PROGETTO 23 ODE:

Analisi semplificata del movimento di tre corpi liberi, sottoposti alle reciproche forze gravitazionali ed in assenza di attrito

1. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Il problema dei tre corpi, definito da Whittaker "the most celebrated of all dynamical problems", si enuncia come segue:
"Tre masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la legge newtoniana di gravitazione. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale."
Nell'ambito della Meccanica Celeste il problema dei tre corpi si presenta come lo schema più naturale in cui inquadrare, almeno in prima approssimazione, problemi quali: il moto dei pianeti interni all'orbita di Giove (Mercurio, Venere, Terra, Marte) o degli asteroidi quando si tenga conto dell'azione di Giove e del Sole; il moto degli oggetti transnettuniani; il moto della Luna; la dinamica delle navicelle spaziali e così via.
Accanto al problema generale dei tre corpi possiamo senz'altro enunciare la versione semplificata: il problema ristretto dei tre corpi. È appena il caso di sottolineare che l'aggettivo "semplificata" non è da intendersi nel senso di "semplice": si tratta, è vero, di una versione in cui il numero di gradi di libertà viene ridotto in modo drastico, ma ciò serve solo a ridurre la complessità del calcolo, e non le reali difficoltà che restano tutte ben presenti.
In questa relazione si è trattata la dinamica nel caso del cosiddetto *problema ristretto dei tre corpi*, che si enuncia come segue:
"Due punti materiali, detti corpi primari, si muovono nello spazio su un'orbita Kepleriana (ellittica o circolare). Un terzo punto P di massa trascurabile rispetto ai primi due, detto planetoide, si muove sotto l'azione della forza Newtoniana esercitata dai primari, senza influenzarne il movimento. Si chiede di studiare la dinamica del punto P."
In altre parole, si suppone che i primari si comportino come un sistema a due corpi la cui dinamica non viene influenzata dal planetoide. A sua volta, il planetoide si muove sotto l'azione di un ambiente esterno, rappresentato appunto dai primari.

2. DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Il procedimento tradizionale consiste nel considerare un sistema di riferimento 2D solidale coi primari, e quindi in moto rotatorio uniforme attorno al baricentro dei primari. In questo sistema di riferimento si pongono le due masse sull'asse x.

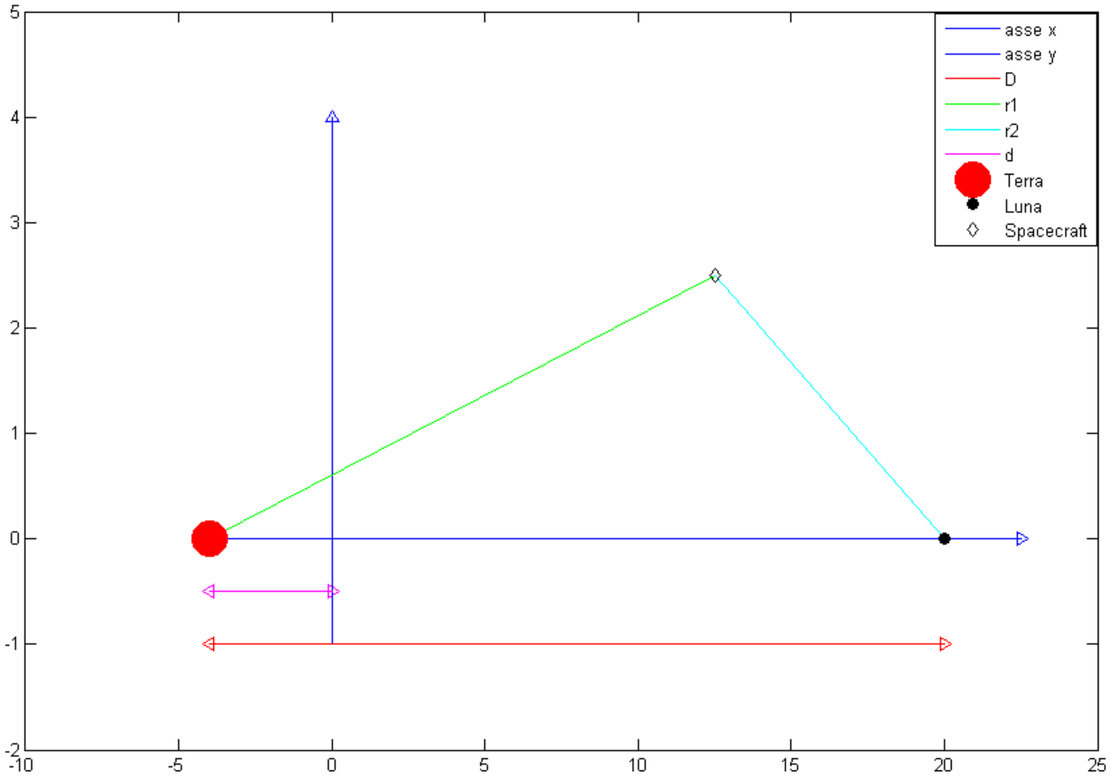

Fig. 1: il sistema di coordinate utilizzato nel problema dei tre corpi ristretto.

Nel caso preso in esame si è considerato un sistema bidimensionale di coordinate nel piano determinato dai tre corpi, con l'origine degli assi nel centro di massa dei due corpi più grandi, e solidale con i due corpi più grandi in modo tale che questi risultino fissi.
Il sistema di coordinate è mostrato nella figura 1, dove D è la distanza tra la terra e la luna, d è la distanza fra il centro della terra e il centro di massa del sistema, r1 e r2 sono rispettivamente la distanza dalla terra della navicella spaziale e la distanza dalla luna del veicolo. La massa della navicella spaziale è assunta essere trascurabile rispetto alle altre masse in gioco.
Attraverso le leggi di Newton del moto e della gravitazione, e utilizzando la forza centrifuga e la forza di Coriolis dovute al sistema di coordinate rotanti, il moto della navicella spaziale è

descritto da un sistema del secondo ordine di equazioni differenziali ordinarie (ODE):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G[\frac{M(x+\mu D)}{r^3{}_1} + \frac{m(x-\mu^* D)}{r^3{}_2}] + \Omega^2 x + 2\Omega \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -G[\frac{My}{r^3{}_1} + \frac{my}{r^3{}_2}] + \Omega^2 y - 2\Omega \frac{dx}{dt}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M e m sono rispettivamente le masse della terra e della luna, μ^* e μ sono le frazioni di massa della terra e della luna, e Ω è la velocità angolare di rotazione della luna intorno alla terra e quindi del sistema di coordinate.

I valori numerici delle quantita' sono i seguenti:

```
G=6.67259e-11;    % costante gravitazionale
M=5.974e24;       % massa della terra
m=7.348e22;       % massa della luna
u_star=M/(m+M);   % frazione di massa della terra
u=m/(m+M);        % frazione di massa della luna
D=3.844e8;        % distanza tra terra e luna
d=4.669e6;        % distanza del centro della terra dal
centro di massa del sistema
Omega=2.661e-6;   % velocità angolare
Earth_radius=6.378e6; % raggio della terra
```

Si considerino i dati inziali: la posizione iniziale lungo l’asse x della navicella spaziale x(0)=**4.613e8**, la posizione iniziale lungo l’asse y, y(0)=0, la velocità iniziale in x x'(0)=0 e la velocità iniziale in y, y'(0)=**-1074.**
Disegnare la traiettoria risultatnte (x(t),y(t)) nel piano in funzione del tempo. Indicando la posizione della terra e della luna nel grafico. Calcolare la soluzione per almeno un'orbita completa (cioe' fino a che lo spacecraft ritorna nella sua posizione originale). Quindi da t=0 fino a circa t=2.4e6 sec.

Risolvere il sistema di ODE con metodi numerici con diversi valori di tolleranze relative dell’errore verificando che con valori di RelTol pari a 1e-3 e 1e-4 l’orbita della navicella risulta essere aperta, mentre con RelTol pari a 1e-5 si ha la chiusura dell’orbita (andamento corretto).
Controllare lo il passo temporale utilizzato con metodi a passo d'integrazione variabile.
Quanto si avvicina lo spacecraft alla superficie terrestre?