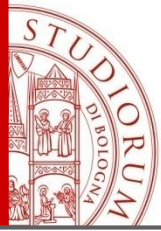
$$\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (-1)^s & 1 & \prod_{i=1}^n u_{ii} \end{array}$$

$$\det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

s numero complessivo di scambi effettuati

Il rango è dato invece dal numero r degli elementi non nulli sulla diagonale di U



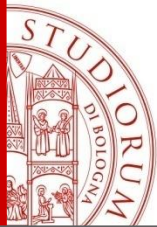
Fattorizzazione di Cholesky per sistemi lineari $Ax=b$

Teorema: Se A è una matrice **simmetrica definita positiva** allora esiste ed è unica una matrice R triangolare superiore, con elementi positivi sulla diagonale principale tale che:

$$A = R^T R$$

Calcolo della soluzione del sistema lineare $Ax=b$:

$$R^T R x = b \quad \Leftrightarrow \begin{cases} R^T w = b \\ R x = w \end{cases}$$



Fattorizzazioni di matrici

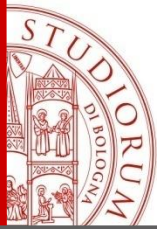
1. Fattorizzazione **LU** (algoritmo di **Gauss**)
2. Fattorizzazione **$R^T R$** (algoritmo di **Cholesky**)
3. Fattorizzazione **QR** (algoritmo **Householder**)

L = matrice triangolare inferiore

U = matrice triangolare superiore

R = matrice triangolare superiore

Q = matrice ortogonale (**$Q Q^T = I$**)



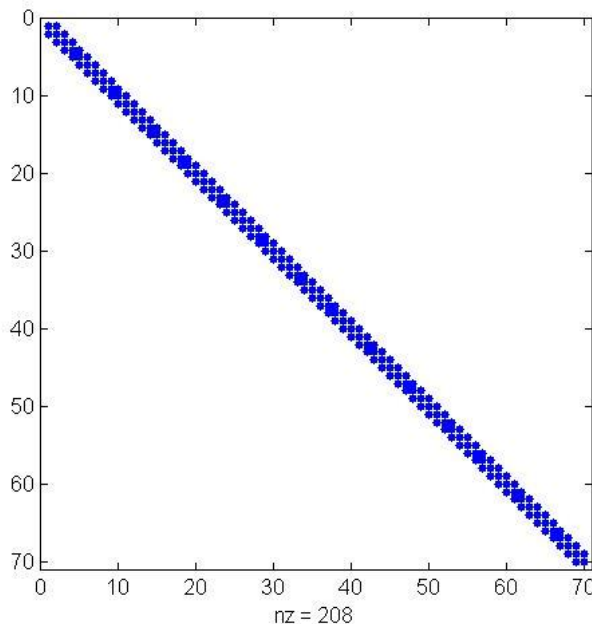
Matrici sparse

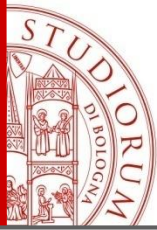
Una matrice è ritenuta **sparsa** quando il numero degli elementi che possono essere diversi dallo zero è di ordine $O(n)$

Esempio:

matrice tridiagonale

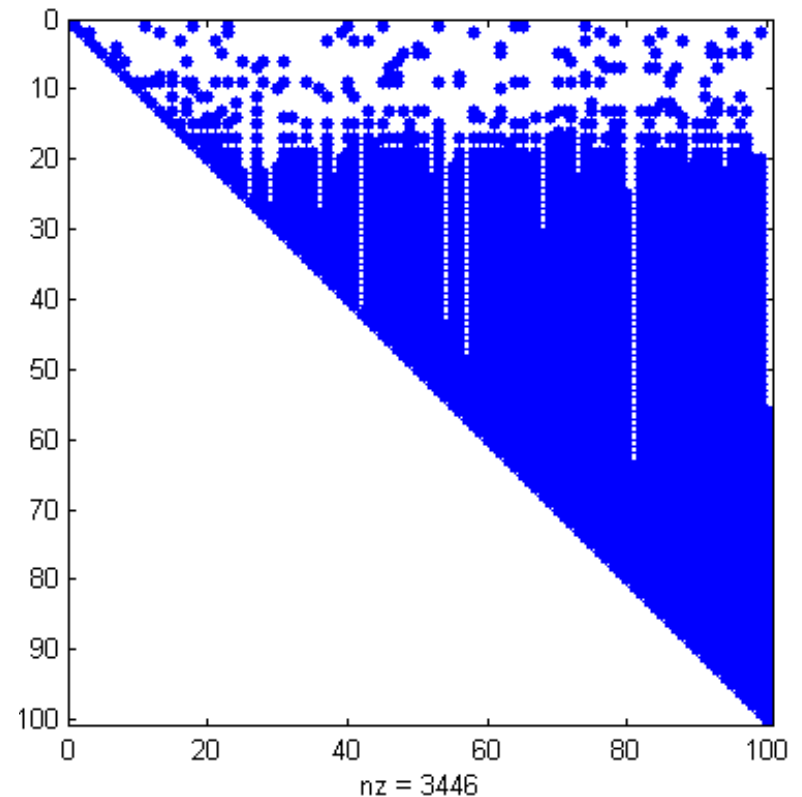
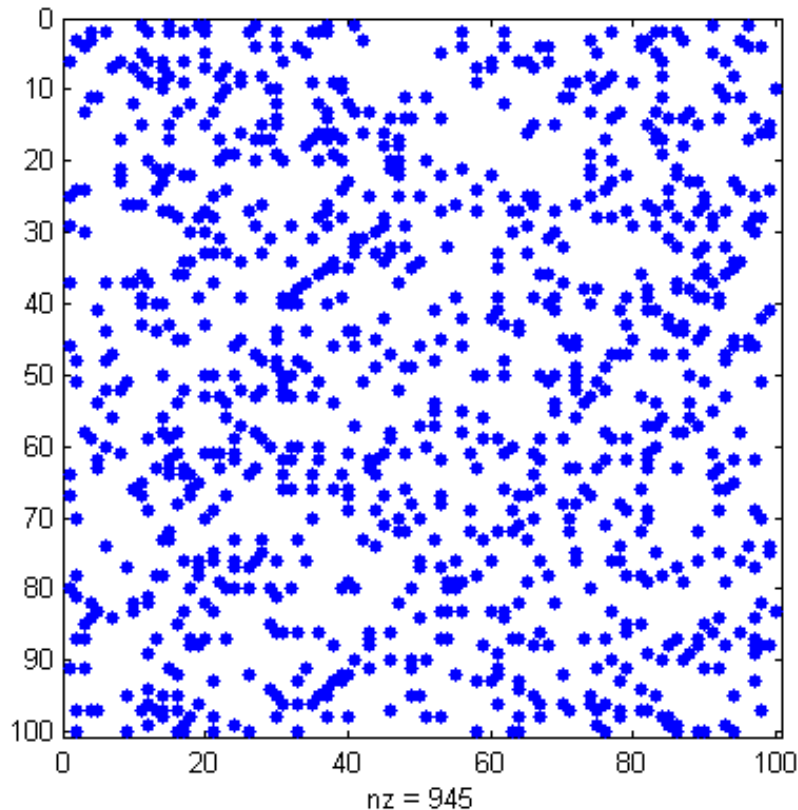
```
>>A=diag([1:70])+diag([1:69],-1)+diag([1:69],1);  
>>spy(A)
```

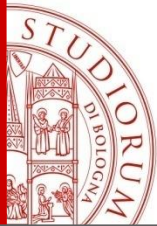




Matrici sparse, effetto fill-in

```
>> A=sprand(100,100,0.1)  
>> [L,U,P]=lu(A);  
>> spy(A);  
>> spy(U);
```





Un caso speciale dell'algoritmo di Gauss per matrici tridiagonali: Algoritmo di Thomas

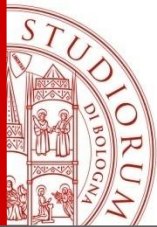
Sia A una matrice di ordine n tridiagonale non singolare

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i & a_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Esiste un metodo diretto molto efficiente per la risoluzione del sistema lineare

$$Ax=d,$$

che è un caso speciale dell'algoritmo di Gauss e si chiama algoritmo di Thomas.



Algoritmo di Thomas

A si fattorizza mediante l'algoritmo di Gauss in L (bidiagonale inferiore) ed U (bidiagonale superiore)

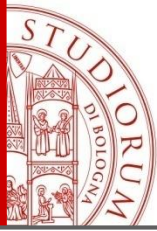
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i & a_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 := a_1$$

$$\beta_i := b_i / \alpha_{i-1} \quad i = 2, \dots, n$$

$$\alpha_i := a_i - \beta_i c_{i-1}$$

Complessità computazionale n-1 divisioni, n-1 moltiplicazioni e n-1 somme quindi lineare: $O(n)$



Algoritmo di Thomas

$$Ax = d$$

Parte I: Fattorizzare $A=LU$ e risolvere $Ly=d$

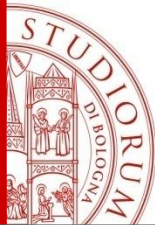
$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= a_1 \\ \beta_i &:= b_i / \alpha_{i-1} \quad i = 2, \dots, n \\ \alpha_i &:= a_i - \beta_i c_{i-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &:= d_1 \\ y_i &:= d_i - \beta_i y_{i-1} \quad i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

Parte II: Back substitution $Ux=y$

$$\begin{aligned}x_n &= y_n / \alpha_n \\ x_i &= (y_i - c_i \cdot x_{i+1}) / \alpha_i \quad i = n-1, \dots, 1\end{aligned}$$

Ciascuno di questi algoritmi ha complessità dell'ordine $O(n)$



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>