Algebra Lineare Numerica: Vettori, Matrici Norme

Vettori

Gli elementi di uno spazio vettoriale reale a dimensioni finite sono vettori ad *n* componenti reali:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad con \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \text{vettore colonna}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix} \text{ vettore riga}$$

$\mathbb{R}^n$ è un esempio di Spazio Vettoriale

Operazioni in R^n

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

$$\lambda\ x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ .. \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Somma tra vettori

Somma tra due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix}^T \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & .. & y_n \end{bmatrix}^T$$

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & .. & x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Algoritmo

```
for i = 1:n
        z(i)=x(i)+y(i);
end
```

Proprietà

1. L'addizione tra vettori è commutativa ed associativa

2. L'elemento 0 ϵ R^n , vettore che ha tutte componenti nulle, detto vettore zero o vettore nullo è tale che

v + *0* = *v* *per ogni* v ϵ R^n

3. 0·*v=0, 1·v=v ,*

con 0 ed 1 rispettivamente lo zero e l'unità di *R*

4. Per ogni v ϵ R^n esiste il suo opposto -v ϵ R^n tale che

v + (-v) = 0

5. proprietà distributive:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

6. proprietà associativa:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha\beta(x) = \alpha(\beta x)$$

Lineare indipendenza

- Un insieme di vettori $v_1,...,v_k$ si dice linearmente indipendente se una loro combinazione lineare

  $c_1v_1+...+c_kv_k = 0$ implica $c_1=...=c_k=0$

  nessuno di loro può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(u,v)=(0,0), le colonne sono lin. indip.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = -2x_1 + x_2$$

Generazione di uno spazio vettoriale

- Se tutti I vettori di uno spazio vettoriale possono essere espressi come combinazione lineare di un insieme di vettori $v_1,\ldots,v_k$, allora $v_1,\ldots,v_k$ generano lo spazio.
- Una base è il massimo insieme di vettori linearmente indipendenti e il minimo insieme di vettori generatori di uno spazio vettoriale.
- La cardinalita' di questo insieme è la dimensione dello spazio vettoriale.

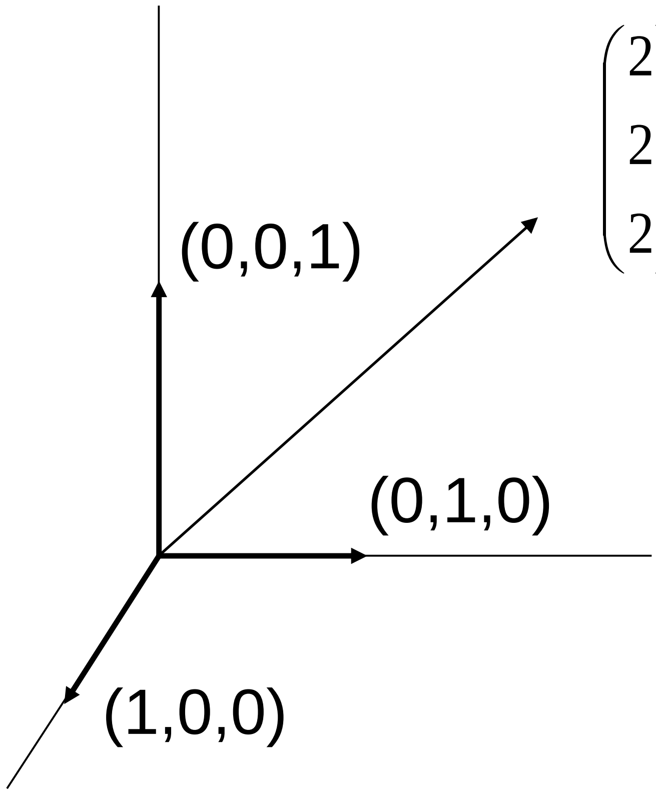
Un esempio di base di R^n

è la base canonica.

Essa è formata dai vettori:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \qquad i = 1,..,n$$

Spazio vettoriale R^3



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prodotto Scalare <x,y>

- Siano x,y in R^n

$$p = x^T \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Algoritmo

```
p=0;
for i = 1:n
        p=p+x(i)*y(i);
end
```

```
pdot =dot(x,y);
```

Prodotto Scalare

Funzione $\langle \cdot,\cdot \rangle : R^n \times R^n \to R$

che verifica le seguenti proprieta':

1. $\langle x,x \rangle \geq 0, \qquad \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in R^n$
2. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \qquad \forall x,y \in R^n$
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$

$$\forall x,y,z \in R^n \qquad \forall \alpha,\beta \in R$$

Esempi

$$\boxed{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{x} x_i y_i \qquad \textbf{in} \qquad \Re^n}$$

$$\boxed{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad \textbf{in} \qquad C^n}$$

Vettori ortogonali

- Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali rispetto al prodotto scalare introdotto se

$$x \cdot y = 0$$

Esempio:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^T \cdot y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 + 0 - 3 + 0 = 0$$

Norme vettoriali

La norma è una generalizzazione della lunghezza di un vettore x ∈ R^n, data dall'espressione

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2}$$

Si chiama norma vettoriale una funzione

$$\|\bullet\| : C^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

che ad ogni x ∈ R^n associa un numero reale, che verifica le seguenti proprietà

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq \boldsymbol{0}, \qquad \|\boldsymbol{x}\| = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$
2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\| \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \qquad \forall \alpha \in \boldsymbol{C}$
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n$ **(disuguaglianza triangolare)**

Una seminorma è una norma per la quale non vale la condizione $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Norme vettoriali – NORMA 2

Norma 2 o norma Euclidea

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

Esempio n=4

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{14}$$

Norme vettoriali – NORMA 1

$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

Esempio n=4

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{1}} = \mathbf{6}$$

Norme vettoriali – NORMA INFINITO

Norma infinito o norma **Chebyshev**

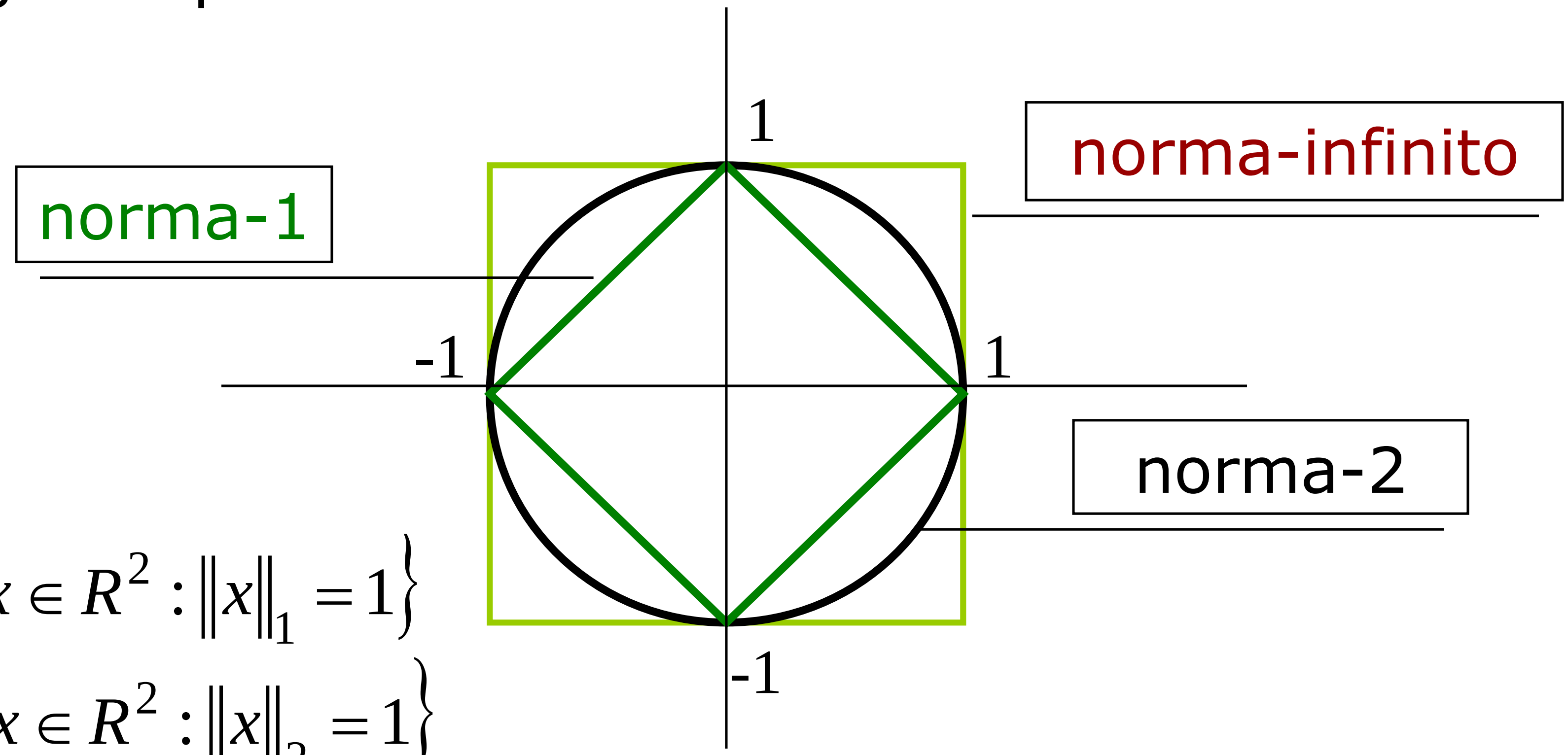
$$\boxed{\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|}$$

Esempio n=4

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 3$$

Circonferenze in norma p (in R^2)

Luogo dei punti che sono a **distanza** 1 dal centro



$$C_1 = \{x \in R^2 : \|x\|_1 = 1\}$$

$$C_2 = \{x \in R^2 : \|x\|_2 = 1\}$$

$$C_\infty = \{x \in R^2 : \|x\|_\infty = 1\}$$

Norme vettoriali

Teorema. Siano $\|\cdot\|^{'}, \|\cdot\|^{''}$

due norme vettoriali. Allora le due norme sono equivalenti, nel senso che esistono due costanti

$\alpha, \beta \in \Re, \quad 0 < \alpha \le \beta$ tali che per ogni $x \in C^n$

$$\boxed{\alpha \|x\|^{''} \le \|x\|^{'} \le \beta \|x\|^{''}}$$

$$\boxed{\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty}$$

$$\boxed{\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2}$$

$$\boxed{\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty}$$

Matrici

Siano **m** ed **n** due interi positivi. Si definisce matrice (*m*x*n*) una tabella di *m* righe e *n* colonne di elementi reali o complessi del tipo:

Diagonale secondaria

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{3n} \\ . & . & . & \ddots & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & .. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & .. & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & .. & a_{m3} \\ . & . & . & \ddots & . \\ a_{1n} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Diagonale principale

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dimensione mxn

Matrici

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & .. & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & .. & u_{2n} \\ 0 & . & u_{33} & .. & u_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice triangolare superiore (Upper)

$a_{ij}=0$ se $i>j$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & . & . & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice triangolare inferiore (Lower)

$a_{ij}=0$ se $i<j$

Matrici Diagonali

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & . & d_3 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale

$$D = diag(d_1, d_2, .., d_n)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & . & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice identità

Operazioni fra Matrici

Somma di matrici (stesse dimensioni) $A,B \in R^{m \times n}$

$C \in R^{m \times n}$ tale che $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $i=1,..,m$ $j=1,..,n$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 2\\ 7 & 8 & 9 & 3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 7 & 7\\ 1 & 1 & 1 & 5\\ 7 & 3 & 5 & 2\end{bmatrix} \quad C=A+B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 10 & 8\\ 5 & 6 & 7 & 7\\ 14 & 11 & 14 & 5\end{bmatrix}$$

Associativa, commutativa

Moltiplicazione per scalare s

$a_{ij}= sa_{ij}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 7\\ 1 & 1 & 1\\ 7 & 3 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow 5A=\begin{bmatrix}0 & 10 & 35\\ 5 & 5 & 5\\ 35 & 15 & 25\end{bmatrix}$$

Prodotto tra Matrici

Data una matrice A (mxn) e una matrice B (nxp)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{3n} \\ . & . & . & \ddots & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & .. & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} & .. & b_{2p} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} & .. & b_{3p} \\ . & . & . & \ddots & . \\ b_{n1} & . & . & . & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$C = AxB, \quad mxp \quad dove \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1,..,m \quad j = 1,..,p$$

Prodotto tra matrici

- Regola del prodotto:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ \text{riga i} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{colonna j} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ & & & \cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & & b_{np} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ & & c_{ij} & \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Prodotto tra matrici: esempio

$$\underset{3x2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2x4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{3x4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 12 & 3 \end{bmatrix}}$$

Proprietà:

Associativa (A*B)*C=A*(B*C)

Distributiva (sin. e des.) A*(B+C)=A*B+A*C

No commutativa A*B ≠ B*A

Se (A nxn) l'elemento neutro è la matrice identità A*I = I*A = A

Prodotto tra matrici

$$A=\{a_{ij}\} \quad (m\times n), B=\{b_{ij}\} \quad (n\times p), C=A\cdot B=\{c_{ij}\} \quad (m\times p)$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} i=1,..,m \\ j=1,..,p \end{array}$$

Algoritmo 1

(uso del prodotto scalare *)

```
for i = 1:m
    for j = 1:p
C(i,j)=A(i,:)*B(:,j);
end
```

Algoritmo 2

```
for i = 1:m
    for j = 1:p
        for k = 1:n
 C(i,j)=C(i,j)+A(i,k)*B(k,j);
end
```

Complessità computazionale:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} 2 = 2mpn \quad (per \quad m=n=p \quad la\ complessità\ è\ 2n^3)$$

Prodotto Esterno

- Siano x,y in R^n

$$p = x \cdot y^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & .. & y_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

Il prodotto dà come risultato una matrice *nxn,* che prende il nome di *matrice diade.*

Prodotto matrice vettore

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad .. \quad a_{3n}} \\ . & . & . & \ddots & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

$$A \in \mathbb{R}^{mxn}, x \in \mathbb{R}^n, \quad vettore \quad y = Ax, \, y \in \mathbb{R}^m$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad i = 1,..,m$$

Complessità computazionale: $per \quad m = n \quad è \quad n^2$

Trasposta di una matrice

A^T matrice trasposta di $A=(a_{ij})$ di elementi coniugati

$$a_{ij}^T=a_{ji}$$

matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A

Proprietà:

$$(A^T)^T = A$$

$$(AxB)^T = B^T x A^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrici simmetriche/ antisimmetriche

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrici simmetriche

$A = A^T$

Matrici anti-simmetriche

$A = -A^T$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice Inversa

- Una matrice quadrata A di ordine n è invertibile (o non singolare) se esiste una matrice B di ordine n tale che $A \times B = B \times A = I$

- B è chiamata matrice inversa e denotata da A^{-1}. Una matrice che non è invertibile è chiamata singolare.
- Proprietà:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AxB)^{-1} = B^{-1}xA^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$$

- Matrice inversa di una matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & .. & 0 \\ . & . & . & \ddots & . \\ 0 & . & . & . & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & .. & 0 \\ . & . & . & \ddots & . \\ 0 & . & . & . & \frac{1}{a_{mm}} \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{mxm} \quad (a_{ii} \neq 0, i = 1,..,m) \qquad A^{-1} = diag(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, .., a_{mm}^{-1})$$

Matrice Ortogonale

- Una matrice A è chiamata ortogonale se

$$A \times A^T = A^T \times A = I \text{ (identità) quindi}$$

$$A^{-1} = A^T$$

- Il prodotto di matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale

- Le matrici ortogonali preservano il prodotto scalare e quindi la norma 2 di vettori:

$$\|Qx\|_2 = \sqrt{< Qx, Qx >} = \sqrt{x^T Q^T Qx} = \sqrt{x^T Q^{-1} Qx} = \sqrt{x^T x} = \|x\|_2$$

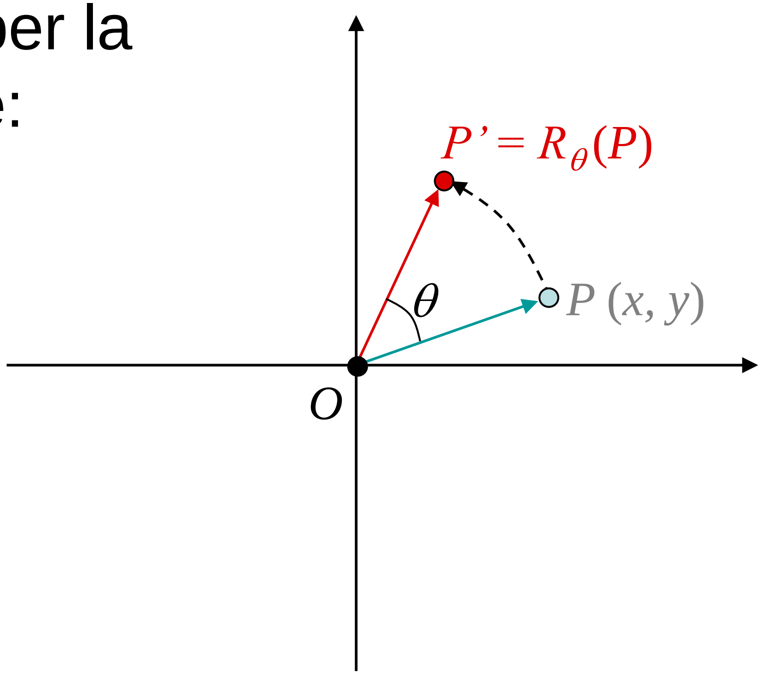
Esempio: Rotazione in 2D – rappresentazione matriciale

- Il punto ruotato P' si ottiene moltiplicando il punto P=(x, y) per la matrice ortogonale di rotazione:

$$P' = R_\theta P$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left\|\overline{OP}\right\|_2 = \left\|\overline{OP'}\right\|_2 = \left\|R_\theta \overline{OP}\right\|_2$$



Rango di una matrice

- **Rango di una matrice:**

Si definisce rango di una matrice A(mxn) il massimo numero di vettori colonna (o riga) linearmente indipendenti di A.

Massimo rango di A(mxn): rank(A)=min(m,n)

- **Teorema:** *Una matrice A (nxn) si dice invertibile, cioè ammette inversa A^{-1}, se e solo se è a rango massimo, cioè se ha n colonne tutte linearmente indipendenti.*

Rango di una matrice

- rank(A) ???

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Una matrice diade ha rango ??

- Se A è n x m, allora
  - rank(A)<= min(m,n)
  - Se n=rank(A), allora A ha full row rank
  - Se m=rank(A), allora A ha full column rank

- Matrice a diagonale dominante

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,..,n$$

- Matrice a diagonale strettamente dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,..,n$$

Norme matriciali

Si chiama norma matriciale una funzione

$$\|\bullet\| : C^{nxn} \to \Re^{+} \cup \{0\}$$

che ad ogni A ∈ R^{nxn} associa un numero reale, che verifica le seguenti proprietà

1. $\|A\| \geq 0, \qquad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \qquad \forall A \in C^{nxn}$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \qquad \forall A \in C^{nxn} \qquad \forall \alpha \in C$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \forall A, B \in C^{nxn}$
4. $\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \qquad \forall A, B \in C^{nxn}}$

Norme matriciali

Ad ogni norma di vettore possiamo associare una norma di matrice nel modo seguente:

Definizione. La norma definita da

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \qquad A \in C^{nxn}, x \in C^n$$

viene detta **norma matriciale indotta** dalla norma vettoriale $\|\cdot\|_p$ o **norma naturale**

Per le norme naturali si ha:

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ix\|_p}{\|x\|_p} = 1$$

Norme matriciali indotte - esempi

$\|A\|_1$ **norma 1**

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(massimo somma colonne in modulo)

$\|A\|_\infty$ **norma infinito - Chebyshev**

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(massimo somma righe in modulo)

$\|A\|_2$ **norma 2 - Euclidea**

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

ρ(A) raggio spettrale di A: autovalore di modulo massimo di A

Norme matriciali - esempi

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

norma infinito

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,..,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

norma 1

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

norma 2- Euclidea

$$\|A\|_1 = 22$$

$$\|A\|_\infty = 20$$

$$\|A\|_2 = ??$$

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 & 8 \\ 11 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 10 & -9 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 16 \\ 19 \\ 11 \\ 20 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad\quad 22 & 20 & 7 & 17 \end{array} & \end{array}$$

Norme matriciali

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Norma di Frobenius o Schur
(non è una norma indotta)

Tutte le norme matriciali sono equivalenti

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$$

$$\max_{i,j}|a_{ij}| \le \|A\|_2 \le n\max_{i,j}|a_{ij}|$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$$

Norme matriciali

Data una norma di vettore ed una norma di matrice, diciamo che le due norme sono compatibili se

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

- Se $\|\cdot\|$ e’ una norma matriciale compatibile, allora

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

- Sia A una matrice simmetrica , allora $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A) = |\lambda_{\max}|$$

- Sia A una matrice simmetrica definita positiva, allora

$$\|A\|_2 = \lambda_{\max}$$

Matrice simmetrica definita in segno

Se per ogni vettore **x** non nullo il numero reale $\mathbf{x^T A x}$ (chiamato **forma quadratica**) mantiene lo stesso segno, si dice che la matrice A (simmetrica) è definita in segno, in particolare:

$$x^T A x > 0, \quad \textit{definita positiva}$$

$$x^T A x \geq 0, \quad \textit{semidefinita positiva}$$

$$x^T A x \leq 0, \quad \textit{semidefinita negativa}$$

$$x^T A x < 0, \quad \textit{definita negativa}$$

Altrimenti A è **indefinita.**

Criterio di Sylvester

Una matrice simmetrica A è

definita positiva

se e solo se

$$\boxed{\det(A_k) > 0, \quad k = 1,..,n}$$

dove $\det(A_k)$ rappresenta il determinante della matrice di ordine k formata dalle intersezioni delle prime k righe e k colonne di A

Proprietà delle matrici definite positive

- Se A è matrice def. pos. o def. neg. allora A ha rango massimo, e quindi è invertibile.

- Se due matrici A e B sono definite positive ed il loro prodotto commuta, cioè AB=BA, allora il loro prodotto è ancora una matrice definita positiva.
- Se una matrice simmetrica ha elementi diagonali positivi ed è a diagonale dominante, allora è definita positiva.
- Se A ha rango massimo *n* , *allora* A^TA è definita positiva.

Dim:

$$x^T A^T Ax = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|_2^2 \neq 0 \; se \quad Ax \neq 0$$

Quando A è a rango massimo e $x \neq 0$ allora $Ax \neq 0$

segue che $\|Ax\|_2^2 > 0$

Autovalori - Autovettori

Data una matrice A di ordine n. Il numero λ reale o complesso è detto AUTOVALORE di A se esiste un vettore x non nullo per cui valga la relazione

$$Ax = \lambda x$$

Ogni vettore x siffatto si chiama AUTOVETTORE (destro) di A corrispondente all'autovalore λ

Spettro di A = insieme degli autovalori di una matrice A

$$\lambda(A)$$

Raggio spettrale = modulo massimo degli autovalori di A

$$\rho(A)$$

Autovalori e Autovettori

Affinchè il sistema lineare omogeneo

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

ammetta soluzione non nulla deve essere

$$p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda\, I) = 0 \qquad \text{(A singolare)}$$

$$p(\lambda) = (\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + .. + \alpha_0)(-1)^n$$

detto *polinomio caratteristico* e l'equazione p(λ)=0 è detta *equazione caratteristica* di A.

Autovalori e Autovettori

Gli autovalori di A sono tutti e soli i valori che annullano p(λ), cioè le radici di p(λ). Poiché un polinomio di grado n ammette sempre n radici reali o complesse, distinte o coincidenti, una matrice *nxn* ha sempre n autovalori, non necessariamente distinti.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$ gli zeri di p(λ) (al massimo k=n) distinti allora p(λ) si rappresenta nella forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\sigma_1} (\lambda - \lambda_2)^{\sigma_2} ..(\lambda - \lambda_k)^{\sigma_k} (-1)^n$$

σ_i Molteplicità algebrica di λ_i

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$radici \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$ autovalori della matrice A.

$$Per \quad \lambda_1 = -2 \qquad (A - \lambda I)\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dalla prima equazione di ottiene $x_1 + x_2 = 0$ da cui $x_1 =$ -x_2

Da cui segue che qualunque vettore $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

con $\alpha \neq 0$ è un autovettore di λ_1

Proprietà degli autovalori

- Gli autovalori di una matrice diagonale o triangolare sono uguali agli elementi diagonali.

$\Rightarrow$ Infatti la matrice A-λI è ancora diagonale o triangolare e quindi il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \lambda_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A non singolare e x un autovettore corrispondente, allora risulta

$$\Rightarrow \lambda \neq 0 \quad e \quad 1/\lambda \text{ e' autovalore di } \mathrm{A}^{-1}$$

con x autovettore corrispondente.

$$\text{Infatti: } x = \lambda A^{-1} x \quad \text{quindi } \lambda \neq 0 \; e \; A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$$

Proprietà degli autovalori

- Per il raggio spettrale vale $|\rho(A)| \leq \|A\|$

$$\text{Infatti } \|Ax\| = |\lambda|\|x\|, \quad \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$$\Rightarrow |\lambda|\|x\| \leq \|A\|\|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A , allora è anche autovalore della sua trasposta A^T

$$\text{Poichè} \quad \det(A^T) = \det(\mathrm{A})$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda\,\mathrm{I})$$

Proprietà degli autovalori

- Se λ è un autovalore di una matrice A ortogonale, cioè tale che $A^T=A^{-1}$, allora risulta $|\lambda|=1$.

$$(Ax)^T = (\lambda x)^T$$

$$x^T A^T = \lambda x^T \quad \Rightarrow \quad x^T A^T A x = \lambda \lambda x^T x$$

$$A \text{ è ortogonale } A^T A = I, \quad x^T x = \lambda^2 x^T x$$

$$essendo \quad x^T x \neq 0, \text{ segue che } \lambda^2 = 1, \text{ quindi } \quad |\lambda| = 1$$

- Se λ è un autovalore di una matrice A , allora λ^k è autovalore di A^k

$$A^k x = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \ volte} x = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-1 \ volte} \lambda x = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-2 \ volte} \lambda^2 x = \ldots = \lambda^k x$$

Autovalori di matrici speciali

- Le matrici simmetriche hanno tutti gli autovalori reali.

- Le matrici simmetriche definite positive hanno tutti gli autovalori reali e positivi.

- Ogni matrice simmetrica definita positiva ha tutti gli autovalori strettamente positivi.
- Ogni matrice simmetrica semidefinita positiva ha tutti gli autovalori non negativi.
- Ogni matrice simmetrica definita negativa ha tutti gli autovalori strettamente negativi.
- Ogni matrice simmetrica semidefinita negativa ha tutti gli autovalori non positivi.

- una matrice è chiamata **indefinita** se ha due autovalori di segno opposto

Matrici simili

- Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine, si dice che B è simile ad A, o che B è ottenuta da A mediante una **trasformazione di similitudine** se esiste una matrice quadrata non singolare T tale che

$$B = T^{-1}AT$$

- Si osserva che la similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza, cioè

  – A è simile ad A
  – Se A è simile a B allora B è simile ad A
  – Se A è simile a B e B è simile a C , allora A è simile a C

Autovalori di Matrici simili

- Due matrici simili hanno lo stesso spettro, cioè gli stessi autovalori. Inoltre hanno gli autovettori legati tra loro dalla matrice di similitudine T.

Se (λ, x) è una coppia di autovalore, autovettore di A

allora $(\lambda, T^{-1}x)$ lo è di $B = T^{-1}AT$

Dim: Sia $y = T^{-1}x$, allora

$$By = T^{-1}ATT^{-1}x = T^{-1}Ax = T^{-1}\lambda x = \lambda y$$

da cui $By = \lambda y$

- cioè A e B hanno gli stessi autovalori e autovettori legati dalla matrice T.

Matrice diagonalizzabile

- **Quando una matrice è diagonalizzabile?**
- **Come diagonalizzare una matrice?**

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

Diremo che A è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale D di ordine n, ovvero

A è diagonalizzabile se e solo se esiste B, matrice invertibile, tale che

$$D = B^{-1}AB$$

ovvero

$$BD = AB$$

Condizione necessaria e sufficiente affinche' una matrice sia diagonalizzabile è che

1) il numero degli autovalori, contati con la loro molteplicità, sia pari all'ordine della matrice

2) la molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincida con la relativa molteplicità algebrica

Due casi particolari di matrici diagonalizzabili:

1) Matrice simmetrica reale

Teorema spettrale (caso reale, finito-dimensionale):

ogni matrice simmetrica reale è simile ad una matrice diagonale tramite una matrice ortogonale. Di conseguenza:

$$D = B^{-1}AB = B^{T}AB$$

2) Matrice quadrata di ordine n che ammette esattamente n autovalori distinti

Come diagonalizzare una matrice

$$D = B^{-1}AB$$

- La matrice D è una matrice diagonale che presenta, sulla diagonale principale, gli autovalori della matrice A

- La matrice diagonalizzante B è la matrice che ha come colonne gli autovettori associati ad ogni autovalore, ovvero ha come colonne i vettori che generano gli autospazi relativi ad ogni autovalore

Matrice simmetrica semi-definita positiva

Teorema: Sia A matrice simmetrica nxn.

$\lambda_i \geq 0$ per ogni i=1,..,n $\Leftrightarrow$ $<A\mathbf{v}, \mathbf{v}> \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}$

matrice A semi-definita positiva.

Dim:

$$A = V \Lambda V^T \quad \Rightarrow$$

$$< Av, v > = v^T A v = v^T V \Lambda V^T v =$$

$$= (V^T v)^T \Lambda (V^T v) = u^T \Lambda u = < \Lambda u, u >$$

$$\boxed{< Av, v > = \lambda_1 u_1^{\ 2} + \lambda_2 u_2^{\ 2} + \ldots + \lambda_d u_d^{\ 2}}$$

Perciò, $\lambda_i \geq 0 \Leftrightarrow <A\mathbf{v}, \mathbf{v}> \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}$

Matrix Calculus

	Scalar	Vector	Matrix
Scalar	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x}\right]$	$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\partial y_{ij}}{\partial x}\right]$
Vector	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_j}\right]$	$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]$	
Matrix	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathbf{X}} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_{ji}}\right]$		

By Thomas Minka. Old and New Matrix Algebra Useful for Statistics x,a vettori

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

X matrice

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{X} \mathbf{b}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{b}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{X} \mathbf{a}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)\mathbf{x}$$

B simmetrica, reale $\quad \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Bx} = 2\mathrm{Bx}$

Esempio

B simmetrica, reale $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Bx}=2\mathrm{Bx}$

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Bx}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=3x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Bx}=6x_1+4x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Bx}=4x_1+10x_2$$

$$2\mathrm{Bx}=2\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3x_1+2x_2\\ 2x_1+5x_2\end{bmatrix}$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi
Dipartimento di Matematica
serena.morigi@unibo.it
http://www.dm.unibo.it/~morigi