Progetto 8 PDE agente inquinante nel fiume

Esercizio 3.3.2 Libro esercizi Quarteroni-Saleri-Formaggia
(Problemi di diffusione-trasporto e reazione)

Una fabbrica immette un agente inquinante nel fiume Ω. La concentrazione a cui viene immesso l'inquinante attraverso la sezione Γin è costante e pari a Cin. L'inquinante galleggia sul fiume, sicché è confinato in uno strato superficiale, per cui si trascura la dipendenza della sua concentrazione con la profondità. Si suppone che:

1. nella sezione Γup a monte del dominio Ω considerato, l'inquinante arrivi con una concentrazione fisiologica costante Cup;
2. la sezione a valle Γdown sia sufficientemente lontana da ritenere nulla la variazione della concentrazione nella direzione del flusso (normale al bordo);
3. il tasso di deposito di inquinante sulla riva sia proporzionale alla differenza fra una concentrazione "naturale" Cdry e la concentrazione nel fiume in prossimità della riva stessa.

Inoltre:

a. la diffusività dell'inquinante nel fiume è isotropa e costante, quindi rappresentata da uno scalare μ;
b. il campo di velocità alla superficie del fiume può essere considerato costante in tempo e a divergenza nulla;
c. un batterio presente nel fiume "consuma" inquinante con un tasso σ;
d. il problema è stazionario.

Si consideri un tratto di fiume rettilineo di lunghezza 10m e larghezza 2m. La velocità del fiume **u**=[ux uy]', con ux=um(2-y)y m/s, uy=0, Cup=10g/m^3, Cin=100g/m^3, Cdry=1g/m^3, α=0.1.
Usando una griglia con passo h=0.1 si simulino i seguenti casi:

i. σ=0.5, μ=0.1, um=10 ;
ii. σ=300, μ=0.1, um=2 ;

Formulazione del modello matematico

Indichiamo con C=C(x,y) la concentrazione di inquinante nel fiume. L'inquinante è interessato da tre processi:

- la diffusione nell'acqua (processo isotropo);
- il trasporto indotto dal moto del fiume; indichiamo **u** la velocità del fiume che per ipotesi del testo ∇ **u**=0;
- la reazione dovuta al consumo di inquinante indotto dalla presenza del batterio.

Si fa un bilancio dell'inquinante in un generico volume di fiume, per la conservazione della massa, si ottiene in generale che la variazione nel tempo di C nel volume è: $-\nabla$ (qt + qd)- σC,
dove qt= flusso di massa legato al trasporto, governato dalla corrente del fiume, ossia qt= **u**C;
qd= - μ∇C è il flusso diffusivo scritto in base alla legge di Fick.

Poiché nel nostro caso è un problema stazionario, questa legge di bilancio si riduce a :
∇(uC - μ ∇C)+ σC=0.

Il bordo del fiume può essere così suddiviso:

- Γin è il tratto in cui entra l'inquinante alla concentrazione Cin; su questo tratto si assuma condizione di Dirichlet;
- $\Gamma down$ è la sezione di uscita del fiume, che, in base alle ipotesi date, è sufficientemente lontana da Γin da poter ritenere nulle le variazioni di C nella direzione del flusso, normale a $\Gamma down$. Assumeremo pertanto che su questa sezione sia assegnata una condizione di tipo Neumann $\nabla C\cdot\mathbf{n}=0$, con **n** versore uscente al dominio;
- Γup è la sezione a monte ove si assume che il fiume contenga una concentrazione fisiologica di inquinante; assumiamo su di essa una condizione di Dirichlet Cup;

- La riva del fiume Γr è caratterizzata da un flusso di inquinante proporzionale alla differenza di concentrazione tra fiume e spiaggia: $\mu\nabla C\cdot\mathbf{n}= \alpha\,(Cdry-C)$, con α assunto costante e positivo.

Il problema differenziale che descrive la dinamica (stazionaria) dell'inquinante nel fiume sarà:

$- \mu\,\Delta C + \nabla\cdot(\mathbf{u}C) + \sigma C = 0$ (x,y) appartenente al dominio Ω;

$C=Cin$ su Γin;

$C=Cup$ su Γup;

$\mu\nabla C\cdot\mathbf{n}=0$ su $\Gamma down$;

$\mu\nabla C\cdot\mathbf{n} + \alpha\,C = \alpha\,Cdry$ su Γr

Scrivere una discretizzazione del problema mediante metodo alle differenze finite.