Progetto 36 ODE

Tratto dalle esercitazioni del corso
MODELLI DI SISTEMI BIOLOGICI - Prof. G.Gnudi

Nel 1928 van der Pol e van der Mark proposero il primo modello dinamico dell'attività oscillatoria nel cuore. Il loro modello consisteva nella seguente equazione differenziale non lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - c(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1}$$

dove c è una costante > 0. Per studiare nel piano delle variabili di stato (*piano delle fasi*) le proprietà dell'equazione di van der Pol risulta conveniente applicare la trasformazione di Lienard, ovvero:

$$y = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} + \frac{x^3}{3} - x \tag{2}$$

A partire dalle equazioni (1) e (2) si ottengono:

$$\frac{dx}{dt} = c\left(y - \frac{x^3}{3} + x\right) \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{c} \tag{4}$$

Il sistema di equazioni risultante non ha una soluzione analitica in forma chiusa e pertanto deve essere risolto integrando numericamente le eq. (3) e (4).

Attività proposte:

1) Costruire una soluzione numerica dell' oscillatore di van der Pol:

a) a partire dall'eq. (1) assumendo $c = 3$ e le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e dx/dt(0) = 9;
b) a partire dalle eq. (3) e (4) assumendo $c = 3$ e le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $y(0) = 3$.

Simulare il comportamento del sistema con entrambi i modelli e confrontare l'andamento di x in funzione del tempo.

2) Utilizzando il modello ottenuto al punto (1b), tracciare le traiettorie nel piano delle variabili di stato (*piano delle fasi*) per diversi valori iniziali di x e y. Graficare inoltre l'andamento di x in funzione del tempo e verificare che l'ampiezza dell'oscillazione non dipende dalla condizione iniziale (NOTA: l'origine è un punto di equilibrio instabile).