Metodi Numerici per Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali EDP (PDE) (1)

Partial Differential Equations - PDE

Relazione del tipo

$$\boxed{F\left(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots\right) = 0}$$

tra le ***variabili indipendenti x,y,…,*** la ***funzione incognita u(x,y,..)*** e un numero finito di sue derivate parziali

$$\boldsymbol{u}_x = \partial \boldsymbol{u}\left(x, y, \ldots\right) / \partial x, \quad \boldsymbol{u}_y = \partial \boldsymbol{u}\left(x, y, \ldots\right) / \partial y$$

$$\boldsymbol{u}_{xx} = \partial^2 \boldsymbol{u}\left(x, y, \ldots\right) / \partial x^2, \; \boldsymbol{u}_{xy} = \partial^2 \boldsymbol{u}\left(x, y, \ldots\right) / \left(\partial x \partial y\right) \ldots\ldots$$

Ordine m

quando la derivata (parziale) di ordine massimo ha ordine m

PDE - Definizioni

Una funzione ***u(x,y,….)*** è detta **soluzione classica** della F(…)=0 (di **ordine m**) in una **regione aperta R** dello spazio delle variabili indipendenti *x,y,…* se risulta ivi **continua con tutte le sue derivate parziali di ordine** $\leq$ **m** e soddisfa la F(….)=0 in tutti i punti di ***R***.

Soluzione deboli, funzioni meno regolari che non soddisfano **F(…)=0** in maniera puntuale. Esse vengono caratterizzate da una formulazione integrale (detta **formulazione variazionale**) associata alla F(…)=0, che coinvolge le derivate di ordine inferiore a m, definite nel senso delle distribuzioni.

PDE - Definizioni

$$\boxed{F\left(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots\right) = 0}$$ **Ordine m**

Lineare se la funzione ***F*** è lineare nella incognita ***u*** e nelle sue derivate parziali, con coefficienti dipendenti unicamente dalle variabili indipendenti x,y,….

$$u_t = d(x,t)u_{xx} - v(x,t)u_x + a(x,t)u + f(x,t)$$ Lineare 2° ordine

Quasi-lineare se risulta lineare nelle derivate di ordine m, con coefficienti dipendenti da x,y,…. e da u e le sue derivate di ordine≤ m-1.

$$u_y u_{xx} - u_x^2 - u_y^2 + u = 1$$ Quasi-lineare 2° ordine

Non-lineare

$$(u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 = f$$ Non lineare 2° ordine

Esercizio

- Si classifichino, in base all'ordine ed alla linearità, le seguenti equazioni:

$$(a)\quad \left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$(b)\quad \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} = f,$$

$$(c)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = f.$$

Classificazione delle EDP lineari del secondo ordine

- In generale, PDE ellittiche, paraboliche, iperboliche
- Per PDE del secondo ordine lineare a coeff.cost.:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (*)$$

dove a,b,c,d,e,f,g possono dipendere solo dalle variabili indipendenti (ma non da u stessa)

Allora il **tipo** della PDE è determinato dal discriminante

$$b^2 - 4ac$$

< 0 equazione ellittica

= 0 equazione parabolica

> 0 equazione iperbolica

Forma quadratica associata ad una EDP

- All'equazione (*) si può associare il cosiddetto simbolo principale Sp definito da

$$S^p(x,q) = -a(x)q_1^2 - b(x)q_1 q_2 - c(x)q_2^2$$

- Questa forma quadratica si può rappresentare in forma matriciale come segue:

$$S^p(x,q) = q^T \begin{bmatrix} -a(x) & -\frac{1}{2}b(x) \\ -\frac{1}{2}b(x) & -c(x) \end{bmatrix} q \qquad (**)$$

- Una forma quadratica è detta *definita se la matrice associata ha autovalori tutti dello* stesso segno (positivi o negativi); è *indefinita se la matrice ha autovalori di entrambi* i segni; è *degenere se la matrice è singolare.*

Forma quadratica associata ad una EDP

- Si può allora dire che l'equazione (*) è ellittica se la forma quadratica (**) è definita (positiva o negativa), iperbolica se è indefinita, parabolica se è degenere.
- Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

definita positiva nel primo caso, singolare nel secondo, indefinita nel terzo

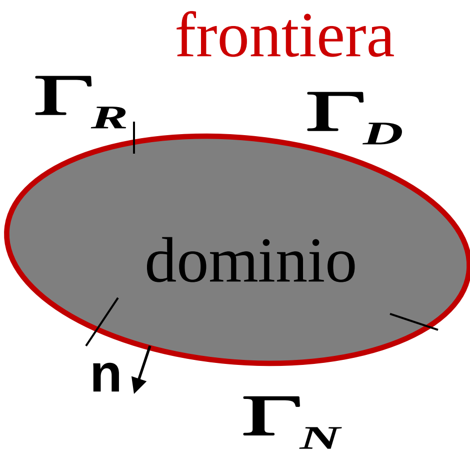
PDE iperboliche : descrivono un processo fisico conservativo, come la convezione, che non si evolve verso una forma stazionaria (l’energia è conservata nel tempo)

PDE paraboliche: descrivono un processo fisico dissipativo, come la diffusione, che si evolve nel tempo verso uno stato stazionario (l’energia diminuisce nel tempo)

PDE ellittiche: descrivono sistemi statici, che hanno già raggiunto uno stato stazionario o di equilibrio, e quindi non variano nel tempo

Condizioni al contorno ed iniziali

- **Condizioni al contorno** su $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$.
  - Dirichlet: $u = g \quad \text{su } \Gamma_D$
  - Neumann: $u_n = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = g \quad \text{su } \Gamma_N$
  - Robin (miste): $au + bu_n = g$ **su** Γ_R.



- **Condizioni Iniziali** per t=0: $u(t=0,x,y) = u_0(x,y)$

- **Problema PDE ben posto** se e solo se
  - **Esiste la soluzione del problema.**
  - **La soluzione è unica.**
  - **La soluzione dipende con continuità dai dati**.

Altrimenti mal-posto.

PDE – modelli in una dimensione

- Equazione di **Trasporto, (**o **delle onde** o di **convezione)**:
  (lineare del 1 ordine):

$$u_t = u_x \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

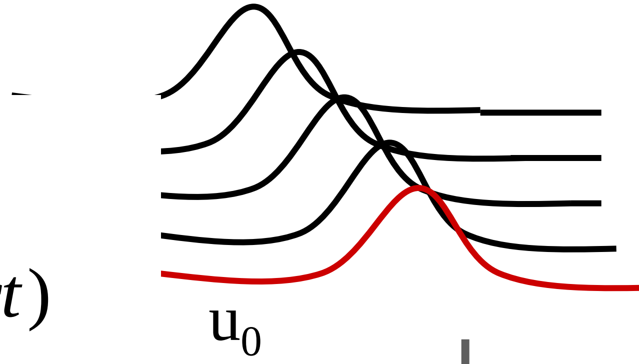
$$\text{soluzione}\; u(t,x) = u_0(x+t)$$

La funzione iniziale u_0 è propagata a sinistra con velocità -1.

$$u_t = cu_x \quad c \text{ costante non nulla}$$

$$\text{soluzione}\; u(t,x) = u_0(x+ct)$$

La funzione iniziale u_0 è propagata a destra (se c<0) o a sinistra (c>0) con velocità c.



- Equazione delle **onde** (lineare del 2 ordine):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\text{soluzione}\; u(t,x) = u_0(x+ct) + u_1(x-ct)$$

IPERBOLICA

PDE – modelli in una dimensione

Equazione del **Calore** (lineare del 2 ordine):

$$u_t = u_{xx} \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

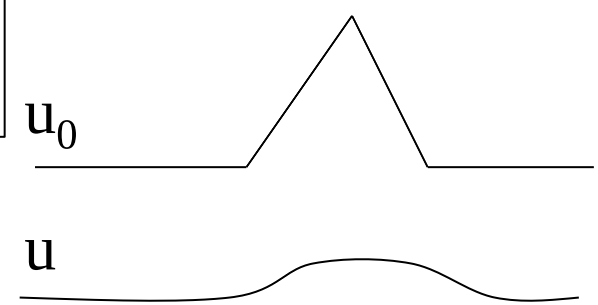
$$\text{soluzione}\; u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-s)^2/4t} u_0(s)\,ds$$

Diffusione di una quantità
nel tempo (es. Calore)

Source term:
Sorgente +f
Dispersione -f

PARABOLICA

$$u_t = a u_{xx} + f(x,t)$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$
$$u(t,0) = g_0(t) \quad u(t,1) = g_1(t)$$



PDE – in più di una dimensione..

Equazione di **Trasporto**

$$u_t + \nabla \cdot (\beta u) = 0$$

indicando l'operatore divergenza :

$$\nabla \cdot v = div(v) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad v = (v_1, .., v_d)^T$$

L'equazione, integrata su una regione A di R^d, esprime la **conservazione della massa** di un sistema materiale che occupa la regione A.

La variabile u è la densità del sistema, mentre $\beta(x)$ è la velocità posseduta da una particella del sistema che all'istante t occupa la posizione x.

PDE – alcuni modelli del 2 ordine

Equazione di **Laplace** (o del potenziale) (ellittica):

$$-u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$-u_{xx} - u_{yy} = f(x, y) \quad Poisson$$

Equazione del **calore** (o di diffusione) (parabolica):

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Equazioni delle **onde** (iperboliche):

$$u_t - u_x - u_y = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

PDE – Laplaciano

Operatore di Laplace (Laplaciano)

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Equazione di **Laplace** (o del potenziale) (ellittica):

$$-\Delta u = f(x,y)$$

$$\begin{cases} f = 0 & Laplace \\ f \neq 0 & Poisson \end{cases}$$

Equazione del **calore** (o di diffusione) (parabolica):

$$u_t - \Delta u = 0$$

Equazione delle **onde** (iperbolica):

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

Equazione Helmholtz (second-order linear)

$$\Delta u + c^2 u = 0$$

PDE – quasi lineari/non lineari

Equazione di reazione-diffusione

$$u_t + \Delta u = f(u)$$

Equazione eikonale

$$\|\nabla u\| = 1 \quad \|\nabla u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}$$

Equazione della superficie minima

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} \right) = 0$$

Equazione di Burgers (ordine 2 nonlineare)

$$u_t + u\, u_x = \nu u_{xx}$$

Problemi fisici retti da PDE

Problemi di propagazione (o non stazionari)

I problemi di propagazione sono problemi a valori iniziali, detti anche di Cauchy, che rappresentano un fenomeno (non stazionario) in evoluzione. Assegnati i dati iniziali (all'istante t=0), si desidera determinare il comportamento del fenomeno in esame negli istanti successivi (t>0). Il modello matematico in questione è costituito da: una o più equazioni differenziali definite in un domino spaziale (aperto) D per ogni t>0, dalle equazioni che descrivono lo stato iniziale, e da eventuali condizioni al bordo assegnate sul contorno Γ di D. La soluzione *u=u(x,y,..)* dipende dalla variabile "tempo" e da una o più variabili spaziali.

Esempi:

- **propagazione delle onde di pressione in un fluido,**
- **propagazione di tensioni e spostamenti in sistemi elastici,**
- **propagazione del calore in un mezzo.**

Problemi fisici retti da PDE

Problemi di "equilibrio" (o stazionari)

I problemi di equilibrio sono problemi stazionari (ovvero indipendenti dal tempo) nei quali la configurazione di equilibrio *u=u(x,y,..)* nel domino di interesse D viene descritta da una o più equazioni differenziali, definite in D, e da condizioni (su *u*) assegnate sul bordo di D. Essi vengono generalmente denominati problemi con valori al contorno.

Spesso tali problemi si presentano nello studio della configurazione a regime di fenomeni di evoluzione (dipendenti quindi dal tempo).

Esempi:

- **flusso viscoso stazionario,**
- **distribuzione stazionaria di temperature in un mezzo,**
- **equilibrio di tensioni in strutture elastiche.**

Problemi fisici retti da PDE

Problemi agli autovalori

Si possono pensare come un'estensione di problemi d'equilibrio nei quali si chiede di determinare dei valori critici di un parametro (autovalore) invece che studiare configurazioni di stazionarietà.

Esempi:

- deformazioni e stabilità di strutture,
- fenomeni di risonanza in circuiti elettrici/acustici,
- ricerca di frequenze naturali in problemi di vibrazione

Esempio: Equazione di Poisson in 2D

Distribuzione di temperatura su dominio rettangolare (senza risorse di calore f(x,y)=0, si ha eq.di Laplace)

$-u_{xx} - u_{yy} = 1$ in $(0,1)^2$ $u = 0$ su $\delta(0,1)^2$

Condizioni al contorno

coefficiente di conducibilità termica k>0

$$-\nabla\bullet(k\nabla u) = f(x,y) \quad k(x,y) \text{ varia su } \Omega$$

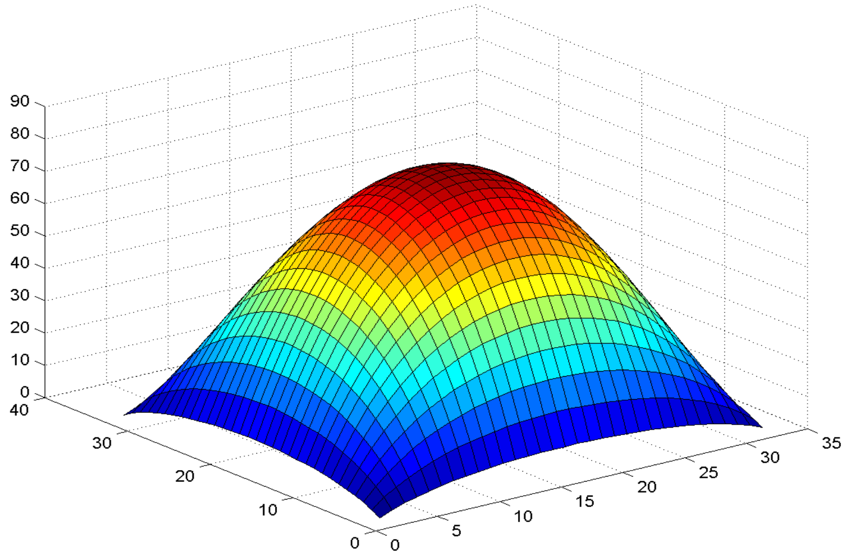
$$-\nabla\bullet(k\nabla u) = -k\nabla\bullet(\nabla u) = -k\Delta u = f(x,y) \quad k>0, \quad k \text{ cost}$$

Esempio: Equazione di Poisson in 2D

Distribuzione di potenziale elettrico dovuta ad una densità di carica elettrica f

$$-u_{xx} - u_{yy} = f \text{ in } (0,1)^2 \; ; u = 0 \text{ su } \delta(0,1)^2$$

Condizioni al contorno

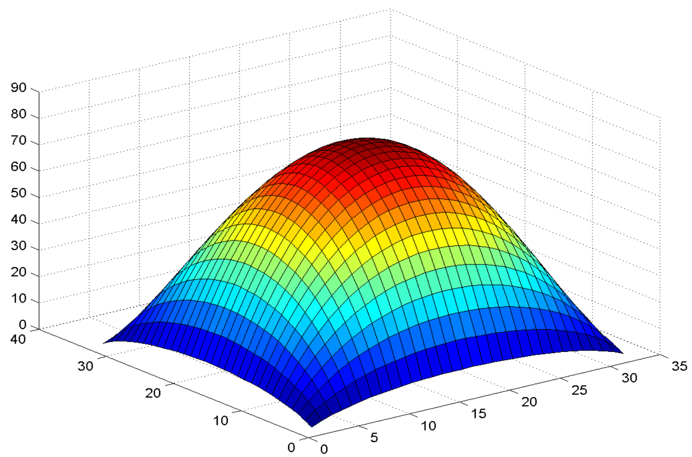


Esempio: Equazione di Poisson in 2D

Spostamento verticale u di una membrana elastica dovuto all'applicazione di una forza specifica pari ad f,

$-u_{xx} - u_{yy} = f$ in $(0,1)^2$;$u = 0$ su $\delta(0,1)^2$

Condizioni al contorno: membrana fissata al bordo



$u_n = 0$ su $\delta(0,1)^2$
Trazione nulla al bordo della membrana stessa

Tensione T della membrana

$$-T\Delta u = f(x,y) \quad T \text{ cost}$$

Metodi Numerici per PDE

- Necessità della risoluzione numerica: in generale non è possibile ricavare per via analitica una soluzione della EDP.

- Metodi numerici: determinare un problema di dimensione finita la cui soluzione possa essere calcolata e che approssimi la soluzione esatta:
  - **Elementi Finiti**
  - **Differenze Finite**
  - **Volumi Finiti.**
- Ciascuno ha il suo settore “ottimale” di applicazione, i supporters e i detrattori.
- Ci sono anche altri metodi, per es., collocazione, metodi spettrali, etc.

Idee base: FD,FE,FV

Finite Difference (FD)

- Dividere il dominio a griglia

-Si sostituiscono gli operatori differenziali con operatori alle differenze, questo essenzialmente significa approssimare

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

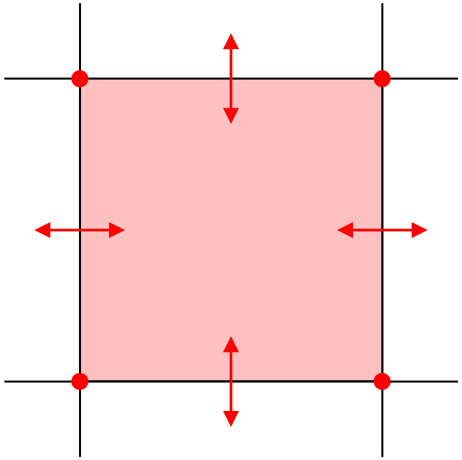
Finite Volume (FV)

- Dividere il dominio in sottodomini disgiunti
- Applicare teorema di Gauß alla PDE
- Relazione tra I sottodomini attraverso il flusso

Finite Elements (FE)

- Dividere il dominio in sottodomini disgiunti
- Riscrivere la PDE in una equivalente forma variazionale
- Risolvere il problema variazionale

Idee base: FD,FE,FV



Ω

- Finite Difference
- Finite Volume
- Finite Element

Idee base: FD,FE,FV

Vantaggi e svantaggi

Finite Difference:

+ facile da programmare
- no raffinamento locale della griglia
- solo per domini semplici

Finite Volume:

+ raffinamento locale della griglia
+ adatto anche a domini spaziali geometricamente complessi

Finite Element:

+ raffinamento locale della griglia
+ adatto anche a domini spaziali geometricamente complessi

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi