CONFRONTO TRA I METODI NUMERICI UPWIND, LAX-FRIEDRICHS E LAX-WENDROFF PER LA RISOLUZIONE DI PDE IPERBOLICHE MONODIMENSIONALI

1. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Le equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) di tipo iperbolico descrivono un processo fisico, non stazionario in evoluzione, durante il quale l'energia del sistema è conservata nel tempo. Il problema di propagazione, che rappresenta detto processo fisico, è un problema a valori iniziali. Assegnati i dati iniziali (per t=0) si desidera determinare il comportamento del fenomeno in esame negli istanti successivi. Il modello matematico in questione è costituito da una o più equazioni differenziali definite in un dominio spaziale (aperto) per ogni t>0, dalle equazioni che descrivono lo stato iniziale e da eventuali condizioni al bordo assegnate sul contorno del dominio spaziale. La soluzione u=u(x,y,...) dipende dalla variabile tempo e da una o più variabili spaziali.

Fenomeni fisici come la propagazione delle onde di pressione in un fluido, la propagazione di tensioni e di spostamenti di sistemi elastici, e la propagazione del calore in un mezzo (convezione) sono esempi di problemi descritti da PDE iperboliche.

Si vogliono confrontare tre metodi numerici alle differenze finite per la risoluzione di PDE iperboliche monodimensionali: i metodi Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff. Esempi fisici di propagazione di un'onda in una sola dimensione spaziale sono i moti vibratori trasversali di un filo, i moti vibratori longitudinali e torsionali di un chiodo mentre viene colpito, e la propagazione di una corrente elettrica lungo un cavo.

In generale, una PDE iperbolica monodimensionale lineare del primo ordine assume la seguente forma (equazione di trasporto o delle onde o di convezione):

$$u_t + cu_x = 0$$

accompagnata dalla condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x)$$

e dalla condizione al contorno (dominio 0<x<1)

$$u(0,t) = f(t)$$

La soluzione è un'onda viaggiante con velocità c

$$\mathrm{u(x,t) = u_0(x - ct)}$$

La funzione iniziale viene propagata con velocita c in direzione x positiva (se c>0) o negativa (se c<0). Se consideriamo un intervallo limitato [a,b], nel caso c>0, x=a è il punto di inflow e x=b il punto di outflow. Le condizioni al contorno vengono impostate nel punto di inflow. Per c<0 i punti di inflow e outflow vengono invertiti.

DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Per risolvere il problema numericamente attraverso il metodo delle differenze finite, innazi tutto il semipiano t>0 viene discretizzato con un passo temporale k e un passo spaziale h, definendo i punti della griglia (x_j, t^n):

$$x_j = jh \text{ con } j \in \mathbb{Z}, \qquad t_n = nk \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

L'espressione matematica dei metodi Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff sono riportate di seguito:

Metodo	Modello matematico
Upwind	$u_{j,n+1} = u_{j,n} - c\frac{k}{h}(u_{j+1,n} - u_{j,n})$ se c<0 $u_{j,n+1} = u_{j,n} - c\frac{k}{h}(u_{j,n} - u_{j-1,n})$ se c>0
Lax-Friedrichs	$u_{j,n+1} = \frac{1}{2}[(u_{j+1,n} + u_{j-1,n}) - c\frac{k}{h}(u_{j+1,n} - u_{j-1,n})]$
Lax-Wendroff	$u_{j,n+1} = u_{j,n} - \frac{1}{2}[c\frac{k}{h}(u_{j+1,n} - u_{j-1,n}) - c^2\frac{k^2}{h^2}(u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n})]$

I problemi a valori iniziali iperbolici sono spesso discretizzati nel tempo con metodi espliciti, come è il caso infatti dei tre metodi in esame. Questo, naturalmente, impone delle restrizioni sui valori di k e h (specificamente sul loro rapporto), restrizione che i metodi impliciti di solito non prevedono. Uno schema numerico è consistente se l'errore di troncamento globale tende a zero quando k e h tendono a zero indipendentemente

$$\tau(k,h) = \max_{j,n} |\tau_{j,n}|$$

Un metodo numerico è accurato all'ordine p in tempo e all'ordine q in spazio (p,q interi) se, per una soluzione esatta sufficientemente regolare, si ha

$$\tau(k,h) = \mathcal{O}(k^p + h^q)$$

L'errore di troncamento dei metodi Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff sono:

Metodo	Errore di troncamento
Upwind	$\tau(k,h) = \mathcal{O}(k + h)$
Lax-Friedrichs	$\tau(k,h) = \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{k} + k + h^2\right)$

Lax-Wendroff	$\tau(k,h)=\mathcal{O}(k^2+h^2+kh^2)$

Infine, uno schema numerico è convergente se

$$\lim_{j,n\to 0}\max_{j,n}\left|u(x_j,t_n)-u_{j,n}\right|=0$$

Per un problema iperbolico (lineare o non lineare), un metodo numerico è stabile se per ogni tempo T esistono una costante C_T>0 (eventualmente dipendente da T ma non deve dipendere da k e h) e un δ_0>0 tali che

$$\| u_n \|_\Delta \leq C_T \| u_0 \|_\Delta$$

per ogni n tali che nk≤T, per ogni k, h tali che 0<k≤ δ_0, 0<h≤ δ_0 e per ogni dato iniziale u_0. Spesso la stabilità richiede una condizione che lega il passo temporale a quello spaziale. La norma $\|\cdot\|_\Delta$ rappresenta una norma discreta opportuna.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché uno schema numerico esplicito per l'equazione di trasporto sia stabile è quella chiamata condizione CFL (Courant, Friedrichs e Lewy). Essa prevede che il passo di discretizzazione spaziale h e quello temporale k siano legati tra loro

$$\left|c\frac{k}{h}\right|\leq 1, \text{ ovvero } k\leq\frac{h}{|c|}$$

Sostanzialmente, la condizione CFL impone che la velocità di propagazione esatta c non sia maggiore della velocità di propagazione della soluzione numerica $\frac{h}{k}$. Il numero $c\frac{k}{h}$ viene chiamato numero di CFL ed è adimensionale.

Spesso nei problemi iperbolici si cercano soluzioni per tempi lunghi (T≫1). In questi casi, normalmente, è richiesta la forte stabilità dello schema, giacché essa garantisce che la soluzione numerica sia limitata per ogni valore di T. Uno schema si dice fortemente stabile in norma $\|\cdot\|_{\Delta,p}$ per valori interi di p≥1, quando, applicato ad un problema di trasporto con condizione al bordo omogenea, soddisfa $\forall\, n\geq 0$

$$\| u_{n+1} \|_{\Delta,p} \leq \| u_n \|_{\Delta,p}$$

Uno schema fortemente stabile in una data norma, non lo è necessariamente in un'altra.

Esiste un teorema scondo il quale gli schemi Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff sono fortemente stabili nella norma $\|\cdot\|_{\Delta,1}$ a patto che la condizione CFL sia soddifata

$$\| u_n \|_{\Delta,1} \leq \| u_0 \|_{\Delta,1} \quad \forall\, n\geq 0$$

Per problemi ai valori iniziali iperbolici, la condizione CFL stabilisce che non esistono schemi alle differenze finite espliciti, incondizionatamente stabili e consistenti.

Analisi Von Neumann

Per equazioni di tipo iperbolico, l'analisi di Von Neumann è uno strumento valido per lo studio della stabilità in norma $\|\cdot\|_{\Delta,2}$ di uno schema numerico, e per accertarne le caratteristiche di dissipazione e dispersione di tale metodo. Queste tre caratteristiche dipendono dallo schema numerico e non dal problema in esame.

Ipotizziamo che la funzione $u_0(x)$ sia 2π-periodica e dunque si possa scrivere in serie di Fourier

$$u_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imx}$$

dove

$$\alpha_m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u_0(x)e^{-imx}dx$$

è l'm-esimo coefficiente di Fourier.

Pertanto:

$$u_{j,0} = u_0(x_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imjh}, \text{ j=0}, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Applicando uno schema alle differenze finite si perviene alla seguente relazione

$$u_{j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imjh} \gamma_m^n, \text{ j=0}, \pm 1, \pm 2, \ldots\ n \geq 1$$

Il numero $\gamma_m \in \mathbb{C}$ è detto coefficiente di amplificazione della m-esima frequenza e caratterizza lo schema in esame. Esso dipende in generale dal numero di CFL e quindi dalla discretizzazione scelta.

Per ognuno dei metodi in studio, il coefficiente di amplificazione γ_m corrisponde a:

Metodo	Coefficiente di amplificazione γ_m
Upwind	$\gamma_m = 1 - \lvert c\rvert \frac{k}{h}\left(1 - e^{-imh}\right)$
Lax-Friedrichs	$\gamma_m = \cos(mh) - ic\frac{k}{h}\sin(mh)$
Lax-Wendroff	$\gamma_m = 1 - ic\frac{k}{h}\sin(mh) - c^2(\frac{k}{h})^2(1-\cos(mh))$

Se il $\lvert\gamma_m\rvert \leq 1\ \forall\, m$ allora lo schema numerico è fortemente stabile rispetto alla $\|\cdot\|_{\Delta,2}$ (condizione necessaria e sufficiente). In particolare, per gli schemi Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff si ritrova la condizione CFL, e quindi se essa viene rispettata allora la stabilità forte in norma $\|\cdot\|_{\Delta,2}$ è garantita

$$\forall\, m, \lvert\gamma_m\rvert \leq 1 \text{ se } k \leq \frac{h}{\lvert c\rvert}$$

Violare la condizione di stabilità comporta un aumento dell'ampiezza dell'onda e quindi un effetto di blow-up della soluzione numerica per tempi sufficientemente grandi.

Le caratteristiche di dissipazione di un metodo numerico riguardano la riduzione dell'ampiezza della funzione iniziale dovuta alla risoluzione numerica. Invece, le caratteristiche di dispersione riguardano il ritardo o l'anticipo della propagazione dell'onda della soluzione numerica rispetto a quella della soluzione esatta. Per studiare le proprietà di dissipazione e dispersione, consideriamo per prima la soluzione esatta del problema

$$u(x, t_n) = u_0(x - cnk), \qquad \forall\, n \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Scrivendo la soluzione in serie di Fourier

$$u(x_j, t_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imjh} g_m^n, \qquad g_m = e^{-icmk}$$

il coefficiente di amplificazione γ_m precedentemente discusso è il corrispondente di g_m. $|g_m| = 1\ \forall\, m$ mentre $|\gamma_m| \leq 1$ serve per garantire la stabilità forte dello schema. Pertanto, γ_m è un coefficiente dissipativo: più piccolo è γ_m, maggiore sarà la riduzione dell'ampiezza α_m e quindi maggiore sarà la dissipazione dello schema numerico. Il rapporto

$$\epsilon_a(m) = \frac{|\gamma_m|}{|g_m|}$$

è chiamato errore di amplificazione (o di dissipazione) della m-esima armonica associato allo schema numerico, e coincide con $|\gamma_m|$ (dato che $|g_m| = 1$).

Per lo studio delle caratteristiche di dispersione, chiamiamo $\phi_m = mh$ angolo di fase (in radianti) relativo alla m-esima armonica. Riscrivendo γ_m:

$$\gamma_m = |\gamma_m| e^{-iwk} = |\gamma_m| e^{-i\frac{wk}{mh}\phi_m}$$

Il rapporto $\frac{w}{m}$ rappresenta la velocità di propagazione della soluzione numerica relativamente alla m-esima armonica. L'errore di dispersione

$$\epsilon_d(m) = \frac{w}{mc} = \frac{wh}{\phi_m c}$$

è il rapporto tra la velocità di propagazione della soluzione numerica e quella della soluzione esatta, relativamente alla m-esima armonica.

2. REALIZZAZIONE IN MATLAB DEL PROGETTO

Si realizzi un confronto tra i metodi Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff per la risoluzione numerica dell'equazione del trasporto. Si effettui uno studio sui fenomeni di dissipazione e di dispersione, per ogni metodo numerico. In particolare, attraverso il coefficiente di amplificazione γ_m che emerge dall'analisi di Von Neumann si valutino l'errore di amplificazione ϵ_a e quello di dispersione ϵ_d per ogni metodo numerico. Detti errori variano in funzione dell'angolo di fase ϕ_m e del numero di CFL, per cui a parità di numero di CFL si effettui un confronto tra gli errori di amplificazione e quelli di dispersione dei tre metodi numerici, al variare dell'angolo di fase ϕ_m. In aggiunta, si esegua un confronto tra gli errori di amplificazione e quelli di dispersione di ogni metodo numerico a seconda del numero di CFL, al variare dell'angolo di fase ϕ_m. Scelta di quattro numeri di CFL per eseguire i confronti: 0.25, 0.50, 0.75, e 1.

Per ragioni di simmetria si considera $0 \leq \phi_m \leq \pi$.

Si applichino i tre metodi a due funzioni iniziali ad esempio un impulso sinusoidale, u0 e u2, con u2 ottenuta raddoppiando la frequenza di u0. Si confrontino le soluzioni numeriche con la soluzione analitica.