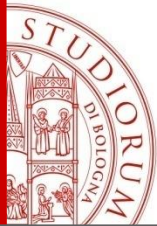
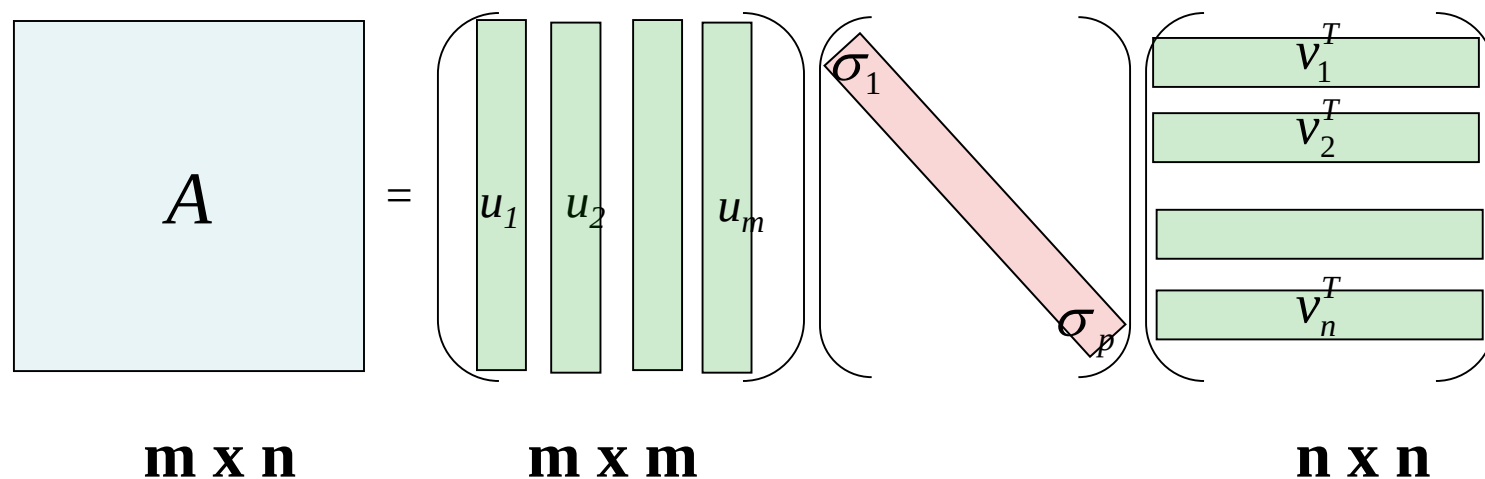


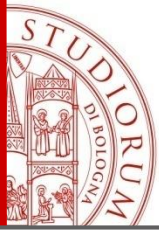
Decomposizione in valori singolari



Decomposizione in valori singolari

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$





Decomposizione in valori singolari (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition)

Teorema

Data una matrice $A \in R^{m \times n}$ esistono due matrici ortogonali

$$U \in R^{m \times m} \quad V \in R^{n \times n}$$

tali che

$$A = U \Sigma V^T, \quad (\text{quindi } \Sigma = U^T A V)$$

dove la matrice

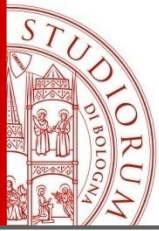
$$\Sigma \in R^{m \times n}$$

è diagonale con

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \sigma_m & 0 \end{bmatrix}$$

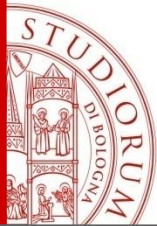
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0, \quad r = \text{rango}(A) \leq p = \min(m, n)$$

chiamati **VALORI SINGOLARI** di A



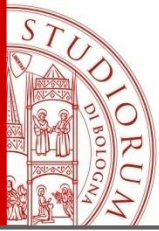
Decomposizione in valori singolari (SVD)

- σ_i^2 sono gli autovalori di $A^T A$ e $A A^T$
- $U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in R^{m \times m}$, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in R^{n \times n}$
Le colonne di U (di V) rappresentano gli
AUTOVETTORI di $A A^T$ (di $A^T A$)
- I vettori u_i, v_i sono definiti rispettivamente **VETTORI SINGOLARI SINISTRI E DESTRI**
- Se A è **hermetiana def. pos.** I valori singolari sono anche gli autovalori di A e gli autovettori sono le colonne di V .



Valori singolari

- σ_i sono sempre reali e ≥ 0 ;
- σ_1 è il massimo valore singolare, anche indicato con $\sigma_{\max}$, e $\sigma_i > 0$ più piccolo è detto $\sigma_{\min}$.
- Sia A rettangolare (m,n) Allora $K(A) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ ci fornisce l'indice di condizionamento di A ;
 σ_i^2
- Il numero di valori singolari non nulli (cioè l'indice di $\sigma_{\min}$) rappresenta il rango della matrice A ;



Valori singolari

σ_i^2 sono gli autovalori di $A^T A$

$$\text{Ovvero } \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad i = 1, \dots, n$$

Infatti $A = U \Sigma V^T$,

e $A^T = V \Sigma^T U^T$

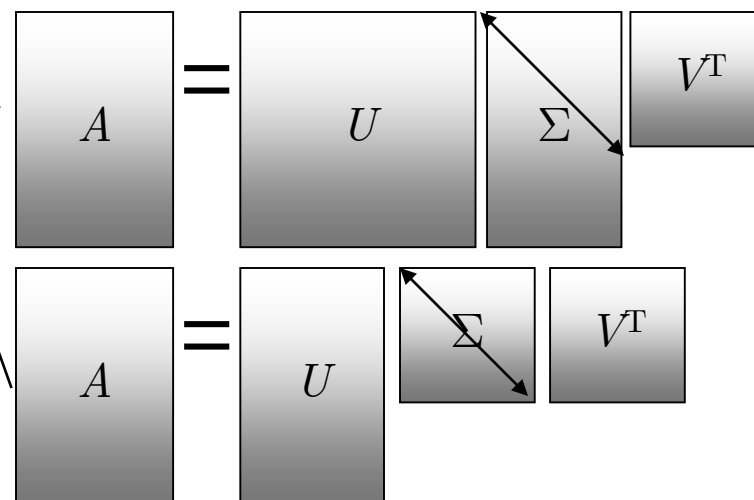
$$A^T A = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} V^T$$

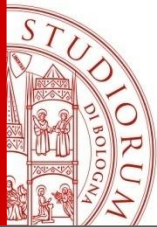
- $A^T A$ è ortogonalmente simile alla matrice diagonale Σ^2 che quindi contiene i suoi autovalori.

SVD-economy

$$A_{m,n} = U_{m,m} \Sigma_{m,n} V_{n,n}^T$$

$$A_{m,n} = U_{m,n} \Sigma_{n,n} V_{n,n}^T$$





Approssimazione di A lower-rank

Utilizzando i valori singolari e i corrispondenti vettori singolari si può ottenere la decomposizione spettrale di A nella forma

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_p u_p v_p^T$$

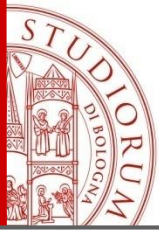
$$p = \min(m, n)$$

dove u_i e v_i sono le colonne delle due matrici U e V

$$A = E_1 + E_2 + \dots + E_p$$

$$E_i = \sigma_i u_i v_i^T \quad \text{matrice a rango 1} \quad \|E_i\| = \sigma_i$$

Questa decomposizione è particolarmente importante per quei problemi in cui è necessario ottenere un' approssimazione di A mediante una matrice A_r che abbia rango $r < \text{rango di A}$.



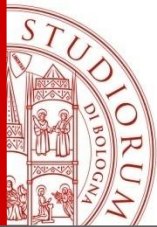
Approssimazione di A lower-rank

Approssimare A con somma di matrici più semplici

$$A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

allora r è il **rango** di A e

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0, \quad r < n$$



Approssimazione di A lower-rank

TEOREMA

Sia data la SVD di una matrice A, supponiamo che il rango di A sia p.

Se, fissato un intero positivo r, $r < p$, definiamo

$$A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

A_r è un'approssimazione di A di rango r.

Errore che si commette nel considerare A_r anziché A:

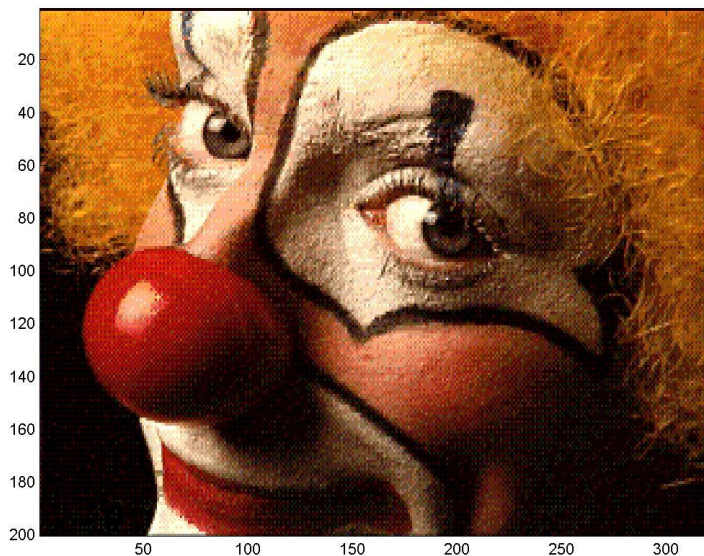
$$\min_{B \in \beta} \|A - B\|_2 = \|A - A_r\|_2 = \sigma_{r+1}$$

$$\beta = \{B \in R^{m \times n} : \text{rango}(B) = r\}$$

Il più piccolo valore singolare non nullo di A è la distanza di A dall'insieme di tutte le matrici a rango deficiente.

σ_i in ordine decrescente -> approx. migliora per r che aumenta

SVD: esempio compressione



(a)



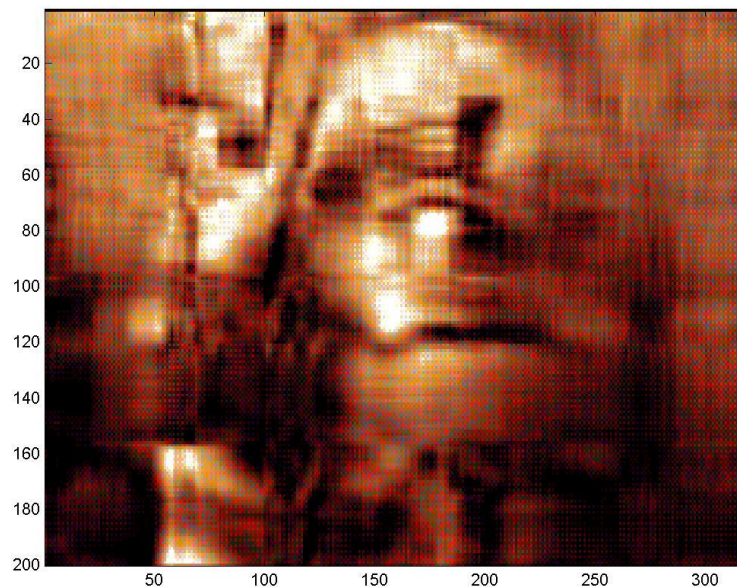
(b)

Numero diadi

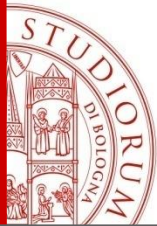
(a) 200

(b) 100

(c) 10



(c)



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

<http://www.dm.unibo.it/~morigi>