

## Introduzione

Serena Morigi



### Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Bologna

© 2011 COMSOL. COMSOL e COMSOL Multiphysics sono marchi registrati di COMSOL AB. Capture the Concept, COMSOL Desktop e LiveLink sono marchi di COMSOL AB. Gli altri prodotti o marchi sono marchi di fabbrica o marchi registrati dei rispettivi proprietari.

1 mm (mm 1 + 1 mm (mm 1 mm

## **COMSOL Multiphysics**

- Strumento software per la soluzione di problemi 1D,2D e 3D descritti da modelli di Equazioni a Derivate Parziali + condizioni al bordo/iniziali.
- Per la discretizzazione del problema si adotta il metodo agli Elementi Finiti (FEM)
- Il sw può essere utilizzato sia in modalità interattiva sia sia mediante script COMSOL/MATLAB.
- Tramite l'ambiente grafico è possibile utilizzare i numerosi modelli predisposti per i principali campi di applicazione.



### L'approccio COMSOL alla multifisica



Interazione, Flessibilità, Sinergia e Apertura

COMSOL

### Analisi Multifisiche

### Il mondo reale è multifisico





# La modellazione in COMSOL è multifisica!

### Il Processo di Modellazione & Simulazione



COMSOL



Riparazione e semplificazione dei dettagli della geometria





### Soluzione

- Solutori:
  - diretti
  - Iterativi
- Tipo di soluzione:
  - o stazionaria
  - o transitoria
  - o agli autovalori
  - o parametrica
  - $\circ$  adattativa
  - o di sensitività
  - o di ottimizzazione
- Calcolo parallelo su:
  - macchine a memoria condivisa
  - su sistemi a memoria distribuita (cluster)















### **CAD Import Module**



- Brings in all major CAD formats directly into the COMSOL Desktop:
  - ACIS<sup>®</sup> (.sat, .sab)
  - Parasolid<sup>®</sup> (.x\_t, .x\_b, .xmt\_bin)
  - STEP (.step)
  - IGES (.igs)



### LiveLink<sup>™</sup> for MATLAB<sup>®</sup>



File Format	Read	Write
MATLAB®: Model M-File (.m)	Yes	Yes
MATLAB®: Function (.m)	Yes	No

- Enables scripting.
- Save your COMSOL files as MATLAB M-files.
- Manipulate the M-file and call your own functions.
- Interface COMSOL Multiphysics simulations to computations performed in other simulators.





### COMSOL Multiphysics V4: COMSOL Desktop



Model Builder with Model Tree

Messages, Progress, and Numerical Results

New è usato per definire un nuovo problema.

### Come risolvere un modello PDE con COMSOL

- 1. Definizione del problema (classe di equazioni e dim. dominio)
- 2. Definire la geometria 2D/3D del dominio (GEOMETRY)
- 3. Definire le condizioni al contorno/iniziali (PDE)
- 4. Definire il modello o i coefficienti della PDE (PDE)

specificare i coefficienti della PDE. E' possibile specificare una diversa PDE per ogni sottodomio, rendendo in questo modo possibile specificare per esempio differenti proprietà del materiale in un modello PDE; questa modalità permette inoltre l'inserimento di condizioni iniziali per un problema time-dependent.

- 5. Discretizzazione del dominio (MESH)
- 6. Risolvere la PDE (STUDY)
- 7. Visualizzare la soluzione ed altre proprietà fisiche calcolate dalla soluzione (RESULTS)

possibilità di visualizzazione diversi grafici, mesh, contorni, superfici e , per problemi parabolici ed iperbolici, le relative animazioni della soluzione che cambia nel tempo.



### Una sessione di lavoro : START

 Finestra di dialogo usata per definire i parametri di una sessione di lavoro COMSOL (PDE)

1) Definizione del problema:

-Dimensione

-Add physics

Mathematics/

PDE interface

VIII Untitled.mph - COMSOL Multiphysics		_ 🗆 🗾 🗙
File Edit Vit		
10 Untitlec 3D	27	
■ Glob 2D axisymmetric		
Model Wizard Model Library		
Add Dharies		
Add Physics	() () ()	> 84
Heat Transfer in Solids (ht)		
v <sup>2</sup> Laplace Equation (Ipeq)		
D 🔧 AC/DC		
M Acoustics		
Chemical Species Transport		
M Heat Transfer		
A Δu Mathematics		
▷ Δu PDE Interfaces		=
I delta ODE and DAE Interfaces		-
Optimization and Sensitivity		
v <sup>2</sup> Classical PDEs		
Deformed Mesh		
Wall Distance (wd)		
		<b>*</b> -
		Þ

346 MB I 400 MB



- Ogni sessione di lavoro (elaborazione di un modello) propone la sequenza delle modalita' in successione (GEOMETRIA, PROBLEMA; CONDIZIONI AL CONTORNO,..)
- Si passa da una modalita' all'altra tramite frecce
- Alla fine dell'inserimento dei dati sul modello PDE da analizzare click sull'icona bandiera





### PDE Modes

# Modelli di PDE possono essere dati nelle seguenti 3 forme:

- 1) forma dei coefficienti,
- 2) forma generale,
- 3) forma debole



### PDE Modes: Forma dei Coefficienti

$$e_{a}\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} + d_{a}\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \qquad in \ \Omega$$

$$\mathbf{n} \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + qu = g - h^T \mu$$

$$hu = r$$

$$in \partial \Omega \quad \text{boundary}$$

Dominio di interesse  $\Omega$ , la prima equazione è la PDE, la seconda e la terza rappresentano le condizioni di Neumann (o miste) e Dirichlet rispettivamente sul contorno.

h,c,r,q,g,f sono vettori e matrici nel caso di sistemi di PDE

### PDE Modes: Forma dei Coefficienti

PDE stazionaria (Steady-State Equation)

$$e_{a}\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} + d_{a}\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \qquad in \Omega$$

Esempio: Equazione di Poisson

$$-\nabla \cdot \nabla u = 1 \quad in \ \Omega \quad u = 0 \quad in \ \partial \Omega$$

Implica c=f=h=1 e tutti gli altri coefficienti sono 0.

• PDE che dipende dal tempo

$$e_{a}\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}} + d_{a}\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f \qquad \text{in } \Omega$$

• Equazioni ellittiche: non lineari

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad in \quad \Omega$$

$$-\nabla \cdot (c(u)\nabla u) + a(u)u = f(u) \quad in \quad \Omega$$

- Equazioni paraboliche
- Equazioni iperboliche

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad in \quad \Omega$$

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f \quad in \quad \Omega$$

• Problema agli autovalori  $-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du$  in  $\Omega$ Si possono anche gestire sistemi di dimensioni arbitrarie, esempio sistema di dimensione 2:

$$-\nabla \cdot (c_{11}\nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{12}\nabla u_2) + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = f_1 \quad in \quad \Omega$$

$$-\nabla \cdot (c_{21}\nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{22}\nabla u_2) + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = f_2 \quad in \quad \Omega$$

 Condizioni al contorno per funzioni incognite scalari u

Dirichlet e Neumann e miste:h,c,u,r,q,g saranno vettori e matrici nel caso di un sistema di 2 equazioni

### Forma dei Coefficienti: Interpretazione





### **PDE Modes: Forma Generale** Una formulazione più compatta

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = F \quad in \ \Omega$$

$$-\mathbf{n} \cdot \Gamma = G + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^T \mu \left\{ in \partial \Omega \quad \text{boundary} \\ 0 = R \quad \right\}$$

Equazione di Poisson espressa in forma generale:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -ux & -uy \end{bmatrix} \qquad F = 1$$

$$R = u$$

Tutti gli altri coefficienti sono 0. (Notiamo:  $\mu = -\mathbf{n} \cdot \Gamma$ )



### PDE Modes: Forma debole (Weak Form) (Stazionaria)

- Forma generale
- Moltiplicare test function v e integrare

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \Gamma dA = \int_{\Omega} v F dA$$

Th. Divergenza e Integrazione per parti nella parte sx  $\int (v\Gamma \cdot \mathbf{n}) ds - \int (\nabla v \cdot \Gamma) dA = \int vF dA$ 

• Riscrivere 
$$0 = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \Gamma + vF) dA + \int_{\partial \Omega} (-v\Gamma \cdot \mathbf{n}) ds$$

Subdomain, weak: -ux test\*uxuy test\*uy+u test\*F Boundary, constr: u

### **Esempio 1** Problema parabolico 1D

 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \left( \left( 1 + x^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad -1 < x < 1, \quad 0 \le t \le 0.2$ u(x,0) = 100(1-|x|),  $\begin{cases} u(-1,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases},$ 

#### **Select Space dimension** 1D

#### **Add Physics**

(Scelta del modello):

Mathematics/PDE Interface

**Coefficient Form PDE** 

Select study type

Time dependent

titled.mph - COMSOL Mu	ltiphysics			
Edit View Options H	elp			
- 🛛 🖨 🥱 🔊 🖳	. 🛓 🛨			
odel Builder 👘 🗖	💴 Model Wiza 🛛 🛄 Model Libra 🚽 🗖	d Graphics	🖄 👁 C' 🖲 🕶 🔍 Q, A, 🌞 🚱   🎶 🕶 🛱	
		1		
Untitled.mph (root) Global Definitions	Add Physics $\Leftrightarrow \Rightarrow \Rightarrow$			
Results	A 📉 Recently Used			<b>F</b>
	Laplace Equation (Ipeq) AC/DC	0.6		
	> ))) Acoustics			
	b 28 Chemical Species Transport	0.4.		
	<ul> <li>Meat Transfer</li> <li>Heat Transfer in Solids (ht)</li> </ul>			
	Heat Transfer in Fluids (ht)	0.2		<b>F</b>
	🛛 划 Electromagnetic Heating	-		
	Au Mathematics	0.		E
		-0.2		
				<b>_</b>
	+ 🗷	-0.4-		
	- Selected physics	-0.6		
		-		
		-0.8		
		-		<b>_</b>
	- Dependent variables	-1 -0.8	-0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4	0.6 0.8 1
	Dependent variables	Messages 🛛 💻 Progress	🗉 Log) 🗐 Results	<u></u>
		COMSOL 4.2.1.110		*
		4		
			375 MB I 425 MB	
			575 110   125 110	



#### Geometry

Disegna un segmento Right-Click su **Interval/Setting** Impostare gli estremi desiderati [-1,1] e click su build Impostare gli assi in finestra grafica **Definitions/View/Axis** 

7





#### **Setting Physics:**

Boundary conditions, Initial conditions, Eq.Coefficients

VIIII Untitled.mph - COMSOL Multiphys	ics		
File Edit View Options Help			
D B B 🖨 🥱 🖉 🖳 🛔	▼ ⇔		
T Model Builder	🔛 Settings 🛛 🛄 Model Library	<b>Q</b> - D	📣 Graphics 🔥 Convergence Plot 1 🔥 Convergence Plot 2
	- Coefficient Form PDF	*	∞ ∞ ଫ ⊛ ▾   ལ, ལ, ⊕ ⊕   ↓ ▼   ⊕ =   💼
▲ 🕫 Untitled.mph (root)			
Global Definitions	Domain Selection		COMSOL 10 MULTIPHUSICS
A = Model 1 (mod1)	Selection: All domains		
Definitions			
D 🔽 View 1			
A A Geometry 1			
/ Interval 1 (i1)		- <u></u>	
Form Union (fin)			
Materials		E	
Coefficient Form PDE	Override and Contribution		
<sup>D</sup> → Zero Flux 1	- Equation		
P Initial Values 1	* Equation		
S Mesh 1	Show equation assuming:		
4 🎬 Study 1	Study 1, Time Dependent	<b>•</b>	
🖳 Step 1: Time Dependen	$\partial^2 u = \partial u = u$		
Solver Configurations	$e_{a}\frac{\partial u}{\partial t^{2}} + d_{a}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c\nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f$		
▲ 1 Solver 1	$\nabla - \left[ \begin{array}{c} \partial \end{array} \right]$		
हुम्बद्ध Compile Equation	$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}$		
Dependent Variat	Diffusion Coefficient		
Dependent :	- Bindson coemicine		
A 🖸 Results	c (1+x^2)	1	
Data Sets			L
Tables	- Absorption Coefficient		-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8
► 1D Plot Group 1			🖾 Messages 📼 Progress 💷 Log 📳 Results 🖾 👘 🗖
Export	a 0	1/m²	🔛 👯 🖕 🗶 🕞 🖽 🔻
Reports			
	Source Term		
	f 0	1/m <sup>2</sup>	
4			
			360 MB   411 MB



### **Esempio 1**

#### **Discretizzazione del dominio**

• MESH / build all

#### **Definizione dominio temporale**

• Study / Time dependent

Untitled.mph - COMSOL Multiphys	sics				
File Edit View Options Help					
┃ ┏ Ⴒ  � ๙ ӣ Ⴒ 🛓	▼ = Q <sup>2</sup>				
T Model Builder	👬 Settings 🛛 🛄 Model Library			2 - 0	🗏 🛃 Graphics 🛛 🖓 🗖
	🛌 Time Dependent				∞ ∞ 0 0 @ ▼   Q, Q, ⊕, ⊕ ፼   ↓ ▼   ⊕ = ⊟ →   @
Global Definitions	- Study Settings				
Model 1 (mod1) Definitions	Times: range(0,0.01,0.2)			s 🔛	
Geometry 1	Relative tolerance: 0.01				
Form Union (fin)	<ul> <li>Results While Solving</li> </ul>				
Materials	✓ Mesh Selection				
∆u PDE (c)	Geometry	Mesh			
Coefficient Form PDI	Geometry 1	Mesh 1		-	
<sup>™</sup> Initial Values 1					
- Dirichlet Boundary C					
Mesh 1					
Study 1	- Physics Selection				
Step 1: Time Dependen	Disusion interferen	11.0	Discostication		
Results	Physics Interface	Use	Discretization Discretization	-	
	PDE (C)		Flysics settings		
	Extension				
	<ul> <li>Values of Dependent Variables</li> </ul>				-0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8
					Messages 🖄 📼 Progress) 💷 Log 🗉 Results) 💧 🗖 🕻
					COMSOL 4.2.1.110
					Complete mesh consists of 15 elements.
					-
4 111					4
					369 MB   422 MB



### Risolvere il modello PDE : Study / Compute

Voltitled.mph - COMSOL Multiphys	ics			
File Edit View Options Help				
1688 500 18	▼ 📑			
1 Model Builder	👪 Settings 🛛 🛄 Model Li	brary	🥩 🖳 🗖	🖉 📣 Graphics 🔥 Convergence Plot 1 📣 Convergence Plot 2
	⊳ 1D Plot Group			€, द. छ   Щ ≣   📾
4 🕫 Untitled.mph (root)				Line Graph: Dependent variable u (1)
Global Definitions	✓ Data			Multiphysics 😻
Model 1 (mod1)	Data set:	Solution 1	▼ 1	
/ Interval 1 (i1)	Time selection:	All	•	30
Form Union (fin)	→ Title			80
Materials				
⊿ Δu PDE (c)	<ul> <li>Plot Settings</li> </ul>			_ <sup>70</sup>
Coefficient Form PDE	x-axis label: 🔲 x-	coordinate (m)		
<sup>▶</sup> Zero Flux 1	y-axis label: 🔲 D	ependent variable u (1)		
Initial Values 1	-			
Dirichlet Boundary C     Mash 1	Axis			
Study 1	→ Grid			ਿਊ 40 -
Step 1: Time Dependen	Legend			
In Solver Configurations	/ Legend			
Results	Window Settings			
Data Sets				20 -
8.85 e-11 Derived Values				10-
I Tables				
D Plot Group I				0
Reports				-1 -0.5 0 0.5 1 x-coordinate (m)
				Messages Progress Log Results
				🔤 🔜 📩 🗶 🛀 🏢 🔻
				384 MB   465 MB
L				



- 1. Cambiare le condizioni al contorno in Neumann omogenee e risolvere nuovamente
- 2. File/Save Model as m file Ex1.m
- 1. Riaprire in COMSOL with MATLAB e rieseguire rilanciandolo da command window



### **Esempio 2** Equazione di Laplace in 2D

VIII Untitled.mph - COMSOL Multiphys	sics		
File Edit View Options Help			
┃	<b>▼</b>		
T Model Builder	🤨 Model Wizard 🛛 🎹 Model Library	2	📣 Graphics 🔥 Convergence Plot 1 📣 Convergence Plot 2
↓≣ †≣ <b>≂' ≣'</b> ⇔ ⇔	Add Physics	<b>A A A</b>	@, Q, A, ፼   Ⅲ 篇   @
🔯 Untitled.mph (root)		V V M	Line Graph: Dependent variable u (1)
Global Definitions	∆u Coefficient Form PDE (c)	<b>^</b>	MULTIPHYSICS 🧶
Results	△u General Form PDE (g)		100
	Jau Weak Form PDE (w)		
	▷ Δu Lower Dimensions		90 -
	Grand DAE Interfaces		20
	✓ Optimization and Sensitivity ▲ ∇ <sup>2</sup> Classical PDEs		80
	$\nabla^2$ Laplace Equation (lpeg)		~ 70-
	√ <sup>2</sup> Poisson's Equation (poeq)	_	
	v <sup>2</sup> Wave Equation (waeq)	=	<u>e</u> 60 -
	v <sup>2</sup> Helmholtz Equation (hzeq)		Line in the second s
	v <sup>2</sup> Heat Equation (hteq)		50 -
	∇ <sup>2</sup> Convection-Diffusion Equation (cdeq)		Henry to
	Deformed Mesh	~	40
	+ 🗷		
	- Selected physics		50
			20
			10
	- Dependent variables		x-coordinate (m)
			Complete mesh consists of 15 elements.
			Number of degrees of freedom solved for: 31.
			Solution time (Study 1): 2 s.
			Saved file: C:\SERENA\LEZIONI\LEZIONI_CESENA_1112\BSB\COMSOL\prov -
			406 MB   482 MB



### Geometry

#### Dominio: rettangolo $(x,y) = [0, 3] \times [0, 1]$

Click mouse destro su Geometry/**Rectangle/Settings** La regione apparirà marcata grigia.

Vntitled.mph - COMSOL Multiphysics			
File Edit View Options Help			
□┏ቄቄ ७๙ ◙๋ݠ ▮▾	• / / /   • • • • • • • • •   7 • • • • • • • / / * =		
T Model Builder	🔛 Settings 🛛 🛄 Model Library	<b>[</b> ] 🖳 🗆 🗆	🚺 🕢 Graphics 🔪 👁 @ @ 🖷 🔍 🍳 🔍 🌸 👰 🕹 🔻 🛛 @ 🔂 🕀 📾 🕅 🕮 🖓 🗖
	y∧ Geometry		2.2
Global Definitions	- Units		2.
Model 1 (mod1)	Length unit:		1.8
A Geometry 1	m	•	1.6
Rectangle 1 (r1)	Angular unit:		1.4
soft Form Union (fin)	Degrees	•	1.2
Materials V <sup>2</sup> Laplace Equation (lpeg)	Scale values when changing units		1
S Mesh 1	✓ Advanced		0.8
⊳ 🎬 Study 1	Default relative repair tolerance:		0.6
Results	1e-6		
			0.4
			0.2
			0_
			-0.2
			-0.4
			-0.6
			-0.8
			-1.2 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3
			Messages 🕸 📼 Progress 💷 Log 🎚 Results 🛛 🔒 🗖 🗖
			COMSOL 4.2.1.110
			· · ·
			٠
			402 MB   460 MB

#### **Setting Physics**

Right-Click su Laplace Equation/Dirichlet boundary conditions

- **u =+1** lungo i lati orizzontali
- u =-1 lungo quelli verticali.

#### **Boundary selection**

+ per aggiungere i lati selezionati nella finestra boundary selection

shift +click mouse dx per selezione multipla dei lati

#### **Boundary conditions**

Inserire un valore per la variabile dipendente sul contorno. Attivare **Dirichlet Boundary conditions** e selezionare la corrispondente check box (**Prescribed value for u**) Poi inserire il valore o espressione.

#### Inserire differenti DBC per differenti valori

Nulla da fare invece per i coefficienti della PDE poichè l'equazione è già impostata inizialmente in questo esempio

### **Generare la Mesh**

Generare la mesh: nel menu Mesh selezionare

Built all. Useremo questa volta la mesh di default.



### **Compute: Risolvere la PDE:**

Nel menu Study, right click Compute.

### **Results: Postprocessing dei risultati:**

Generare altri plots: esplorare i differenti tipi di visualizzazione 2D e 3D. (es. Surface, **Contour**; per un grafico 3D cliccare l'icona **Height Expression** ).

i Þb

COMSOL



- Per migliorare l'accuratezza del plot, ritornare al menu Mesh /Size /Extra Fine; poi nuovamente Study/Compute; e si può chiaramente ripetere il raffinamento.
- Risolviamo ora un problema simile sullo stesso rettangolo ma con differenti condizioni al contorno.
- Modificare le boundary conditions (coefficiente r).
   Lati verticali: u=4\*sin(pi\*y)^2.
- Lati orizzontali: in basso  $u=-0.05*x^{4}(3-x)^{2}$ ; in alto  $u=-0.05*x^{2}(3-x)^{4}$ .

Poi risolvere e visualizzare avendo ora fissato i parametri di plot a contour, ed height in surfacemse.

### Salvataggio in uno script MATLAB

- E' possible salvare il lavoro svolto in una sessione: File/Save As m file... Salvare ad esempio con il nome pdeintro.m
- Poi si può uscire da COMSOL, e riprendere in un secondo momento digitando pdeintro nel prompt di Comsol with MATLAB
- Per creare una nuova sessione di lavoro e quindi un nuovo esempio selezionare File/New



### Esercizio 1 Equazione di Poisson 2D, forma coefficienti

 $-\nabla \cdot (c\nabla u) = f \qquad in \ \Omega$ 

 Inserire l'equazione a partire dalla forma coefficienti dando opportuni coefficienti. File/New nella finestra Model Builder selezionare quindi Mathematics/PDE/ Coefficient Form.

• GEOMETRY

COMSOL utilizza il paradigma CSG (Constructive Solid Geometry) per la modellazione del dominio delle PDE. A partire quindi da semplici geometrie (cerchio, poligono, rettangolo, ellisse) alle quali vengono associati nomi unici, gli operatori +,\*, e – permettono di comporre gli oggetti per ottenere il dominio dell'equazione.

Definire ora il seguente dominio formato dall'unione degli oggetti solidi meno gli oggetti delimitati da tratteggio.

### Geometry: Creare il dominio spaziale

# Creare prima tutti gli oggetti elementari, ognuno avra' associato un'etichetta r1,r2,c1,c2

#### Geometry/Boolean Operation/Compose/Set formula

 Rimuovere infine tutti i bordi dei sottodomini dalla figura risultante deselezionando Keep internal border nella finestra Compose.

#### **Boundary Settings**

 Condizioni al contorno di Dirichlet nulle nei segmenti e Neumann solo per gli archi di cerchio (q=0). Selezione boundary da settare con left click (diventa verde) e rimozione con right click in un punto fuori dal dominio





#### **PDE Coefficient form**

Modificare i coefficienti della PDE da **PDE Coefficient form** (avendo prima selezionato tutto il dominio disegnato) in c=1, f=10, tutti gli altri parametri 0.

#### **Costruzione della griglia**

Mesh/ Build all

**Risolvere** 

Study/Compute

#### Visualizzare la soluzione

Right click Results/Plot2D/ select a data set (solution1)

Aggiungere Height Expression



i Þi

COMSOL



#### Esercizio 2 Equazione ellittica sul cerchio in forma coefficienti

$$-\Delta u + 2u = 0 \quad su \quad \Omega, \quad u = e^{x+y} \quad su \quad \partial\Omega,$$
  

$$\Omega \text{ cerchio di centro l'origine e raggio 3}$$

- Soluzione analitica esatta  $u(x, y) = e^{x+y}$
- Risolvere e visualizzare la soluzione analitica ed approssimata

(Surface/Expression), e l'**errore** u-exp(x+y)

commesso nella soluzione approssimata per differenti raffinamenti della mesh.

### Problema di superficie minima equazione ellittica in forma generale

• L'area della superficie

$$\left\{z = u(x, y) / (x, y) \in \Omega\right\}$$
$$A[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} d\Omega$$

è data da

- Dati i valori della funzione u nel contorno determinare u dentro il dominio omega in modo tale che l'area sia minimizzata.
- Applicata l'equazione di Eulero-Lagrange si ottiene il modello per il problema di superficie minima:

COMSOL

### Problema di superficie minima equazione ellittica in forma generale

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left|\nabla u\right|^2}}\nabla u\right) = 0 \quad su \quad \Omega = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\},\$$
$$u = x^2 \quad su \quad \partial\Omega,$$

 In questo caso il problema è non lineare e quindi deve essere risolto con un solutore non lineare. Attenzione: in General Form PDE, specificare Γ:

$$\Gamma = 1 / sqrt(1 + ux^2 + uy^2) * \begin{bmatrix} -ux & -uy \end{bmatrix}$$

 Risolvere e visualizzare la soluzione approssimata mediante l'ambiente COMSOL.

### Equazione del calore (problema parabolico) in forma coefficienti

Problema della diffusione del calore all'interno di un corpo:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad su \quad \Omega$$
  

$$u = 100 \quad \text{sul lato sinistro di} \quad \partial \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -10 \quad \text{sul lato destro di} \quad \partial \Omega$$
  

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sugli altri lati di} \quad \partial \Omega$$

- Dominio: blocco di metallo rettangolare con una cavità rettangolare nel mezzo. La temperatura iniziale del blocco di metallo sia di zero gradi al momento iniziale t0 in cui si inizia ad applicare calore.
- Studiare il comportamento del sistema nei primi 5 secondi di tempo. Selezionare Study/Time dependent.
- Risolvere e visualizzare la dinamica della soluzione approssimata mediante creazione di un movie .avi (visibile poi con Window Media Player) Export/Animation.



### L'equazione delle onde (problema iperbolico) in forma coefficienti (time dependent wave extension)

 $\frac{\partial u^2}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad su \quad \Omega$ 

- Dominio: quadrato di vertici (-1,-1),(-1,1),(1,-1), e (1,1).
- La membrana è fissata ai lati destro e sinistro (u=0), ed è invece libera ( $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ) nei lati in alto e in basso.
- Le condizioni inziali al tempo t=0, sono  $u(0) = \arctan(\cos(\frac{\pi}{2}x)), \qquad \frac{\partial u(0)}{\partial t} = 3\sin(\pi x)e^{\sin(\frac{\pi}{2}y)}$
- Risolvere in un intervallo temporale [0,5] sec. e visualizzare la dinamica della soluzione utilizzando l'opzione Export/Animation.

### **Esercizio 6** Un problema di Elettrostatica

in modalità Electromagnetics/Electrostatics

 Determinare il potenziale elettrostatico v in una struttura quadrata con una cavità quadrata al suo interno. Questo porta al problema di risolvere l'equazione di Laplace

 $\Delta v = 0 \quad su \quad \Omega,$   $v = 1000 \quad su \quad \partial \Omega \text{ interno,}$  $v = 0 \quad su \quad \partial \Omega \text{ esterno,}$ 

- Dominio: due quadrati concentrici con lati di lunghezza 0.2 e 0.5.
- Risolvere il problema e visualizzare il potenziale elettrostatico v, il campo elettrico E e il campo di spostamento D, equazione di Maxwell:

$$\nabla D = r, D = \varepsilon E, Poisson - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla v) 0r$$

 Per una migliore visualizzazione delle linee di equipotenziale (esempio ogni 100 volt), selezionare un contour plot e porre 0:100:1000 nel campo contour plot levels.

### Un problema di Diffusione (problema parabolico) in modalità Heat Transfer

 Poichè la conduzione di calore è un processo diffusivo, l'equazione generale di diffusione ha la stessa struttura dell'equazione del calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q \quad su \quad \Omega$$

- dove T rapresenta la concentrazione, k è il coefficiente di diffusione e Q è una sorgente. Il procedimento di diffusione può essere anisotropico, in tal caso k è una matrice 2x2.
- Risolvere in T su un dominio quadrato di lato 2, con condizioni di Dirichlet (concentrazione sul boundary) specificate.
- Risolvere e visualizzare la dinamica della soluzione approssimata mediante creazione di un movie .avi con **Export/Animation**.