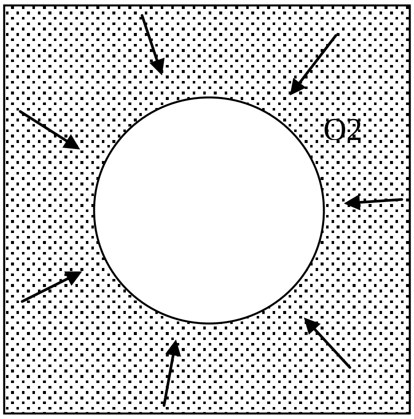
PROGETTO 21 PDE

Diffusione dell'ossigeno in una cellula pancreatica

Si consideri una cellula pancreatica (isola di Langerhans), supposta di forma sferica e raggio R, che viene coltivata in un gel prima di essere trapiantata. Questa cellula per poter sopravvivere deve ricevere ossigeno dall'ambiente circostante, in cui si trova un gel. L'ossigeno diffonde nella cellula e viene consumato dal processo di respirazione. Affinchè la cellula sopravviva è necessario che anche le parti più interne vengano raggiunte dall'ossigeno, quindi una simulazione numerica può essere utile per vedere quale è la concentrazione minima di ossigeno nel gel che consente alla cellula pancreatica di vivere.

Ipotesi di lavoro:

- è ragionevole supporre che, per piccole concentrazioni, la pressione parziale dell'ossigeno sia proporzionale alla sua concentrazione nel gel. Questa approssimazione lineare però è valida solo per piccoli valori della pressione parziale, altrimenti la legge che descrive la relazione fra pressione parziale di ossigeno e la sua concentrazione è una legge non lineare, nota con il nome di legge di Michaelis Menten.
- La pressione parziale dell'ossigeno nel gel è supposta nota e costante **uest**
- diffusività dell'ossigeno: **μ>0** costante
- tasso di respirazione (costante di proporzionalità fra la pressione parziale di ossigeno e il suo consumo per respirazione): **K>0** costante
- problema stazionario
- cellula sferica centrata nell'origine, quindi sfruttiamo la simmetria sferica



Formulazione problema matematico

Applicando il principio di conservazione della massa, si può scrivere la variazione nel tempo della pressione parziale di ossigeno u come:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot q = -Ku$$

dove q è il flusso entrante di ossigeno e dipende dal gradiente di concentrazione: O2 diffonderà dalla zona più concentrata a quella meno concentrata:

$$q = -\mu \nabla u$$

Per semplificare la trattazione del problema, si possono fare le seguenti considerazioni:

- non vi sono flussi convettivi (la cellula è ferma nel gel), ma solo flusso diffusivo
- problema stazionario a coefficienti costanti: descrizione matematica con una PDE di tipo ellittico
- dominio: sfera Ω di raggio R centrata nell'origine
- frontiera: su $\partial\Omega$ la pressione parziale dell'ossigeno è nota e corrisponde alla pressione esterna $u = u_{est}$

si ottiene quindi l'equazione di Helmholtz:

$$-\mu \Delta u + Ku = 0$$

che si può riscrivere in coordinate sferiche:

$$-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\left(\frac{1}{(\sin\varphi)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\cot\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+Ku=0$$

poiché la geometria e i dati al bordo sono a simmetria sferica, supponiamo che lo sia anche u=u(r), quindi le derivate rispetto a θ e φ si annullano e, moltiplicando tutto per r^2 si ottiene l'equazione che descrive il problema con la condizione al bordo e al centro della sfera (la derivata della soluzione rispetto alla coordinata radiale, al centro, è nulla):

$$-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+Ku=0$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\mu r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+Kr^2u=0 \\ u(R)=u_{est} \\ u'(0)=0 \end{cases}$$

Si tratta di una equazione PDE ellittica con condizioni di Dirichlet in r=R e condizioni al contorno di Neumann in r=0.

Risoluzione del problema ellittico 3D con il metodo agli elementi finiti con COMSOL (PDE definita per coefficienti in analisi stazionaria).