Progetto 2) ODE: Il modello matematico del bungee jumping

Descrizione del problema

Il bungee jumping è un'attività sportiva che consiste nel lanciarsi da un punto elevato (es. un ponte, una gru) imbragati con una corda elastica, fissata da un lato alla piattaforma di lancio e dall'altro alle caviglie del saltatore. Le corda impiegata è diversa di caso in caso e dipende sia dal tipo di salto che dal saltatore: in particolare, la costante elastica della corda deve essere scelta in base al peso del soggetto, alla lunghezza della corda e all'altezza della piattaforma di lancio rispetto al suolo. In questo esercizio l'obiettivo sarà quello di determinare quale tra tre corde elastiche tra le tre disponibili sia la più idonea per un saltatore di massa m=90Kg che salta da un ponte alto complessivamente 80m. Le costanti elastiche dei tre casi sono:

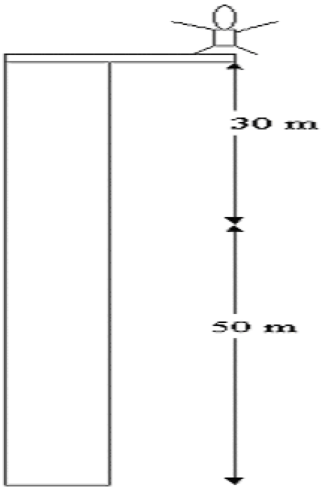
Cavo	**Costante elastica**
A	= 5 N/m
B	= 40 N/m
C	= 500 N/m

La resistenza dell'aria è

R = a1*v - a2 *|v|* v

Con a1=1 e a2=1

Sapendo che il lancio viene effettuato da un'altezza di 80m e che la lunghezza dei tre cavi è 30m deduciamo che per un primo tratto pari a 30m il saltatore sarà soggetto alla forza peso e alla resistenza dell'aria. Solo superati i 30m la corda, considerata puramente elastica, svilupperà una forza di richiamo proporzionale al suo allungamento secondo le costanti di elasticità $K_{a,b,c}$.



Descrizione del modello matematico

Al fine di risolvere questo problema, dobbiamo:

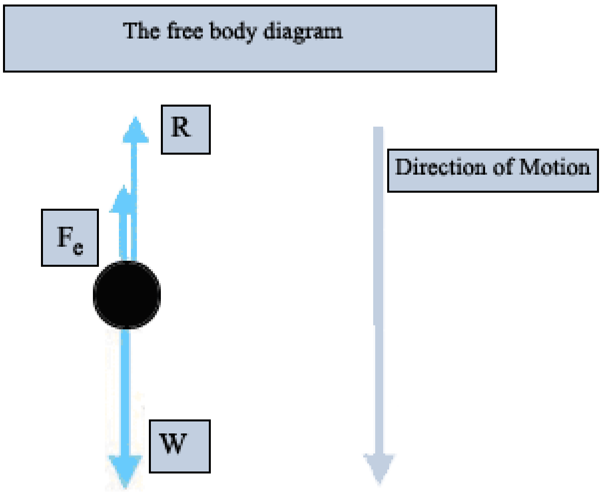
1. Determinare le forze agenti sul corpo.
2. Tracciare il diagramma di corpo libero.
3. Applicare la seconda legge di Newton.
4. Risolvere l'equazione.

1. Determinare le forze agenti sul corpo.
   Forza Peso (P): diretta verso il basso
   P= m*g
   m = 90 Kg
   g = 9.8 m/s^2

   Resistenza dell'Aria (R): forza che si oppone al moto
   R=a1*v+a2 *|v|* v
   a1=1, a2=1
   v=dx/dt

   Forza dal cavo elastico (Fe): forza di richiamo attiva se x maggiore della lunghezza della corda
   Fe = k*(x-30) se x>0
   0 se x<0

2. Tracciare il diagramma di corpo libero.



N.B: il verso positivo è il basso.

3. Applicare il principio di equilibrio delle forze Newton al punto di massa m

   Forza netta=m*a

   P-R-Fe=m*a
   mg-Fe-a1*v+a2 *|v|* v=m*a

   tenendo presente che v=dx/dt ed a=dv/dt
   Per x<30, si ottiene l' equazione differenziale m*a=P-R

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = g - \dfrac{a_1}{m}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{a_2}{m}\left|\dfrac{dx}{dt}\right|\dfrac{dx}{dt} \\ x(0) = 0, \dfrac{dx(0)}{dt} = 0 \end{array}}$$

   Per x>30, si ottiene l' equazione differenziale m*a=P-R-Fe

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = g - \dfrac{Fe}{m} - \dfrac{a_1}{m}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{a_2}{m}\left|\dfrac{dx}{dt}\right|\dfrac{dx}{dt} \\ x(t_{30}) = 30, \dfrac{dx(t_{30})}{dt} = v_{30} \end{array}}$$

Risolvere numericamente i due tempi del lancio e graficare le tre traiettorie complete (caduta libera+ retrazione elastica) al variare del cavo. Utilizzare e confrontare l'accuratezza dei solutori ode45, metodi di eulero esplicito, implicito e di heun.