

## Progetto 1) ODE: Un po' di Idraulica...

Secondo la legge di Torricelli il volume  $V$  dell'acqua in un serbatoio riempito di acqua ad una profondità  $y$  con un buco nel fondo varia seguendo l'equazione differenziale:

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}.$$

dove  $g$  è l'accelerazione dovuta alla gravità (32ft/sec) e  $a$  è l'area del buco. Se il serbatoio è cilindrico di altezza 6ft e raggio 2ft e il buco è circolare di raggio 1 in, allora  $y$  soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{y}.$$

- a) Determinare la profondità  $y$  dell'acqua in un serbatoio con sezione di area circolare. Se il serbatoio è pieno al tempo  $t=0$ . Quando si svuota completamente il serbatoio?

(SOLUZIONE ESATTA  $y(t) = (\sqrt{6} - \frac{1}{144}t)^2$ ,  $144\sqrt{6}\text{ sec} \approx 5\text{ min}53\text{ sec}$  )

Se il serbatoio non è cilindrico ma ha una sezione di area  $A(y)$  alla profondità  $y$ , Allora il volume di acqua fino all'altezza  $y$  sarà:  $V = \int_0^y A(u)du$ , quindi  $\frac{dV}{dy} = A(y)$ , segue che  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = A(y) \frac{dy}{dt}$ , quindi la legge di Torricelli diventa:

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}.$$

dove  $g$  è l'accelerazione dovuta alla gravità (32ft/sec) e  $a$  è l'area del buco.

- b) Determinare la profondità  $y$  dell'acqua in un serbatoio con sezione di area  $A(y) = \pi y$ , cioè il serbatoio è formato ruotando la curva  $y=x^2$  attorno all'asse  $y$ . Se la profondità iniziale dell'acqua è 2ft e l'area del buco è 0.01, quando si svuota completamente il serbatoio?