Metodi Numerici per Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali (3)

Metodi alle differenze Finite

PDE - Equazioni di tipo ellittico

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathrm{R}^2 \qquad \Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

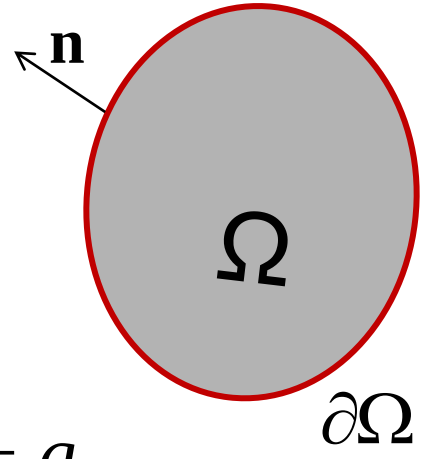
Equazione di Poisson

f=0 **eq. di Laplace**

Condizione di Dirichelet $$u\big|_{\partial\Omega} = g$$

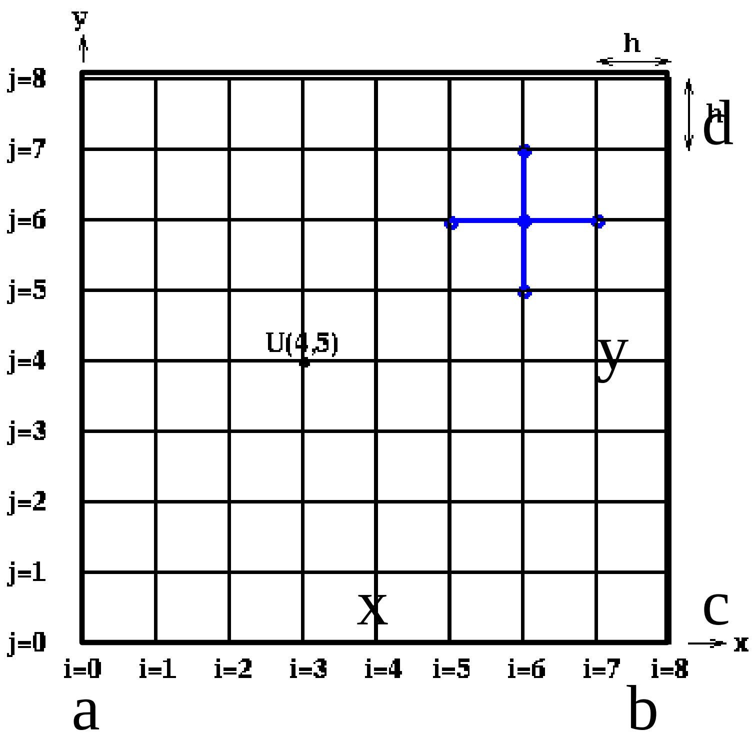
Condizione di Neumann $$\left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g$$

Condizione di tipo misto $$au + b\left.\frac{du}{d\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g$$



Equazione di Poisson
discretizzazione del dominio

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) \\ u(a,y) = g_1(y) \\ u(b,y) = g_2(y) \\ u(x,c) = g_3(x) \\ u(x,d) = g_4(x) \end{cases}$$



Sia Ω=[a,b]x[c,d]
griglia nel piano x-y:

$$x_i = a + ih \qquad h = (b - a) / N$$

$$y_j = c + jk \qquad k = (d - c) / M$$

Equazione di Poisson
discretizzazione operatori differenziali

Determinare i valori della soluzione u(x,y) nei nodi interni della griglia con passo h=k.

Utilizzo di differenze centrali,

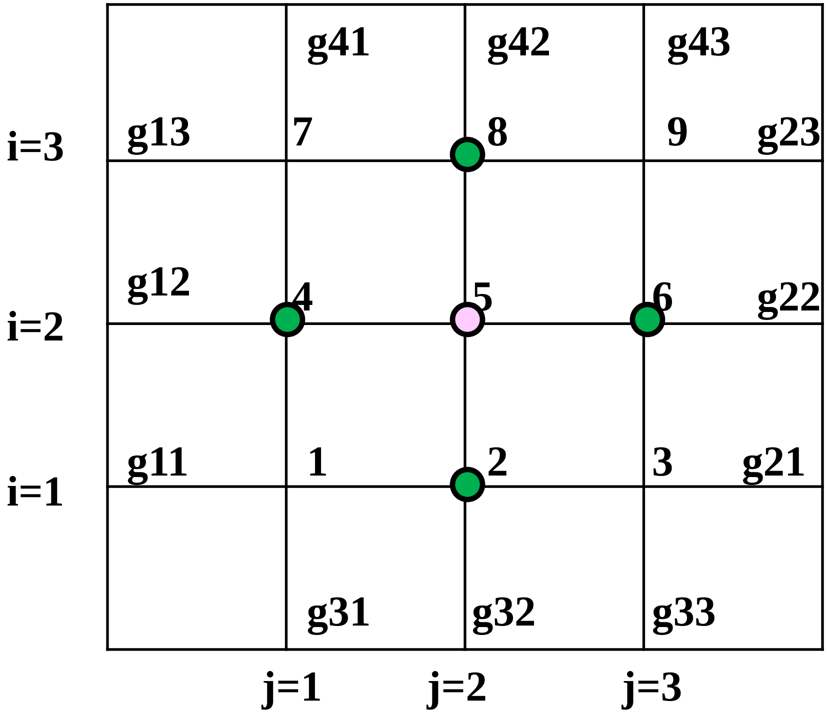
$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$$

$$-\left[\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}\right]-\left[\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}\right]=f(x_i,y_j)$$

$$\boxed{-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}+4u_{i,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2 f_{ij}}$$

Equazione di Poisson
risoluzione sui nodi

Determinare i valori della soluzione u(x,y) nei nodi interni della griglia. Per N=M=4 si ha la griglia 4x4:



Numeriamo i nodi della griglia, $(N-1)^2$ incognite $\mathbf{u_{ij}}$ i,j=1,..,N-1

Natural Row-wise ordering:
Ordinamento delle incognite:

$$(u_{1,1}, u_{1,2}, u_{1,3}, \ldots, u_{1,N-1}, u_{2,1}, \ldots, u_{N-1,N-1})$$

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{ij}$$

Equazione di Poisson

Associamo un'equazione per ogni punto della mesh

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_{1,1} + g11 + g31 \\ h^2 f_{1,2} + g32 \\ h^2 f_{1,3} + g21 + g33 \\ h^2 f_{2,1} + g12 \\ h^2 f_{2,2} \\ h^2 f_{2,3} + g22 \\ h^2 f_{3,1} + g13 + g41 \\ h^2 f_{3,2} + g42 \\ h^2 f_{3,3} + g43 + g23 \end{bmatrix}$$

Simmetrica, a diagonale dominante in senso debole. È anche definita positiva. M-matrice:

$$a_{ij} \le 0 \quad i,j = 1,2,\ldots,n \;\; i \ne j \quad e \quad A^{-1} \ge 0$$

$$A=\begin{bmatrix} B & -I & & & & \\ -I & B & -I & & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & & -I & B & -I \\ & & & & -I & B \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

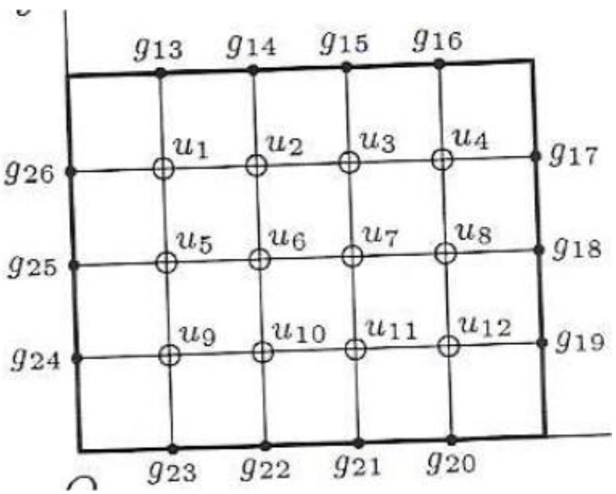
$$A \in R^{(n-1)^2 x (n-1)^2}$$

$$cond_2(A) = |\lambda_{\max}| \big/ |\lambda_{\min}| = O(h^{-2})$$

La matrice A è sparsa , tridiagonale a blocchi (con tale ordinamento) e SPD.
La convergenza di metodi iterativi peggiora con il raffinamento della mesh

La struttura della matrice è determinata dall'ordinamento dei nodi del reticolo.

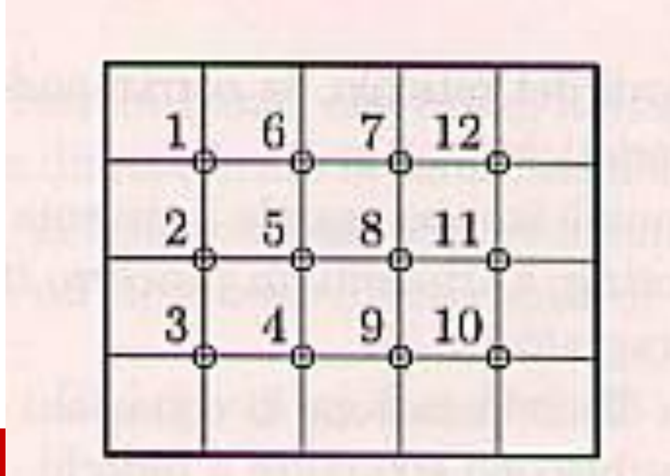
(1) **Natural row-wise ordering**



$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{array}\right)$$

Tridiagonali a blocchi

(2) **Zig-Zag ordering**



$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{array}\right)$$

Ordinare equazioni ed incognite

Data una griglia spaziale *m x m*.

Il sistema lineare ha una matrice di dimensione $m^2 \times m^2$ *ed è* ***sparsa*** in quanto ogni equazione coinvolge al più 5 incognite e quindi ogni riga ha al più 5 coefficienti diversi da zero e la matrice ha elementi diversi da zero solo su 5 diagonali.

Le diagonali più distanti hanno un offset di m^{d-1} *(d = numero dimensioni* spaziali) dalla principale, molto negativo per i metodi diretti basati su eliminazione di Gauss. Usiamo metodi iterativi

<u>Teorema.</u> Se una matrice $A \in \mathbf{R}^{nxn}$ **strettamente o irriducibilmente diagonalmente dominante, è tale che**

$$a_{ij} \leq 0 \quad i \neq j \quad e \quad a_{ii} > 0 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

allora A è una M-matrice.

Equazione di Poisson
risolvere il sistema lineare

Come si risolve il sistema lineare su griglia (N-1)x(N-1)?

Metodo iterativo di Gauss-Seidel: (passo k)

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)})$$

$$\boxed{-u_{i,j-1} - u_{i-1,j}} + 4u_{i,j} \boxed{-u_{i+1,j} - u_{i,j+1}} = h^2 f_{ij}$$

! Non si deve formare la matrice ma si calcola la soluzione riga per riga

Equazione di Poisson
risolvere il sistema lineare

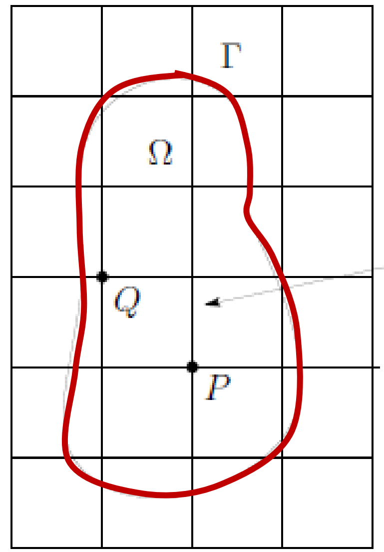
$$-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}+4u_{i,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2 f_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{iterazione di Gauss}-\text{Seidel}\\
&\;\textit{for}\quad k=1,2,\ldots\\
&\quad\textit{for}\quad i=2,..,N+1\\
&\qquad\textit{for}\quad j=2,..,N+1\\
&\qquad\quad u^{(k+1)}{}_{i,j}=\frac{1}{4}\left(u^{(k+1)}{}_{i-1,j}+u^{(k)}{}_{i+1,j}+u^{(k+1)}{}_{i,j-1}+u^{(k)}{}_{i,j+1}+h^2 f_{ij}\right)\\
&\qquad\textit{end}\\
&\quad\textit{end}\\
&\textit{end}
\end{aligned}
$$

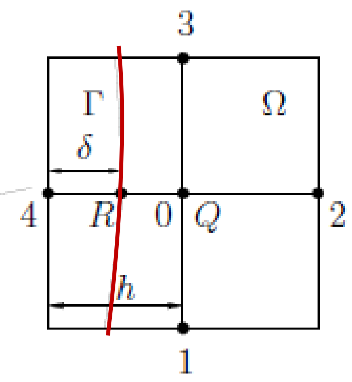
Trattamento geometrie complesse

$$u = g_0 \quad su\ \Gamma$$

$$-\frac{u_1 + u_2 - 4u_0 + u_3 + u_4}{h^2} = f_0$$



curvilinear boundary



stencil of Q

Interpolazione lineare

$$u(R) = \frac{u_4(h-\delta) + u_0\delta}{h} = g_0(R) \quad \Rightarrow u_4 = -u_0\frac{\delta}{h-\delta} + g_0(R)\frac{h}{h-\delta}$$

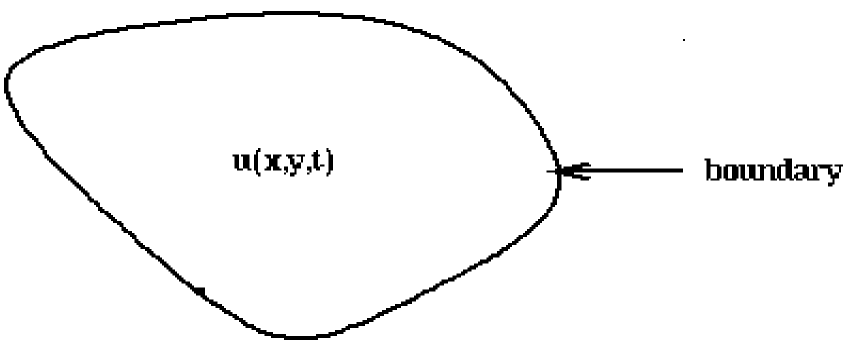
$$-u_1 - u_2 + (4 + \frac{\delta}{h-\delta})u_0 - u_3 = h^2 f_0 + g_0(R)\frac{h}{h-\delta}$$

PDE - Equazione del calore in piu' dimensioni

1 – Dimensional Heat Equation

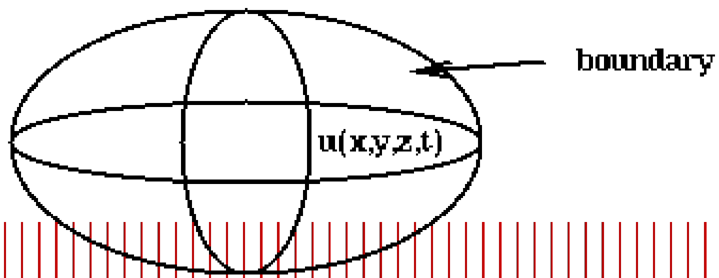
$$\frac{d\,u(x,t)}{dt} = C\left(\frac{d^2\,u(x,t)}{d\,x^2}\right)$$

2 – Dimensional Heat Equation



$$\frac{d\,u(x,y,t)}{dt} = C\left(\frac{d^2\,u(x,y,t)}{d\,x^2} + \frac{d^2\,u(x,y,t)}{d\,y^2}\right)$$

3 – Dimensional Heat Equation



$$\frac{d\,u(x,y,z,t)}{dt} = C\left(\frac{d^2\,u(x,y,z,t)}{d\,x^2} + \frac{d^2\,u(x,y,z,t)}{d\,y^2} + \frac{d^2\,u(x,y,z,t)}{d\,z^2}\right)$$

PDE - Equazione del calore

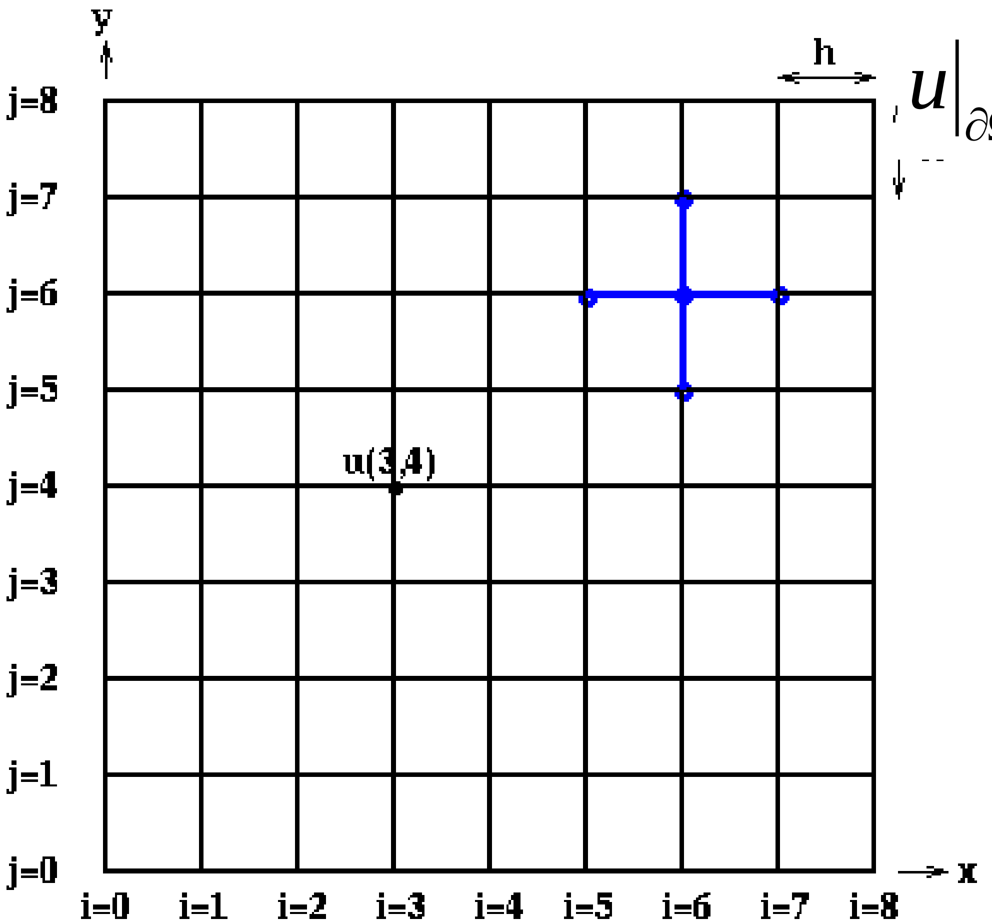
$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
a & e & & & e & & & & & & & & & & & \\
e & a & e & & & e & & & & & & & & & & \\
& e & a & e & & & e & & & & & & & & & \\
& & e & a & & & & e & & & & & & & & \\
\hline
e & & & & a & e & & & e & & & & & & & \\
& e & & & e & a & e & & & e & & & & & & \\
& & e & & & e & a & e & & & e & & & & & \\
& & & e & & & e & a & & & & e & & & & \\
\hline
& & & & e & & & & a & e & & & e & & & \\
& & & & & e & & & e & a & e & & & e & & \\
& & & & & & e & & & e & a & e & & & e & \\
& & & & & & & e & & & e & a & & & & e \\
\hline
& & & & & & & & e & & & & a & e & & \\
& & & & & & & & & e & & & e & a & e & \\
& & & & & & & & & & e & & & e & a & e \\
& & & & & & & & & & & e & & & e & a
\end{array}\right]
*
\begin{bmatrix}
U(1,1,m+1) \\ U(2,1,m+1) \\ U(3,1,m+1) \\ U(4,1,m+1) \\ U(1,2,m+1) \\ U(2,2,m+1) \\ U(3,2,m+1) \\ U(4,2,m+1) \\ U(1,3,m+1) \\ U(2,3,m+1) \\ U(3,3,m+1) \\ U(4,3,m+1) \\ U(1,4.m+1) \\ U(2,4,m+1) \\ U(3,4,m+1) \\ U(4,4m+1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b(1,1,m) \\ b(2,1,m) \\ b(3,1,m) \\ b(4,1,m) \\ b(1,2,m) \\ b(2,2,m) \\ b(3,2,m) \\ b(4,2,m) \\ b(1,3,m) \\ b(2,3,m) \\ b(3,3,m) \\ b(4,3,m) \\ b(1,4,m) \\ b(2,4,m) \\ b(3,4,m) \\ b(4,4,m)
\end{bmatrix}
$$

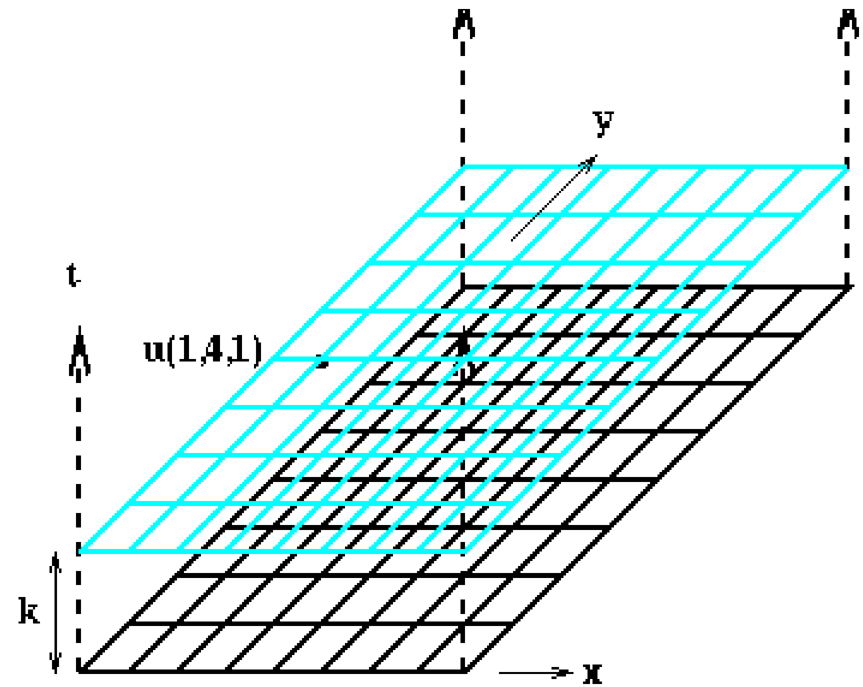
PDE - Equazione del calore

$$u_t = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \bar{u}(x,y)$$





Equazione del calore 2D
discretizzazione operatori differenziali

Utilizzo schema a 5 punti (differenze centrali),

$$\nabla_5^2 u_{i,j} = \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right] + \left[\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \right]$$

Semidiscretizzazione nel punto griglia (i,j) (solo spazio):

$$(u_{ij})_t = \nabla_5^2 u_{ij}(t) \quad i,j = 1,..,N-1$$

Sistema di (N-1)x(N-1) equazioni differenziali ordinarie per le variabili $u_{ij}(t)$

$$U'(t) = LU(t) + b(t)$$

L matrice pentadiag.

b vettore per BC

Metodo Eulero Esplicito $U^{n+1} = U^n + k\, f(U^n)$

$$U^{n+1} = U^n + k\, L U^n$$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + k\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}\right)$$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n\left(1 - 2\frac{k}{h_x^2} - 2\frac{k}{h_y^2}\right) + \frac{k}{h_x^2}\left(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n\right) + \frac{k}{h_y^2}\left(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n\right)$$

Il metodo risulta stabile per $k\lambda_L \in RA \quad |1 + \lambda_L k| \leq 1 \quad \forall \lambda_L = eig(L)$

$$-2 \leq -4k\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \leq 0 \quad \rightarrow k\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

Se $h_x = h_y = h$ allora $k \leq \dfrac{h^2}{4}$

Metodo Eulero Esplicito

$$U^{n+1} = (I + k\,L)U^{n}$$

stabilità condizionata

Metodo Eulero Implicito

$$(I - k\,L)U^{n+1} = U^{n}$$

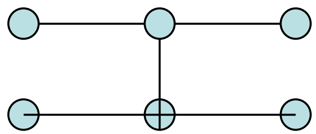
Sistema lineare di grandi dimensioni, alta complessità computazionale

Errore locale di troncamento $O(k + h_x^2 + h_y^2)$

Metodo di Crank-Nicolson

- Metodo Crank –Nicolson monodimensionale

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{ck}{2h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{ck}{2h^2}(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$$



$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{ck}{2h^2}\delta_x^2 u_{i,j} + \frac{ck}{2h^2}\delta_x^2 u_{i,j+1}$$

$$(1 - \frac{ck}{2h^2}\delta_x^2)u_{i,j+1} = (1 + \frac{ck}{2h^2}\delta_x^2)u_{i,j} \qquad \forall i$$

$$(1 - \frac{ck}{2h^2}\delta_x^2)U^{j+1} = (1 + \frac{ck}{2h^2}\delta_x^2)U^{j+1}$$

- Metodo Crank –Nicolson bidimensionale

$$(1 - \frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2 - \frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2)U^{n+1} = (1 + \frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2 + \frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2)U^n$$

Metodo di Crank-Nicolson

$$(I-\frac{k}{2}L)U^{n+1}=(I+\frac{k}{2}L)U^{n}$$

Sistema lineare sparso, grandi dim. per ogni time step.

gli autovalori di (I-$\frac{k}{2}L$) sono:

$$\lambda_{p,q}=1-\frac{k}{h^2}[(\cos(p\pi h)-1)+(\cos(q\pi h)-1)]$$

$$p,q=1,2,..,m,$$
$$h=1/(m+1)$$

$$cond(A)=O(\frac{k}{h^2})$$

Il metodo dei trapezi per ODE risulta assolutamente stabile in tutto il semipiano negativo del piano complesso. Quindi CN è stabile per ogni τ>0

Errore locale di troncamento $O(t^2+h^2+k^2)$

Metodo ADI (Alternate Implicit Directions)

- Modifica di CN

$$\left(1-\frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2\right)\left(1-\frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2\right)U^{j+1}=\left(1+\frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2\right)U^{j} \quad (*)$$

$$\left(1+\frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2\right)=\left(1+\frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2+\frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2+\frac{ck}{2h_x^2}\frac{ck}{2h_y^2}\delta_x^2\delta_y^2\right)$$

(*) equivale a

Extra term

$$\boxed{\begin{aligned}\left(1-\frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2\right)U^{j+1/2}&=\left(1+\frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2\right)U^{j}\\ \left(1-\frac{ck}{2h_y^2}\delta_y^2\right)U^{j+1}&=\left(1+\frac{ck}{2h_x^2}\delta_x^2\right)U^{j+1/2}\end{aligned}}$$

Soluzione di due sistemi tridiagonali

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi