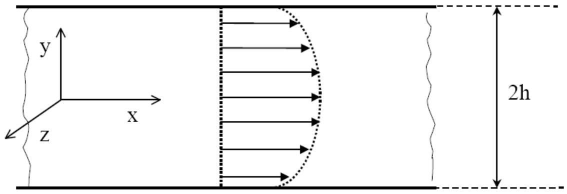
Progetto 45: BVP

Profilo di velocità di un fluido incomprimibile in un canale orizzontale in regime stazionario

1. Introduzione al problema

(slides di Biomeccanica LM, Prof.ssa Rita Stagni)



Lo scopo prefissato è quello di trovare il campo di velocità per un flusso stazionario di un fluido incomprimibile, in un canale orizzontale.
Dalla teoria della fluidodinamica sappiamo che il campo di velocità deve soddisfare:

- Equazioni di Navier-Stokes per le 3 componenti u,v,w:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right);$$

dove ν è la viscosità.

- Equazione di continuità: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$
  u,v,w sono le componenti della velocità, rispetto agli assi x, y, z

- Condizioni di aderenza alla parete: essendo il fluido viscoso, la velocità alla parete sarà nulla
  u(h)=u(-h)=0

Ipotizziamo che il flusso si sviluppi solo lungo x.
Essendo poi in condizioni stazionarie, la velocità non varia rispetto al tempo, quindi dalle equazioni di Navier-Stokes risulta p=p(x).

Elimino la derivata parziale, perché u dipende solo da y e consideriamo il fatto che p non dipende da y e z, ma solo da x.
L’equazione che si ottiene considerando tutte le ipotesi è:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{\mu}, \qquad \alpha = -\frac{dp}{dx} > 0$$

Integrando due volte ottengo u:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\alpha}{\mu} y + A$$

$$u(y) = -\frac{\alpha}{2\mu} y^2 + Ay + B\,, \qquad A = 0\,, \qquad B = \frac{\alpha}{2\mu} h^2$$

Per determinare A e B si impongono le condizioni di aderenza alla parete e sostituendo nell’equazione, si ottiene la soluzione analitica:

$$u(y) = \frac{\alpha}{2\mu}(h^2 - y^2)$$

Risolvere con metodi numerici il problema definito dall’equazione differenziale ordinaria del secondo ordine con condizioni al contorno (BVP):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -K, \qquad K = \frac{\alpha}{\mu}, \qquad \alpha = -\frac{dp}{dx} > 0$$

con valori al contorno u(h)=u(-h)=0.
Utilizzare sia il metodo alle differenze finite sia il metodo shooting.