Metodo delle differenze finite per l'equazione del calore

LABORATORIO 1:

Si consideri l' equazione del calore monodimensionale nell'incognita $u(t,x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (4\pi^2 - 1)\sin(2\pi x), \qquad (t,x) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(t,0) = 0, \qquad t \in (0,1) \\ u(t,1) = 0, \qquad t \in (0,1) \\ u(0,x) = \sin(2\pi x) \qquad x \in (0,1) \end{cases}$$

Considerando una griglia spaziale uniforme formata da $N+1$ nodi, con $x_0 = 0$, $x_j = jh$, $h = 1/N$ e $x_N = 1$, si approssimi il precedente problema utilizzando uno schema centrato per la derivata spaziale e i metodi di Eulero esplicito, implicito e Crank-Nicolson per la derivata temporale.

1) Scrivere in forma algebrica il problema considerato, dopo la discretizzazione in spazio e in tempo, per tutti e tre gli schemi di discretizzazione temporale, utilizzando un passo di discretizzazione temporale uniforme τ.

2) Calcolare in Matlab gli autovalori massimo e minimo e il numero di condizionamento $K_2(A)$ della matrice A relativa alla discretizzazione spaziale del termine $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Valutare empiricamente la dipendenza di $K_2(A)$ da h.

3) Sapendo che per il metodo di Eulero esplicito la stabilità è garantita dalla condizione $\tau < Ch^2$, con $C = 0.5$ per questo particolare problema, verificare sperimentalmente il comportamento di tale metodo per $(h,\tau) = (0.1, 0.01)$ e $(h,\tau) = (0.1, 0.0025)$. Verificare inoltre che i metodi di Eulero implicito e di Crank-Nicolson sono sempre stabili.

4) Sapendo che la soluzione esatta è $u_{es} = e^{-t}\sin(2\pi x)$, discutere l'ordine di accuratezza dei tre metodi nella norma $L^\infty(0,1; L^\infty(0,1))$, considerando le seguenti

coppie per i parametri di discretizzazione: (h, τ), $(h/2, \tau/2)$, $(h/4, \tau/4)$, con $(h, \tau) = (0.1, 0.01)$.