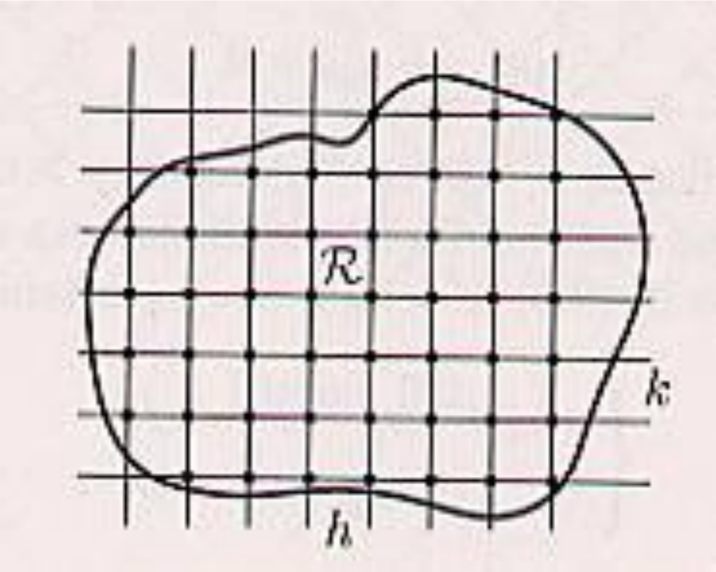
Metodi Numerici per Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali (2)

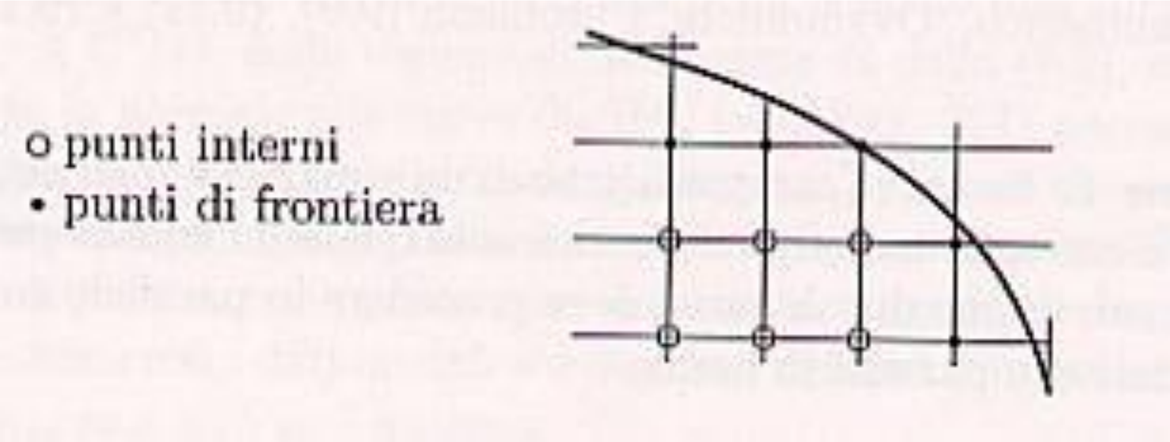
Metodi alle differenze Finite

PDE - Differenze Finite

Idea base:

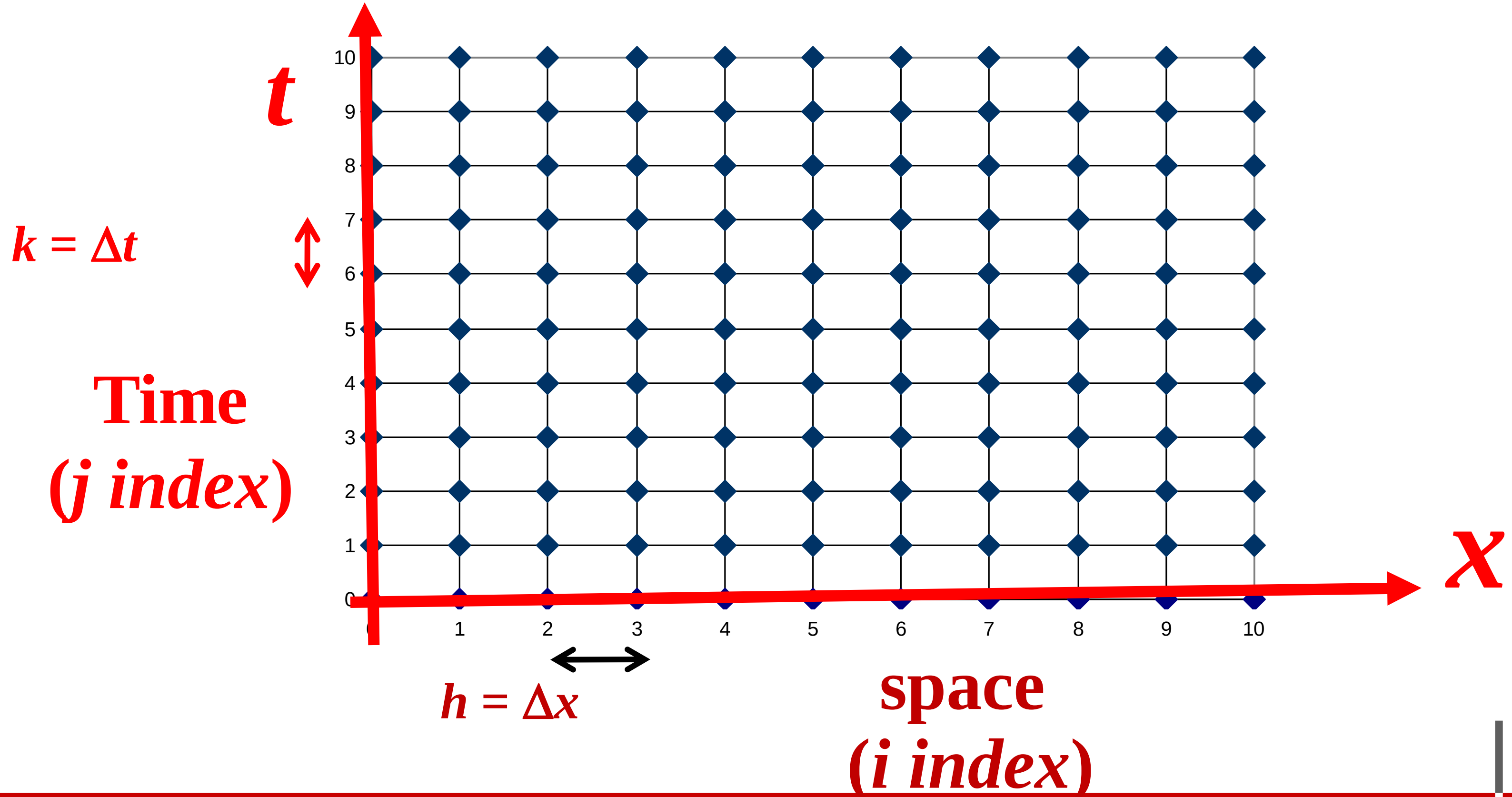
- sostituire la **regione R** con un **reticolo** (rettangolare) di punti di **R**
- "**collocare**" il sistema differenziale sui nodi del reticolo
- **approssimare** (nei nodi) le **derivate parziali** con formule (alle differenze finite) di derivazione numerica





Discretizzazione mediante DF

- Definizione della griglia di punti $(x_i, t_j) = (i\Delta x, j\Delta t)$, e
- Discretizzazione della funzione continua u(x,t) dalla versione discreta $u_{i,j}=u(i\Delta x, j\Delta t)$.

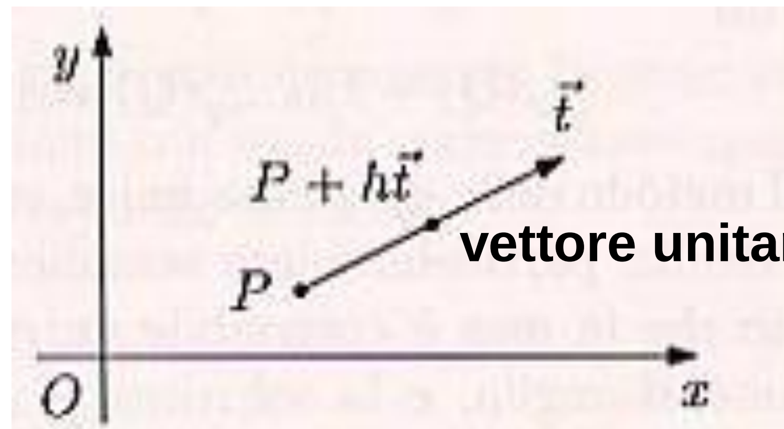


Condizioni al contorno

Condizioni al contorno con derivate direzionali, e in particolare quelle normali.

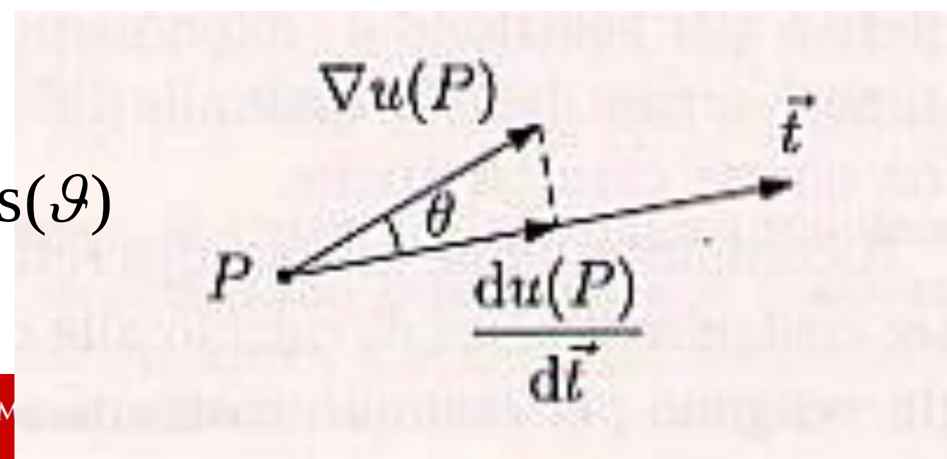
Derivata direzionale di una funzione u(x,y)=u(P) in un punto P

$$\frac{du(P)}{d\vec{t}} = \lim_{h\to 0} \frac{u(P+h\vec{t}\,)-u(P)}{h}$$



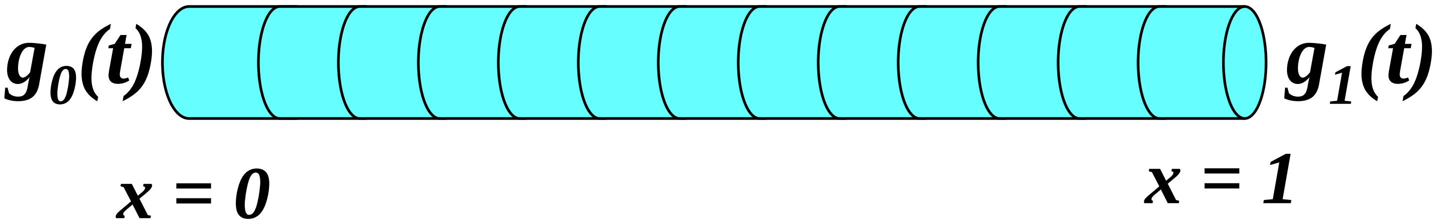
$\frac{du(P)}{d\vec{t}}$ è la componente del gradiente $\nabla u(P)$ lungo la direzione del vettore unitario $\vec{t}$

$$\frac{du(P)}{d\vec{t}} = \nabla u(P)\cdot\vec{t} = \left\|\nabla u(P)\right\|_2 \cos(\vartheta)$$



1)PDE paraboliche monodimensionali di ordine 1 calore o diffusione

Filo metallico (di lunghezza unitaria) termicamente isolato, distribuzione iniziale della temperatura nota. Gli estremi del filo sono mantenuti a temperature note, in ogni istante t>0. Vogliamo la distribuzione della temperatura u(x,t) negli istanti successivi a quello iniziale.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < 1, \quad 0 \le t \le T$$

$$\text{CI}: \quad u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$\text{CB}: \begin{cases} u(0,t) = g_0(t) \\ u(1,t) = g_1(t) \end{cases}, \qquad 0 \le t \le T$$

di Dirichlet

PDE paraboliche: calore o diffusione

Osservazione **Problema ben posto**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < 1, \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

Soluzione esatta

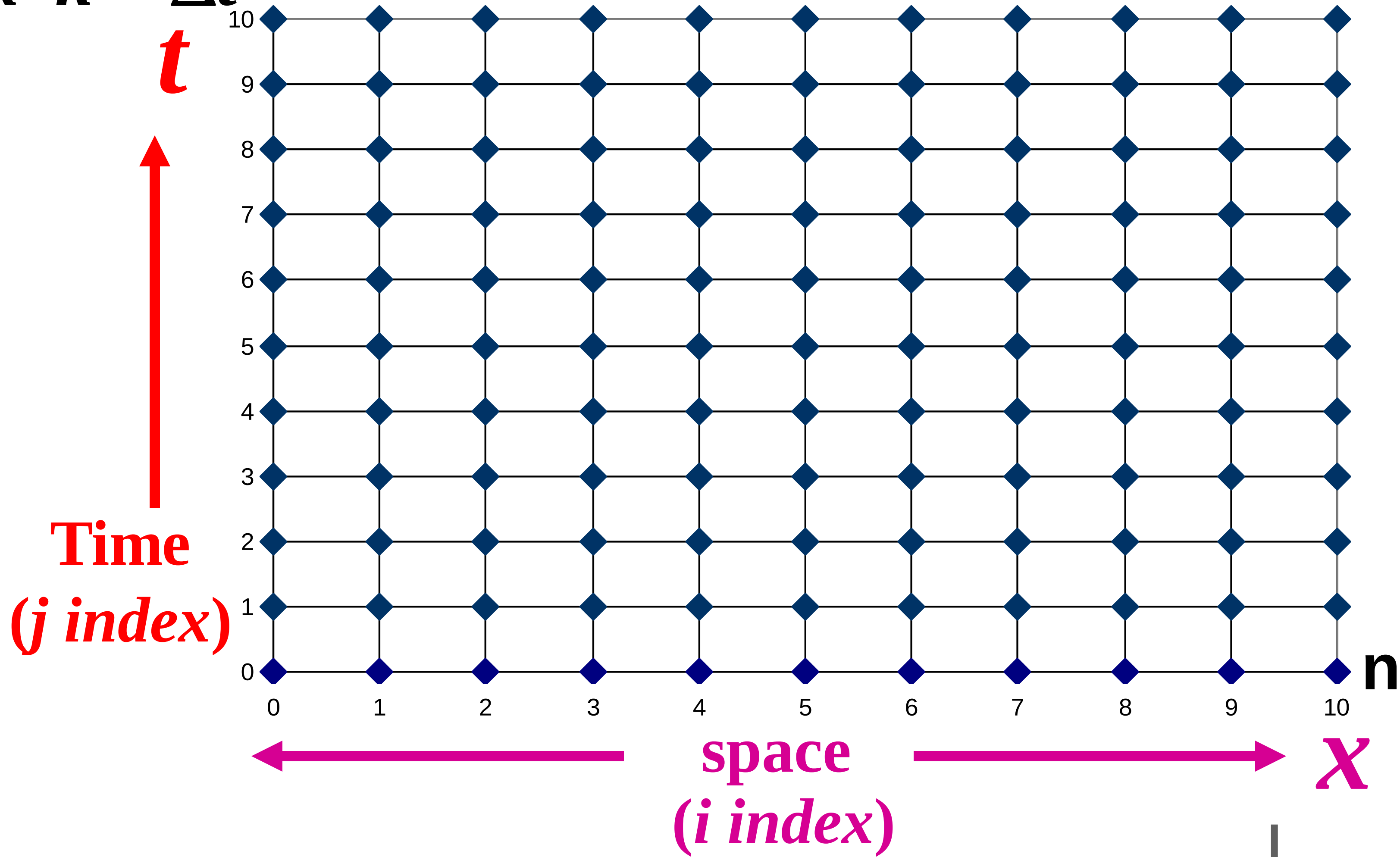
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} f(s)\,ds$$

Effetto regolarizzante, nel senso che pur avendo, per esempio, il dato iniziale *f(s)* solo limitato e continuo a tratti sull'asse x, la soluzione *u(x,t)* risulta infinitamente derivabile per ogni t>0. Inoltre $\lim_{\substack{x \to \xi \\ t \to 0}} u(x,t) = f(\xi)$

Questo comportamento è proprio delle equazioni paraboliche.

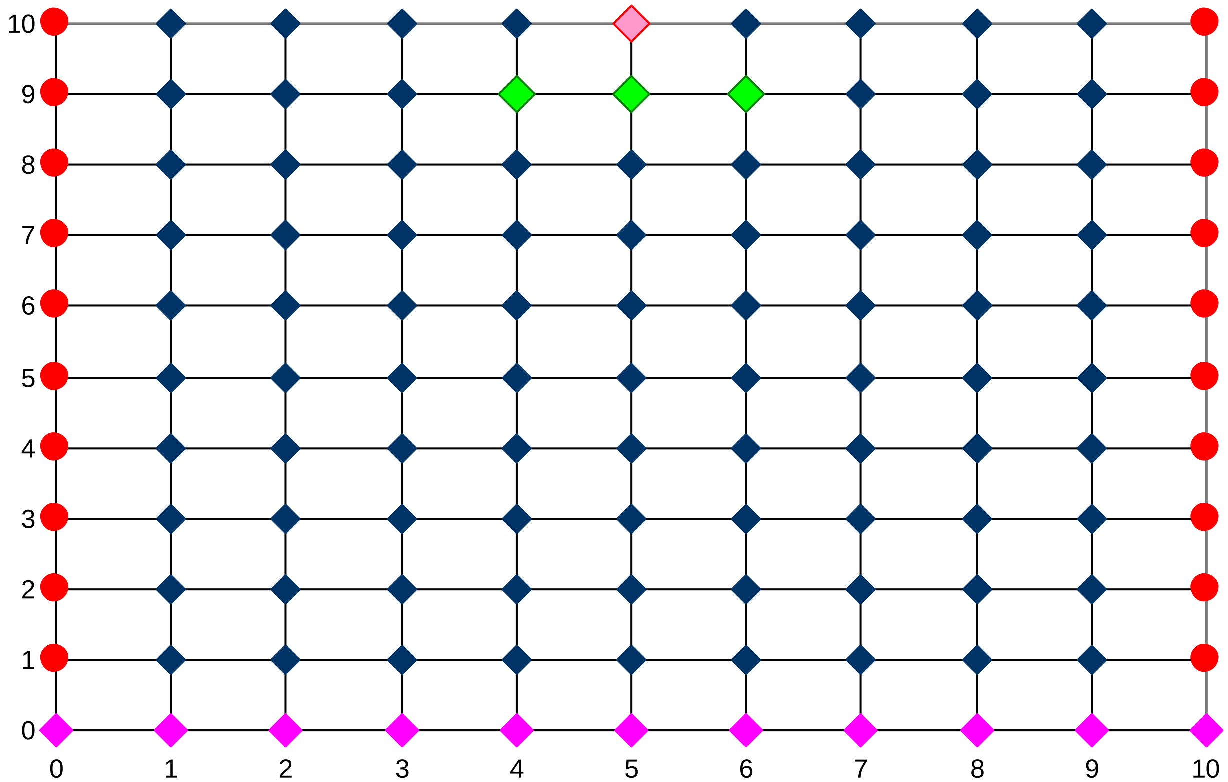
PDE paraboliche: calore o diffusione

$h = \Delta x \quad k = \Delta t$



Condizioni iniziali e al contorno

$u(0, t) = g_0(t)$

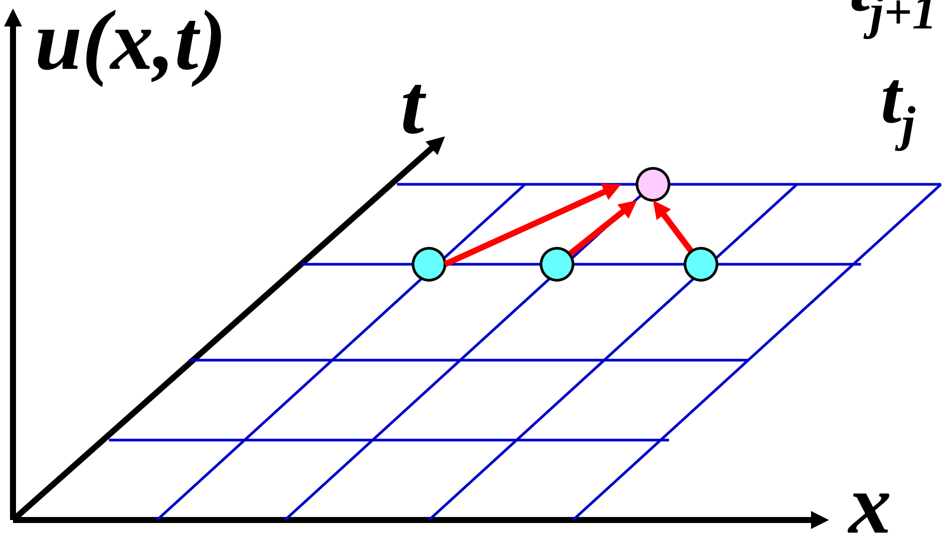


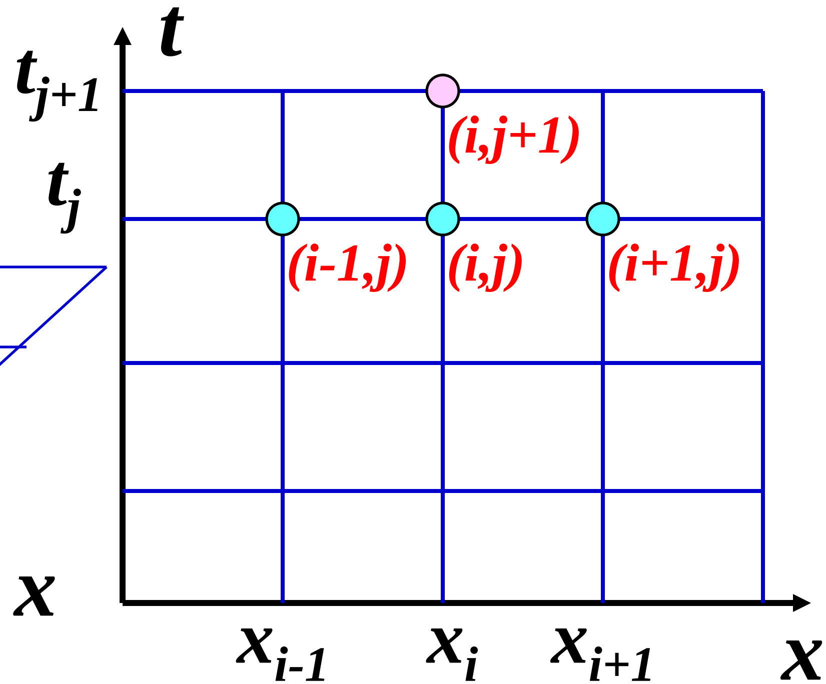
$u(1, t) = g_1(t)$

Condizioni iniziali : $u(x,0) = f(x)$

Metodo esplicito

$$sia \begin{cases} h = \Delta x = 1/n, & x_i = ih \quad i = 0,..,n \\ k = \Delta t = T/m, & t_j = jk \quad j = 0,..,m \end{cases}$$





Differenze in avanti $u_t = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + O(k)$

Differenze centrali al tempo j $u_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2)$

Metodo esplicito

$$u_t = u_{xx}$$

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \\ &= ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \end{aligned}$$

$$r = \frac{k}{h^2} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$CI: u_{i,0} = u_0(x_i) \quad i = 0,1,..,n$$

$$CB: u_{0,t} = g_0(t), \quad u_{n,t} = g_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ .. \\ \\ .. \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & 0 \\ r & 1-2r & r & \\ & .. & .. & r \\ 0 & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ .. \\ \\ .. \\ u_{n-1,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ru_{0,j} \\ 0 \\ \\ 0 \\ ru_{n,j} \end{bmatrix}$$

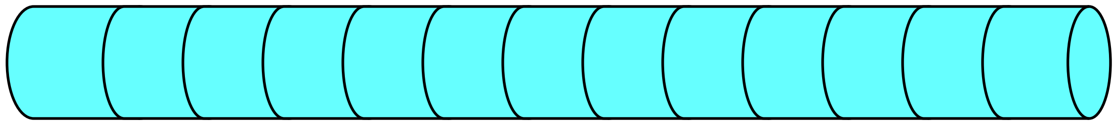
$$U_{j+1} = AU_j + v \qquad A \in R^{(n-1)x(n-1)} \qquad v, U \in R^{(n-1)}$$

Stabilità condizionata: $0 < r \leq 0.5$

Equazione del calore con bordi isolati

No flusso di calore ai bordi *x = 0* e *x = 1*

$x = 0$ $\quad$ $x = 1$



$u_x(0,t) = 0$ $\quad$ $u_x(1,t) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < 1,\ 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$

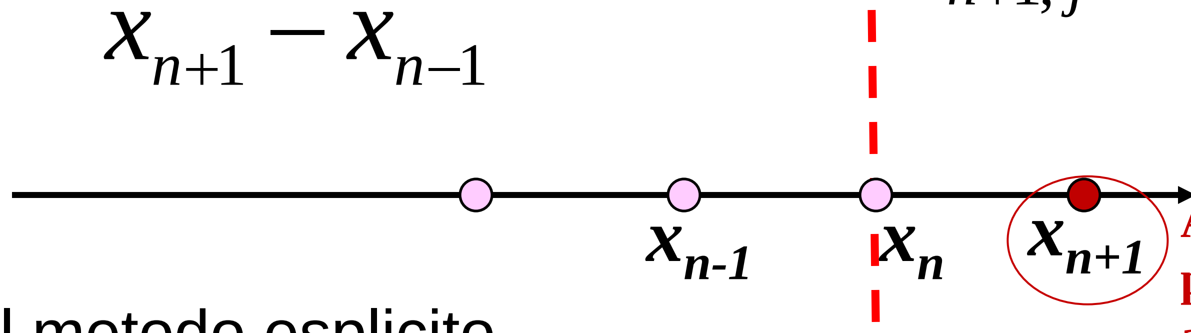
CB:
di Neumann

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}, \qquad 0 \le t \le T$$

Condizioni al contorno di Neumann omogenee: bordi isolati

No flusso di calore a *x = 1* $u_x(1,t)=0$

$$u_x(1,t_j)=\frac{u_{n+1,j}-u_{n-1,j}}{x_{n+1}-x_{n-1}}=0 \Rightarrow u_{n+1,j}=u_{n-1,j}$$



Aggiunta punto fittizio alla griglia
ghost point

Applicando il metodo esplicito,
se i=n, si ha un'equazione extra :

$$\begin{aligned} u_{n,j+1} &= ru_{n-1,j}+(1-2r)u_{n,j}+ru_{n+1,j} \\ &= 2ru_{n-1,j}+(1-2r)u_{n,j} \end{aligned}$$

$$CI: u_{i,0} = u_0(x_i) \quad i = 0,1,..,n$$

$$CB: u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

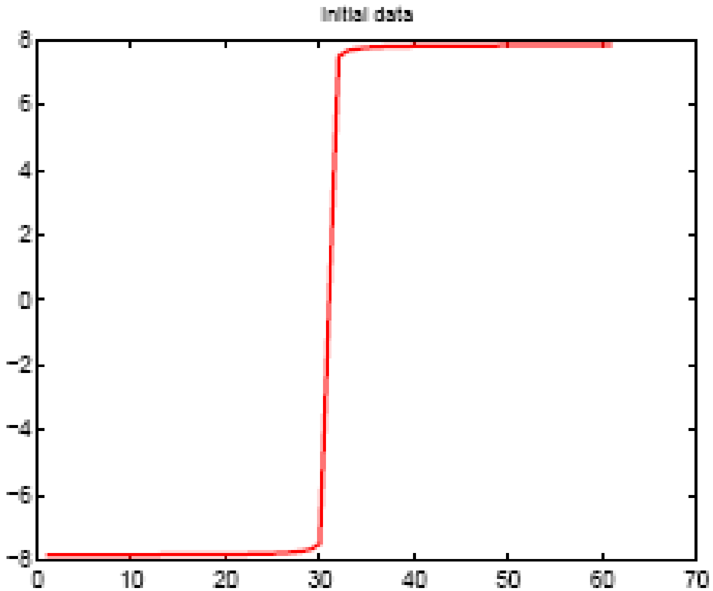
$$\begin{bmatrix} u_{0,j+1} \\ u_{1,j+1} \\ .. \\ u_{i,j+1} \\ .. \\ u_{n-1,j+1} \\ u_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & 2r & 0 & \\ r & 1-2r & r & \\ & .. & .. & r \\ & & 2r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ .. \\ u_{i,j} \\ .. \\ u_{n-1,j} \\ u_{n,j} \end{bmatrix}$$

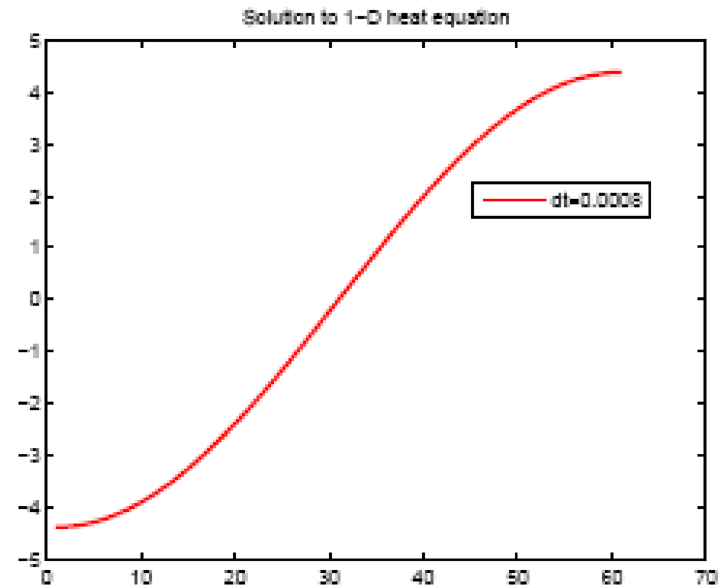
$$U_{j+1} = AU_j + v \quad A \in R^{(n+1)x(n+1)} \; v, U \in R^{n+1}$$

Errore di troncamento $\quad O(k + h^2)$

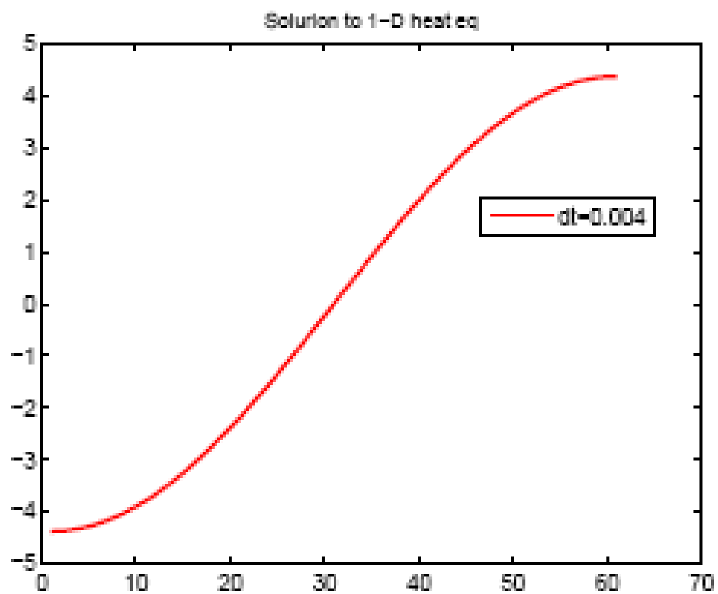
Stabilità condizionata: $0 < r \leq 0.5$

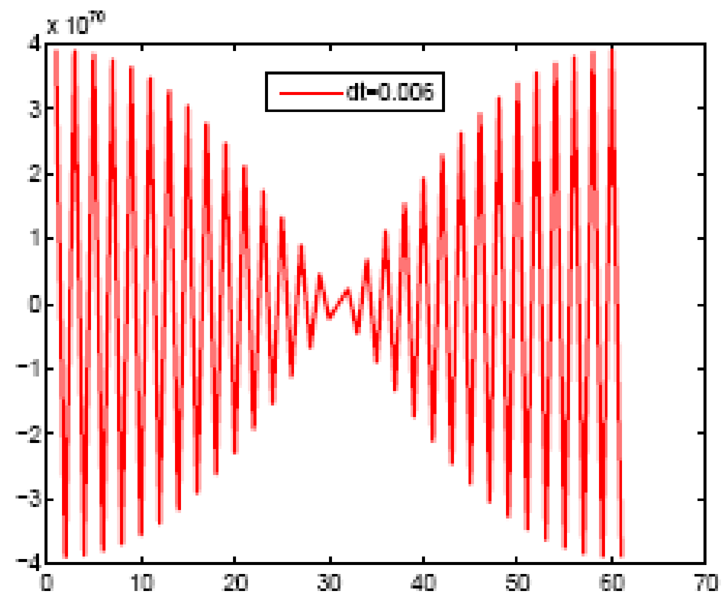
Stabilità: esempio eq. calore





u_0 iniziale





Analisi dei metodi alle differenze finite

- **Consistenza**: Per un dato schema numerico, l'errore di troncamento locale è l'errore che si genera pretendendo che la soluzione esatta verifichi lo schema numerico stesso. Se l'*errore di troncamento*

$$\tau(k,h) = \max_{j,n} \left|\tau_j^n\right| \qquad k = \Delta t$$

  tende a zero quando k e h tendono a zero, indipendentemente, allora lo schema numerico si dirà *consistente*
- Si dirà inoltre che uno schema numerico è ***accurato all'ordine p in tempo e all'ordine q in spazio*** *(per opportuni interi p e q), se per una soluzione sufficientemente* regolare del problema esatto, si ha

$$\tau(k,h) = O(k^p + h^q)$$

Analisi dei metodi alle differenze finite

- Diremo infine che uno schema è ***convergente*** *(nella norma del massimo) se*

$$\lim_{k,h\to 0}(\max|y(x_j,t^n)-u_{j,n}|)=0$$

- **STABILITA'**

Perturbazioni sui dati iniziali (condizioni iniziali) non sono amplificate dal procedimento numerico nella soluzione.

Schema numerico in generale è

$$(*) \qquad U_{j+1}=A(k)U_j+b_j(k)$$

$$A(k)\in R^{mxm} \quad griglia\ h=\frac{1}{m+1} \quad b(k)\in R^m$$

Analisi dei metodi alle differenze finite

Def. Un metodo alle differenze per un probema lineare della forma (*) è Lax-Richtmyer stabile se per ogni punto (X,T) della griglia esiste una costante C_T>0 tale che

$$\exists C_T > 0 \quad t.c. \quad \left\| A(k)^j \right\| \leq C_T$$

$$\forall k > 0, \text{ interi } j \text{ per } kj \leq T$$

Teorema di equivalenza di Lax:

Un metodo lineare consistente della forma (*) è convergente se e solo se è Lax-Richtmyer stabile

Calcolo stabilità del Metodo esplicito

Soluzione esatta al tempo j: U_j

si determina moltiplicando la matrice tridiagonale A per la soluzione al tempo j-esimo:

$$U_{j+1} = AU_j$$

Soluzione calcolata

$$\bar{U}_j = U_j + E \qquad E = k\tau^n$$

Allora la soluzione calcolata al tempo j+1:

$$A\bar{U}_j = A(U_j + E) = AU_j + AE$$

dopo *m* passi, l'effetto dell'errore E è diventato

$$A^m E$$

Calcolo stabilità del Metodo esplicito

$$\left\| A^m E \right\| \le |\lambda|^m \left\| E \right\|$$

- Dove λ rappresenta l'autovalore dominante di A.
- La stabilità è allora assicurata se: $|\lambda| \le 1$
- Gli autovalori di A sono:

$$\lambda_i = 1 - 4r \sin^2 \frac{i\pi}{2N} \quad i = 1,..,N-1$$

$$raggio \quad spettrale: \quad \rho(A) \le \max(1, 4r - 1)$$

- Lo schema risulta pertanto stabile solo quando $r \le 0.5$
- Ovvero

$$r = \frac{k}{h^2} \rightarrow k(=\Delta t) \le \frac{h^2}{2}$$

Metodo esplicito

$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$

- Stabile

$$r = 0.01 \Rightarrow u_{i,j+1} = 0.01\,u_{i-1,j} + 0.98\,u_{i,j} + 0.01\,u_{i+1,j}$$

$$r = 0.1 \Rightarrow u_{i,j+1} = 0.1\,u_{i-1,j} + 0.8\,u_{i,j} + 0.1\,u_{i+1,j}$$

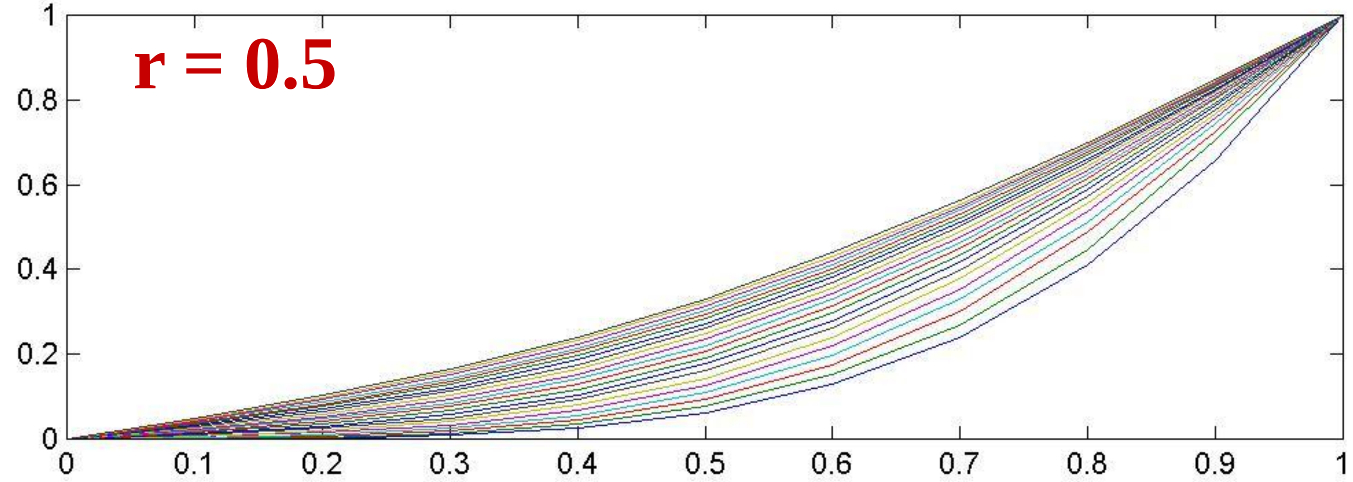
$$r = 0.4 \Rightarrow u_{i,j+1} = 0.4\,u_{i-1,j} + 0.2\,u_{i,j} + 0.4\,u_{i+1,j}$$

$$r = 0.5 \Rightarrow u_{i,j+1} = 0.5\,u_{i-1,j} + 0.5\,u_{i+1,j}$$

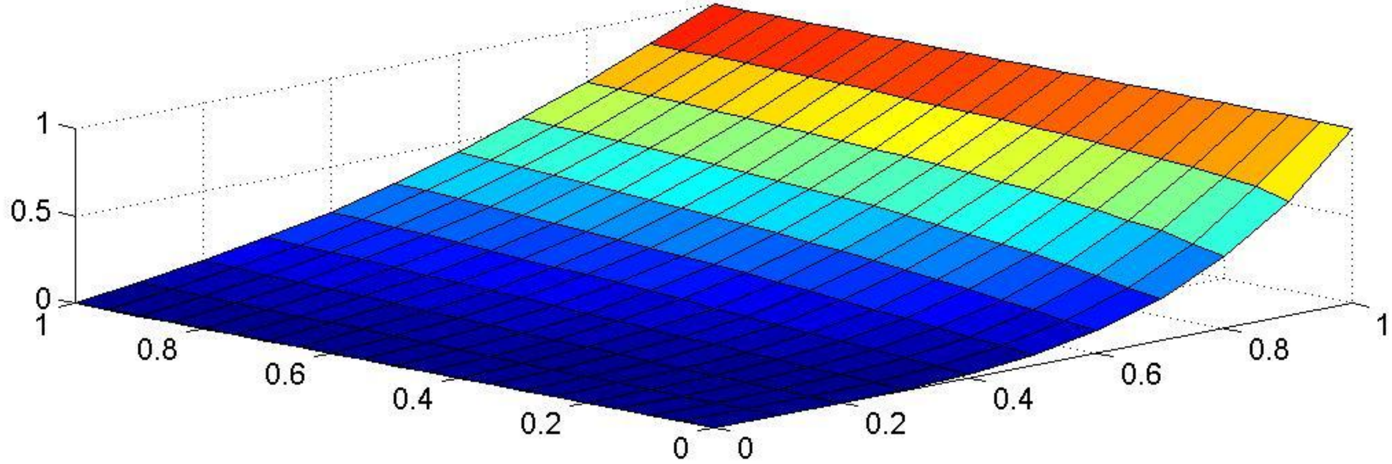
- Instabile (coefficienti negativi)

$$\begin{cases} r = 1 \Rightarrow u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j} \\ r = 10 \Rightarrow u_{i,j+1} = 10\,u_{i-1,j} - 19\,u_{i,j} + 10\,u_{i+1,j} \\ r = 100 \Rightarrow u_{i,j+1} = 100u_{i-1,j} - 199\,u_{i,j} + 100u_{i+1,j} \end{cases}$$

Equazione del calore: metodo esplicito



Accurato dell'ordine di $O(h^2)$, poichè richiesto $k=O(h^2)$ per stabilità



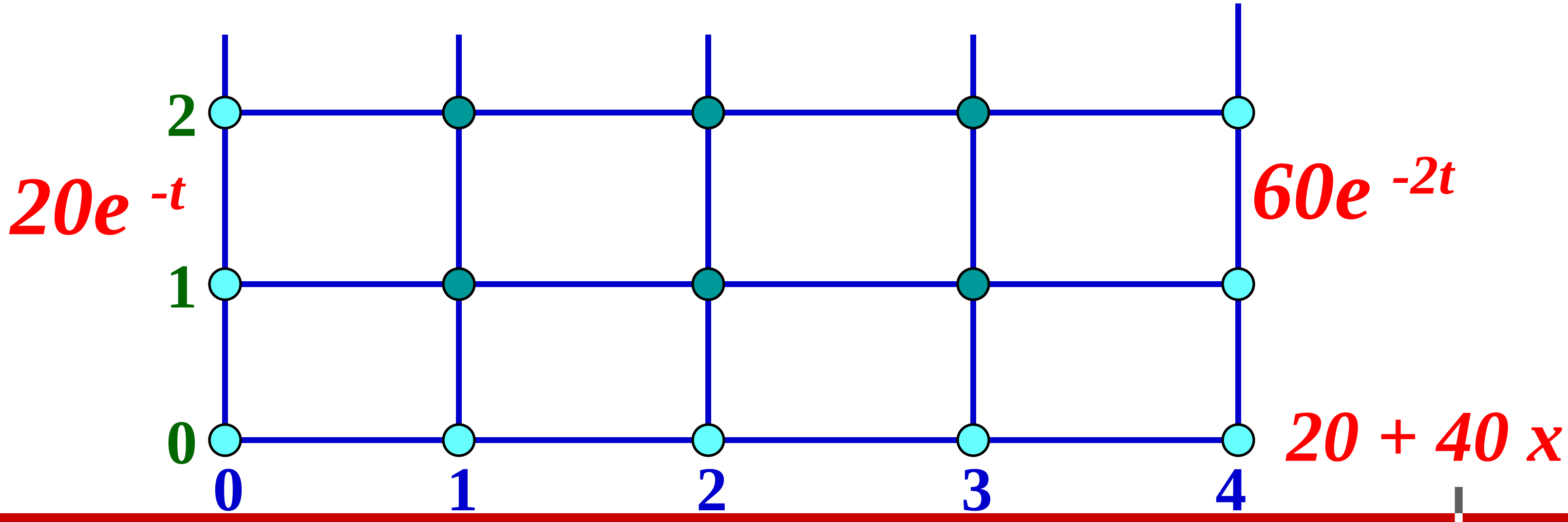
ESEMPIO: Metodo esplicito, soluzione stabile

- Equazione Calore (PDE Parabolica)

$$u_t = c u_{xx};\ 0 \le x \le 1$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 20 + 40x \\ u(0,t) = 20e^{-t},\ u(1,t) = 60e^{-2t} \end{cases}$$

c = 0.5, h = 0.25, k = 0.05



ESEMPIO: Metodo esplicito, soluzione stabile

- **Metodo Esplicito**

$$r = \frac{ck}{h^2} = \frac{(0.5)(0.05)}{(0.25)^2} = 0.4$$

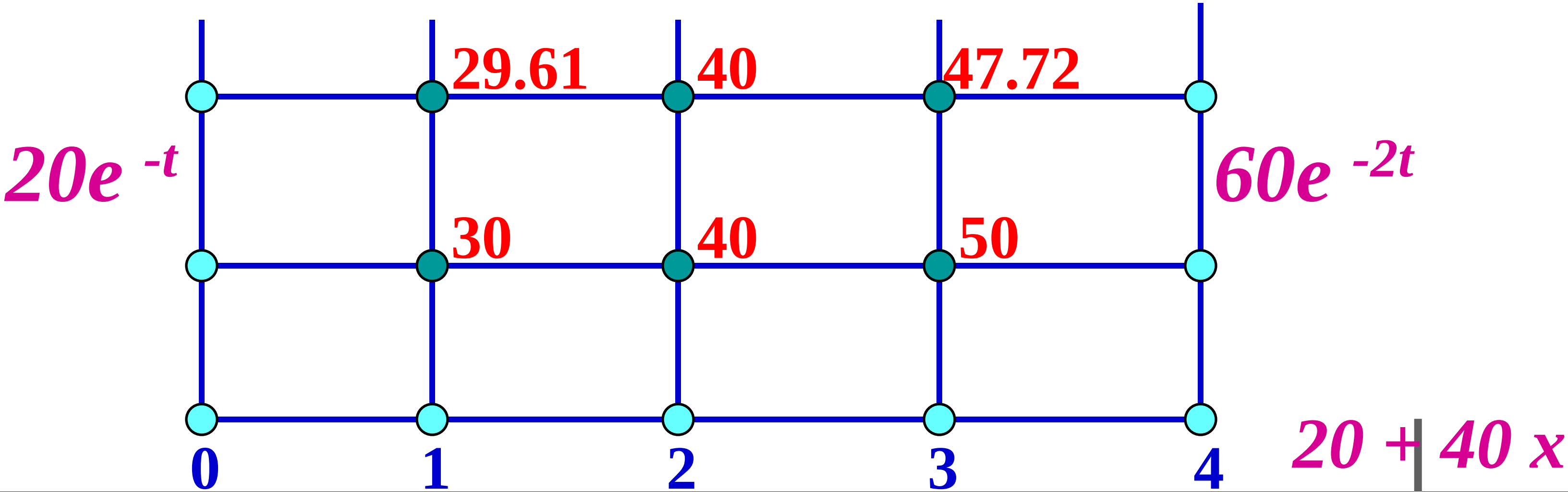
$$u_{i,j+1} = ru_{i-1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}$$
$$= 0.4u_{i-1,j} + 0.2u_{i,j} + 0.4u_{i+1,j}$$

- Primo passo: t = 0.05

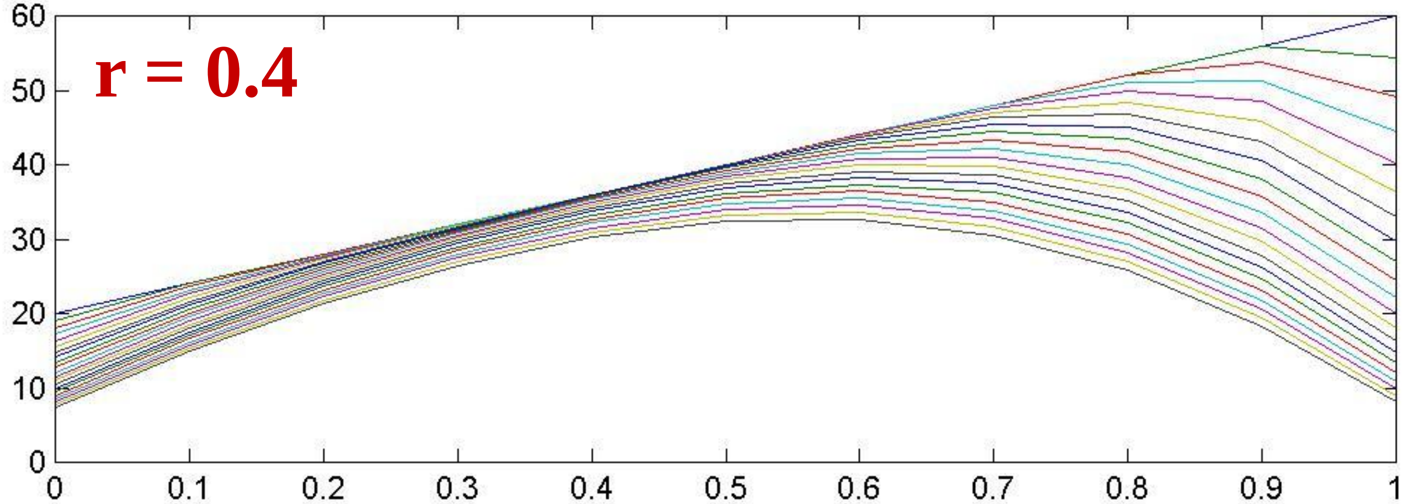
$$\begin{cases} u_{0,1} = 20e^{-0.05} = 19.02458849 \\ u_{1,1} = 0.4u_{0,0} + 0.2u_{1,0} + 0.4u_{2,0} = 0.4(20) + 0.2(30) + 0.4(40) = 30 \\ u_{2,1} = 0.4u_{1,0} + 0.2u_{2,0} + 0.4u_{3,0} = 0.4(30) + 0.2(40) + 0.4(50) = 40 \\ u_{3,1} = 0.4u_{2,0} + 0.2u_{3,0} + 0.4u_{4,0} = 0.4(40) + 0.2(50) + 0.4(60) = 50 \\ u_{4,1} = 60e^{-0.10} = 54.29024508 \end{cases}$$

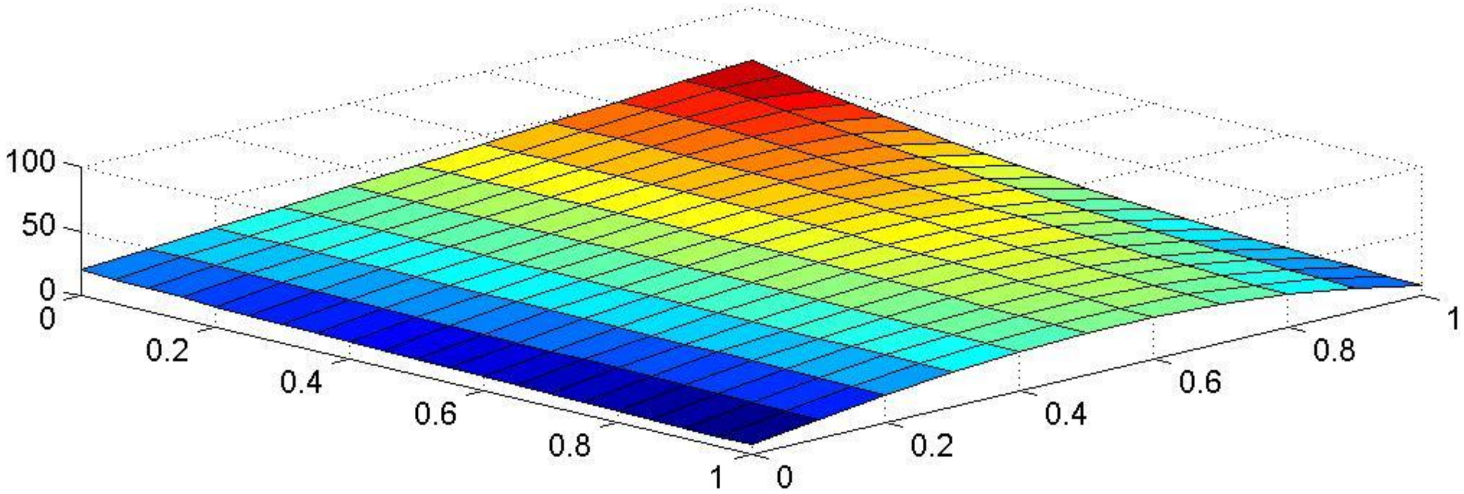
- Secondo passo: t = 0.10

$$
\begin{cases}
u_{0,2} = 20e^{-0.10} = 18.09674836 \\
u_{1,2} = 0.4u_{0,1} + 0.2u_{1,1} + 0.4u_{2,1} \\
\quad = 0.4(19.02458849) + 0.2(30) + 0.4(40) = 29.6098354 \\
u_{2,2} = 0.4u_{1,1} + 0.2u_{2,1} + 0.4u_{3,1} = 0.4(30) + 0.2(40) + 0.4(50) = 40 \\
u_{3,2} = 0.4u_{2,1} + 0.2u_{3,1} + 0.4u_{4,1} \\
\quad = 0.4(40) + 0.2(50) + 0.4(54.2924508) = 47.71609803 \\
u_{4,2} = 60e^{-0.20} = 49.12384518
\end{cases}
$$

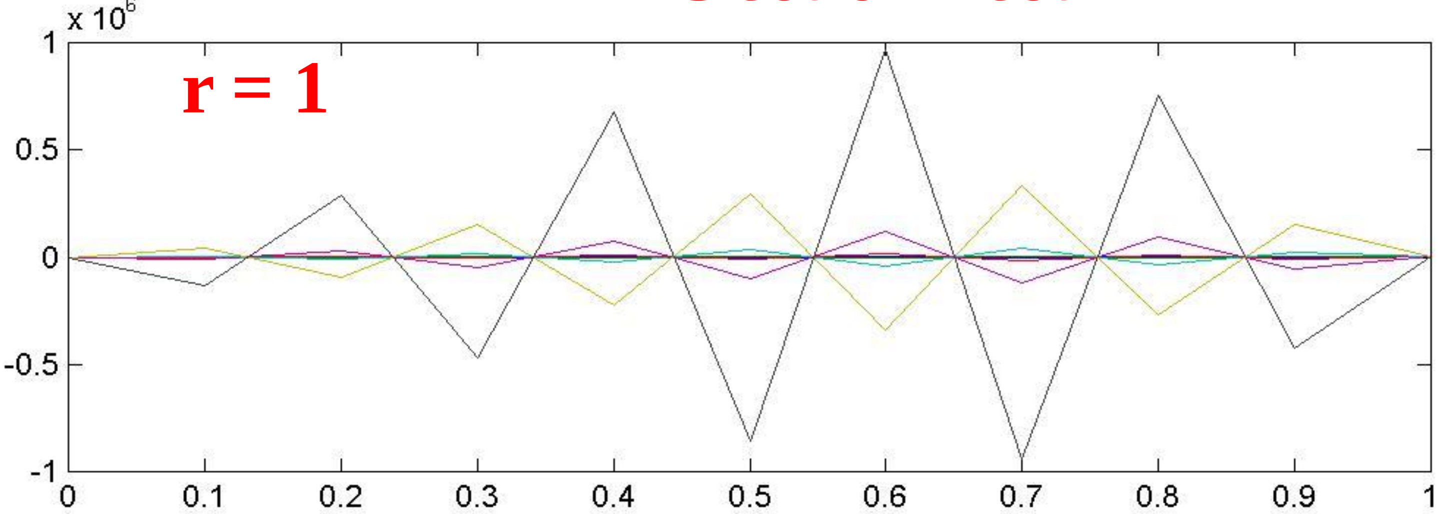


Eq. del calore: BC dipendono dal tempo

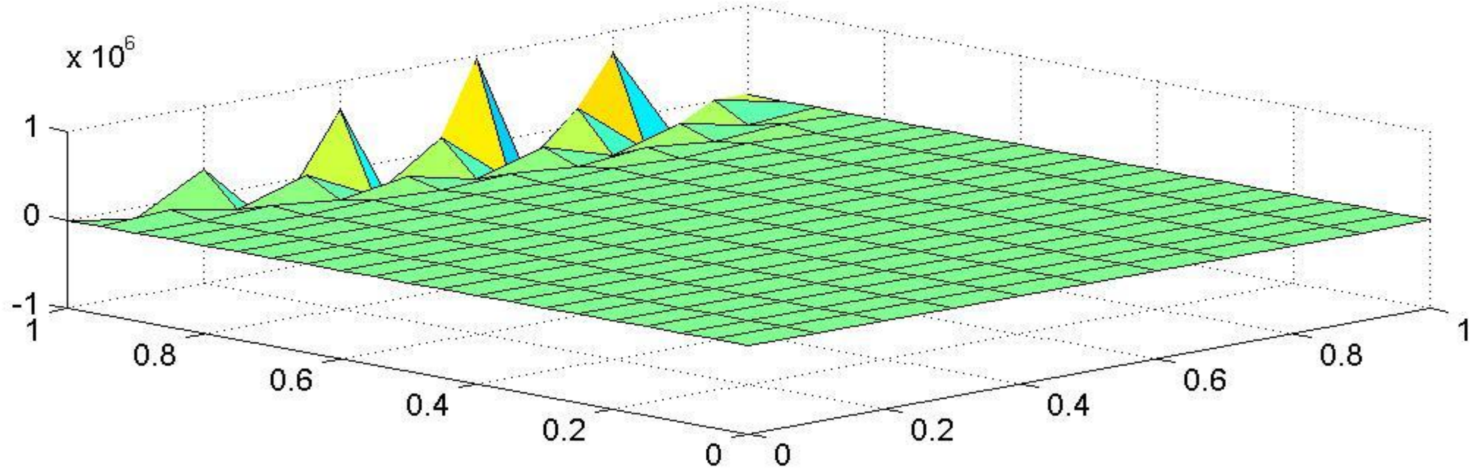




Metodo di Eulero esplicito: INstabilità



Instabile !!



Limiti di Stabilità

- Stabilità per il metodo esplicito
- Si deve verificare che

$$r\left(=\frac{ck}{h^2}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \mathbf{o} \quad \Delta \mathbf{t} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \frac{\Delta \mathbf{x}^2}{\mathbf{c}}$$

- Passiamo ad un metodo implicito per evitare l' instabilità

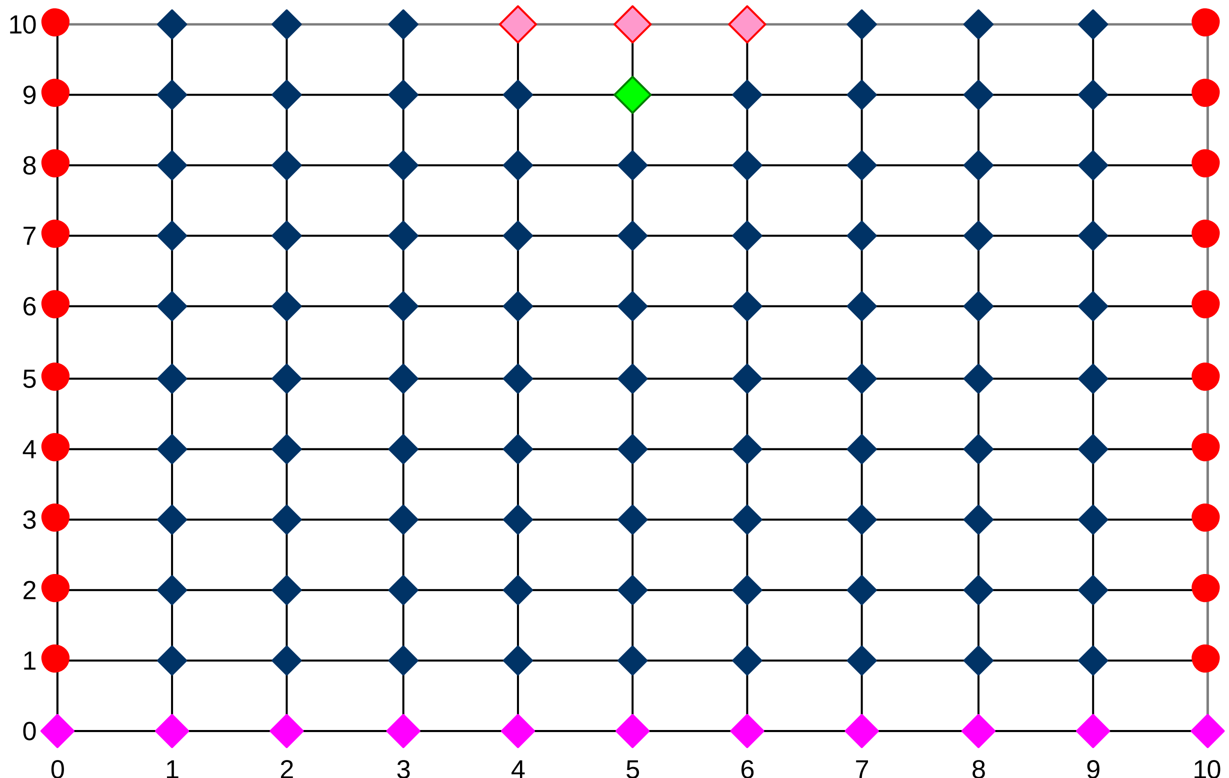
Metodo Implicito

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < 1, \quad 0 \le t \le T$$

$$\text{CI}: \quad u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$\text{CB}: \quad \begin{cases} u(0,t) = g_0(t) \\ u(1,t) = g_1(t) \end{cases}, \qquad 0 \le t \le T$$

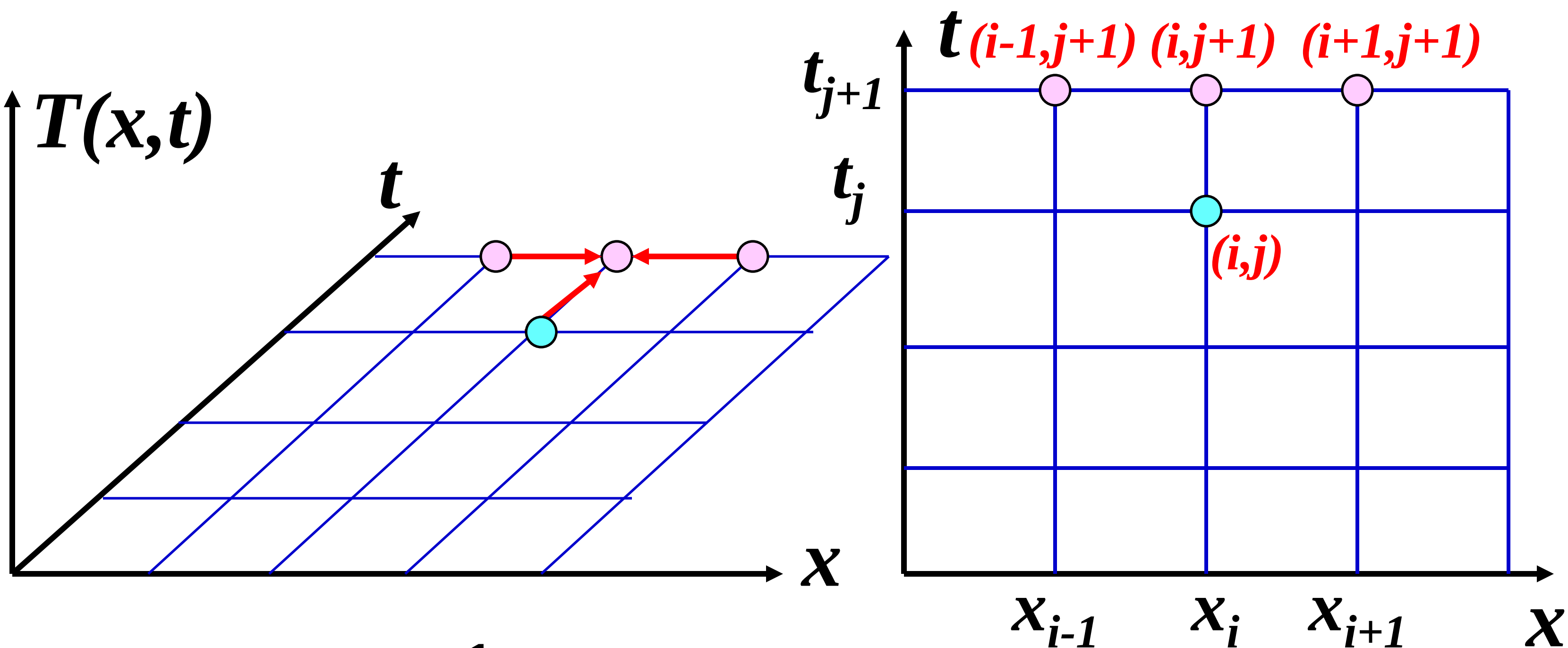
$u(0, t) = g_0(t)$



$u(1, t) = g_1(t)$

Condizioni Iniziali : $u(x,0) = f(x)$

Metodo Implicito



Differenza in avanti $u_t = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j})$ +O(k)

Differenza centrale al tempo j+1 $cu_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$ +O(h^2)

Metodo Implicito

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = c\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$$

$$\boxed{u_{i,j} = -ru_{i-1,j+1} + (1+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1}}$$

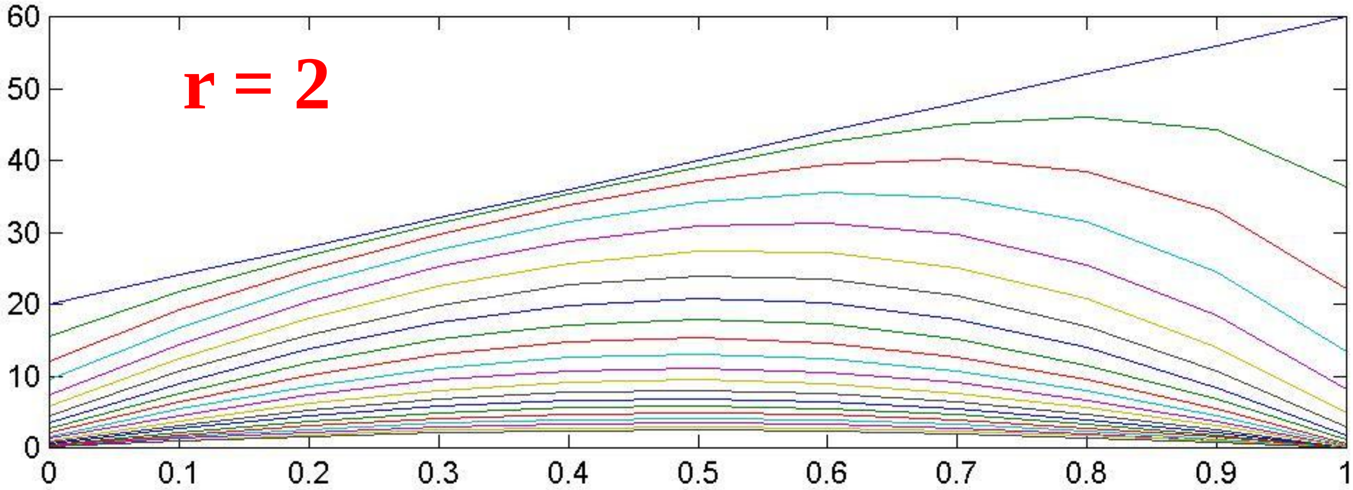
Sistema di eq. da risolvere ad ogni time step t con Matrice Tridiagonale (algoritmo di Thomas)

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & -r & 1+2r & -r & \\ & & \ddots & \ddots & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,j} + ru_{0,j+1} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \\ u_{n-1,j} + ru_{n,j+1} \end{Bmatrix}$$

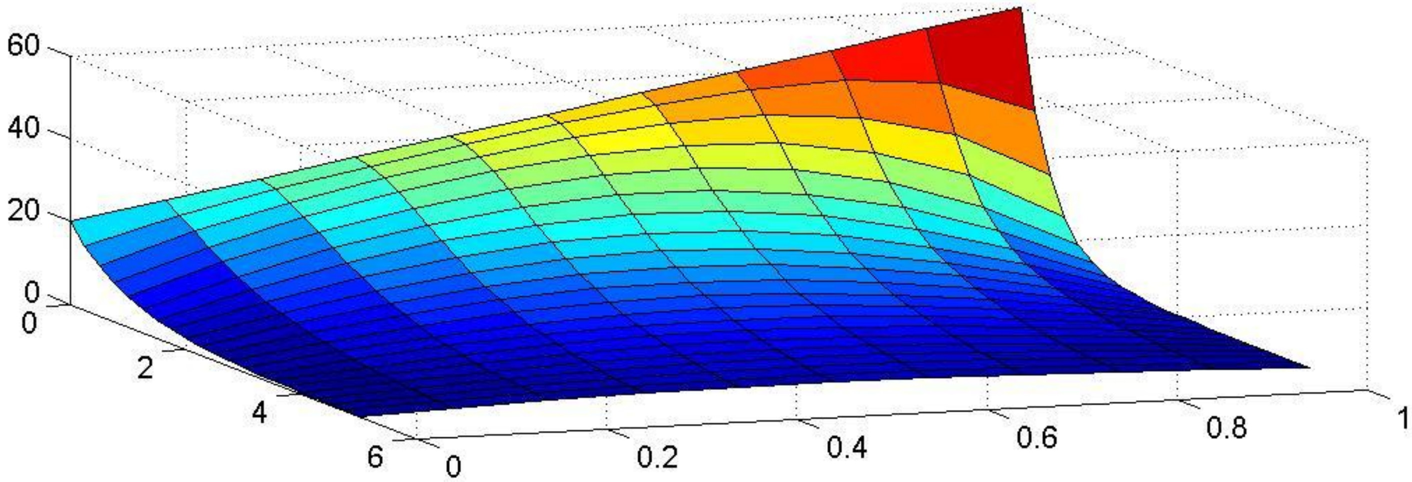
$$AU_{j+1} = U_j$$

Incondizionatamente stabile

Metodo Implicito



Incondizionatamente stabile, accurato del primo ordine in t



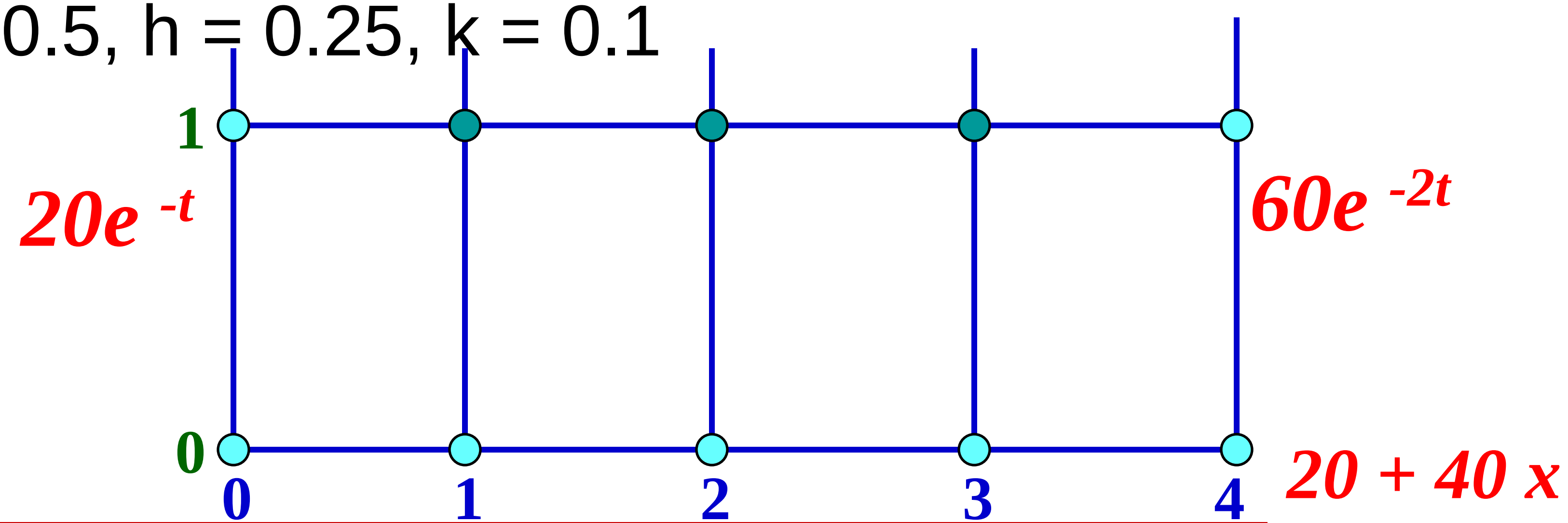
ESEMPIO: Metodo implicito, soluzione stabile

- Equazione Calore (PDE Parabolica)

$$u_t = c u_{xx};\ 0 \le x \le 1$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 20 + 40x \\ u(0,t) = 20e^{-t},\ u(1,t) = 60e^{-2t} \end{cases}$$

c = 0.5, h = 0.25, k = 0.1



ESEMPIO: Metodo implicito, soluzione stabile

- **Metodo di Eulero implicito**

$$r = \frac{ck}{h^2} = \frac{(0.5)(0.10)}{(0.25)^2} = 0.8$$

$$(-r)u_{i-1,j+1} + (1+2r)u_{i,j+1} + (-r)u_{i+1,j+1} = u_{i,j}$$

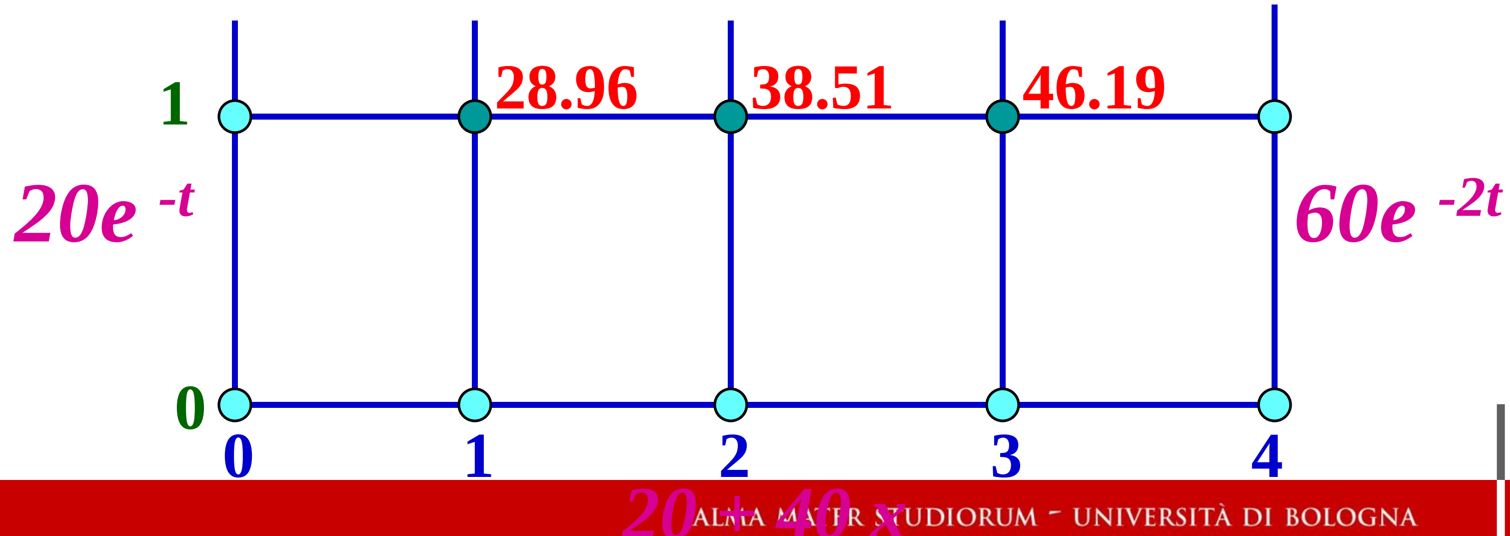
$$(-0.8)u_{i-1,j+1} + (2.6)u_{i,j+1} + (-0.8)u_{i+1,j+1} = u_{i,j}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 \\ -r & 1+2r & -r \\ 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,0} + ru_{0,1} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} + ru_{4,1} \end{Bmatrix}$$

Soluzione sistema tridiagonale

$$\begin{bmatrix} 2.6 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 2.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 2.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 + 0.8(20e^{-0.1}) \\ 40 \\ 50 + 0.8(60e^{-0.2}) \end{Bmatrix} -$$

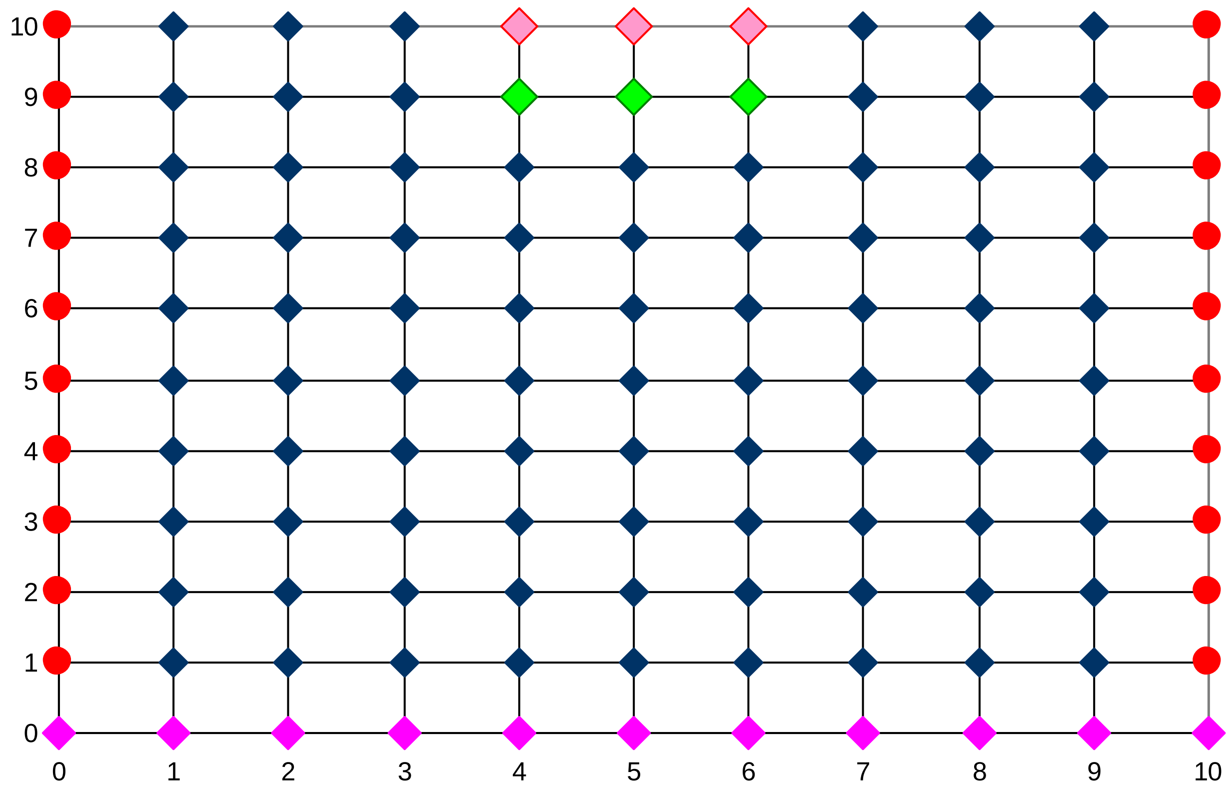
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.95515793 \\ 38.50751457 \\ 46.19426454 \end{Bmatrix}$$



Metodo Implicito di Crank-Nicolson

- Metodo Implicito : 1° ordine in tempo
- Crank-Nicolson : 2° ordine in tempo

$u(0, t) = g_0(t)$



$u(1, t) = g_1(t)$

Condizioni Iniziali : $u(x,0) = f(x)$

Metodo Implicito di Crank-Nicolson

- Metodo di Crank-Nicolson per l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < 1, \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

- Integriamo rispetto al tempo e usiamo il metodo dei trapezi per risolvere l'integrale al secondo membro

$$u(x,t+\Delta t) - u(x,t) = a\int_t^{t+\Delta t} u_{xx}(x,s)ds$$

$$u(x,t+\Delta t) - u(x,t) = a\frac{\Delta t}{2}(u_{xx}(x,t) + u_{xx}(x,t+\Delta t))$$

$$-\frac{1}{12}\Delta t^3 u_{xxtt}(x,\theta_t)$$

Metodo Implicito di Crank-Nicolson

Sostituiamo le derivate con differenze finite (risulta una media delle differenze centrali a due time step successivi j e j+1)

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{a}{2h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{a}{2h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) + O(h^2) + O(k^2)$$

Metodo Implicito di Crank-Nicolson

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1}-u_{i,j})=\frac{1}{2h^2}(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j})+\frac{1}{2h^2}(u_{i-1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1})$$

Otteniamo il seguente schema implicito

$$-\frac{r}{2}u_{i-1,j+1}+(1+r)u_{i,j+1}-\frac{r}{2}u_{i+1,j+1}=\frac{r}{2}u_{i-1,j}+(1-r)u_{i,j}+\frac{r}{2}u_{i+1,j}$$

Sistema di N-1 equazioni lineari con matrice tridiagonale

$$AU_{j+1}=BU_j$$

- **Stabilità**

$$U_{j+1} = A^{-1} B U_j$$

$$\rho(A^{-1}B) < 1 \qquad \text{autovalori di } A^{-1}B:$$

$$\lambda_i = \frac{2 - 2r\sin^2\frac{i\pi}{2N}}{2 + 2r\sin^2\frac{i\pi}{2N}} < 1 \quad i = 2,.., N-1$$

Incondizionatamente stabile,

- **Consistenza** $O(k^2 + h^2)$

accurato del secondo ordine nello spazio e nel tempo

Θ-Metodo

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{c\theta}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$
$$+ \frac{c(1-\theta)}{h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$$

Media pesata delle derivate spaziali tra due livelli temporali j e j+1.

$$\begin{cases} \theta = 0: & \text{schema implicito} \\ \theta = 1: & \text{schema esplicito} \\ \theta = 1/2: & \text{schema Crank-Nicolson} \end{cases}$$

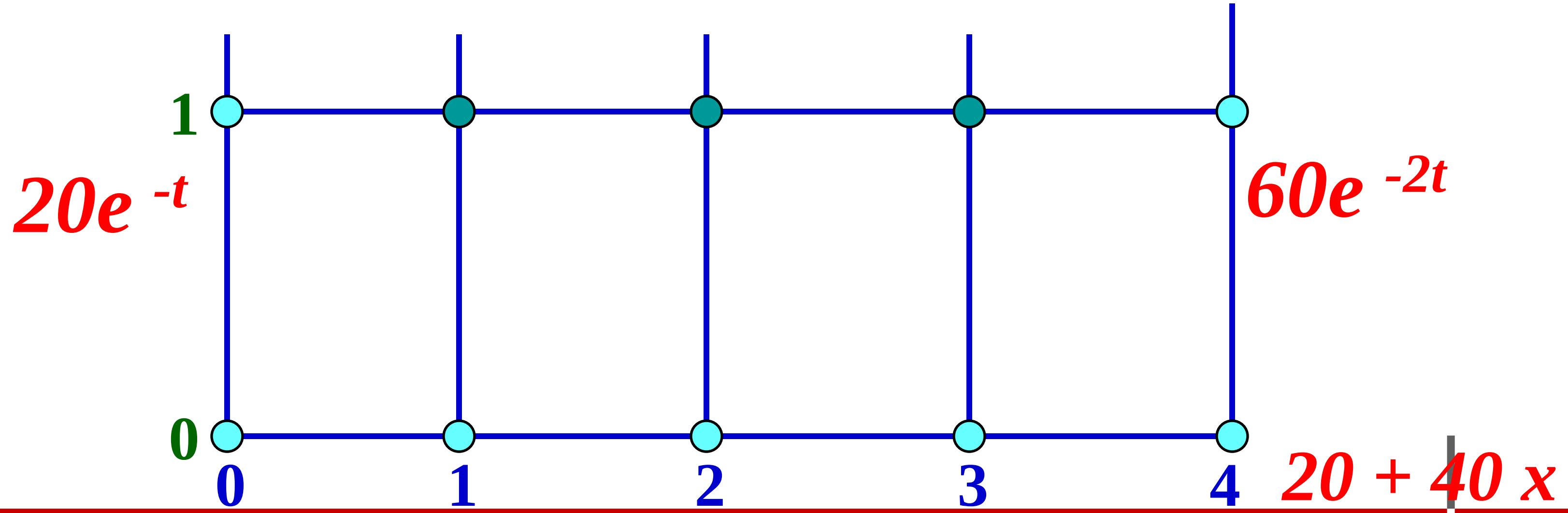
ESEMPIO: Metodo CN, soluzione stabile

- Equazione Calore (PDE Parabolica)

$$u_t = c u_{xx};\ 0 \le x \le 1$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 20 + 40x \\ u(0,t) = 20e^{-t},\ u(1,t) = 60e^{-2t} \end{cases}$$

c = 0.5, h = 0.25, k = 0.1



ESEMPIO: Metodo CN, soluzione stabile

- **Metodo Crank-Nicolson**

$$r = \frac{ck}{h^2} = \frac{(0.5)(0.10)}{(0.25)^2} = 0.8$$

$$-\frac{r}{2}u_{i-1,j+1} + (1+r)u_{i,j+1} - \frac{r}{2}u_{i+1,j+1} = \frac{r}{2}u_{i-1,j} + (1-r)u_{i,j} + \frac{r}{2}u_{i+1,j}$$

$$-0.4u_{i-1,j+1} + 1.8u_{i,j+1} - 0.4u_{i+1,j+1} = 0.4u_{i-1,j} + 0.2u_{i,j} + 0.4u_{i+1,j}$$

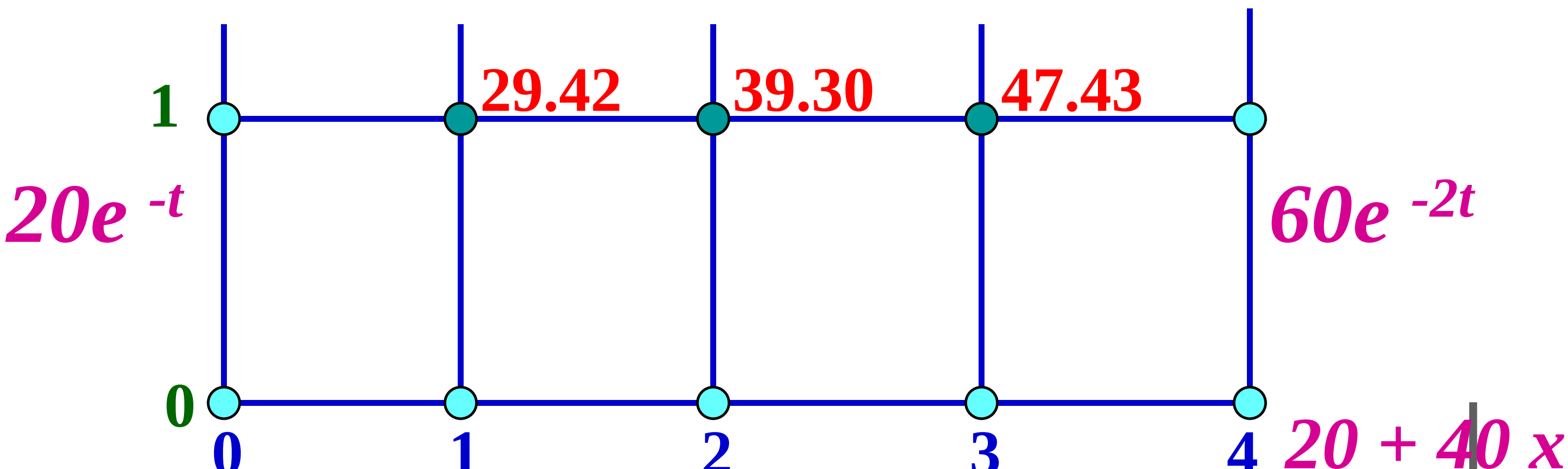
- **Matrice Tridiagonale (r = 0.8)**

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ 0 & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r}{2}u_{0,0} + (1-r)u_{1,0} + \frac{r}{2}u_{2,0} + \frac{r}{2}u_{0,1} \\ \frac{r}{2}u_{1,0} + (1-r)u_{2,0} + \frac{r}{2}u_{3,0} \\ \frac{r}{2}u_{2,0} + (1-r)u_{3,0} + \frac{r}{2}u_{4,0} + \frac{r}{2}u_{4,1} \end{Bmatrix}$$

Soluzione sistema tridiagonale

$$\begin{bmatrix} 1.8 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 1.8 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4(20) + 0.2(30) + 0.4(40) + 0.4(20e^{-0.1}) \\ 0.4(30) + 0.2(40) + 0.4(50) \\ 0.4(40) + 0.2(50) + 0.4(60) + 0.4(60e^{-0.2}) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 37.23869934 \\ 40 \\ 69.64953807 \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29.42144598 \\ 39.29975855 \\ 47.42746748 \end{Bmatrix}$$



Coefficiente di diffusione non costante

$$u_t = c u_{xx}$$

c coefficiente di diffusione c>0, in generale, c(x,t)>0 dipende da x e t

Esplicito

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c_{i,j} k}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$k \le \frac{c_{i,j}}{h^2}, \qquad k \le \frac{\bar{c}_j}{h^2} \qquad \bar{c} = \max_i c_{i,j}$$

Implicito

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{c_{i,j+1} k}{h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$$

ϴ-Metodo

$$c_{i,j+1/2} = (c_{i,j} + c_{i,j+1})/2$$

oppure

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{c_{i,j}\theta}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{c_{i,j+1}(1-\theta)}{h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi