Analisi Numerica
Risoluzione numerica di PDE di tipo parabolico.

1. **problema campione (diffusione)** Scrivere m-functions per implementare il metodo di Eulero esplicito, il metodo di Eulero implicito e il metodo di Crank-Nicholson. Utilizzare le funzioni precedenti per risolvere i seguenti problemi:

   - **Condizioni al bordo di Dirichlet**

     $$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,T] \\ u(x,0) = sin(\pi x), \\ u(x,T) = (1-e^x)^+ \end{cases} \tag{1}$$

     Calcolare la soluzione in modo stabile con i tre metodi al diminuire di Δx e Δt, calcolando l'errore rispetto alla soluzione esatta $u(x,t) = exp(-\pi^2 t) sin(\pi x)$, riportando in un grafico l'andamento degli errori.
     Provare poi un caso in cui non è verificata la condizione di stabilità del metodo di Eulero esplicito e visualizzare la soluzione sia come superficie che come curva in alcuni istanti temporali o spaziali.

   - Ripetere il problema precedente con condizione al bordo $x = b$ di Neumann $(u'(x,T) = (-e^x)^+)$.

2. **Problema con termine di trasporto a coefficienti costanti** Dato il seguente problema:

   $$\begin{aligned} & u_t = cu_{xx} + pu_x + qu + r(t,x), \quad (t,x) \in (0,10) \times (a,b) \\ & u(t_0,x) = f(x), \quad x \in (a,b), \quad a = 0, b = 1 \\ & u(t,a) = g_a(x), \quad t \in [0,10] \\ & u(t,b) = g_b(x), \quad t \in [0,10] \end{aligned} \tag{2}$$

   con $u(t,x) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$, $c = 1$; $p = -0.5$, $q = 0.5$

(a) Utilizzare il metodo $\theta = 0, 0.5, 1$ per svolgere i seguenti punti:

   i. Effettuare l'analisi di convergenza dei diversi metodi con $N = 2^k, k = 3 : 9$ e M opportunamente scelto per avere stabilità

   ii. Analizzare il condizionamento dei sistemi lineari ottenuti dai metodi impliciti al variare di N.

(b) Risolvere il problema con il metodo delle linee.

   i. Riportare in una tabella il numero di valutazioni di funzione e di passi temporali M richiesti dai diversi metodi matlab per $N = 2^k, k = 3 : 9$, indicando il metodo più efficiente.

   ii. Effettuare l'analisi di convergenza per il metodo piuù efficiente con $N = 2^k, k = 3 : 9$.

(c) Fare il grafico della superficie di Errore assoluto per il miglior risultato ottenuto con il metodo θ e con il metodo delle linee.

3. **Problema con il termine di trasporto a coefficienti variabili** Scrivere m-files che implementano il metodo di Euelro esplicito e di Eulero implicito per risolvere:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + xu_x \\ u(x,t) = \psi(x) \\ x \in [-\pi, \pi], \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

   con:

   - $\psi(x) = \pi - |x|$
   - $\psi(x) = \chi_{\{x>0\}}$

   facoltativo Successivamente, studiare il problema a valori iniziali e al contorno con la seguente condizione al bordo destro:

   - $u_x(\pi, t) = -1$

4. **problema dell'ostacolo**

$$\begin{cases} max\{u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + xu_x, \psi - u\} = 0 \\ u(x,t) = \psi(x) \\ x \in [-\pi, \pi], \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

   con $\psi(x) = |e^x - K|$, con $K = 20$.

5. **Problema diffusivo 2D** Scrivere una m-function che risolva il seguente problema con un metodo alle differenze finite esplicito (**facoltativo implicito**), visualizzando la soluzione per t fissato (diversi valori di t):

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,0) = max(x+y-1,0), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = max(x+y-1,0), \quad t > 0 (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\Omega = [-a,a] \times [-a,a]$