PROGETTO PDE 25

1 Differenze finite per il modello Lighthill-Whitham-Richar (LWR) di traffico stradale

Numerositá studenti:1

Si consideri il modello LWR per il traffico stradale descritto dalla legge di conservazione scalare

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

dove $f(u) = u(1-u/u_{\max})v_{\max}$ e $v_{\max} > 0$ la velocitá massima dei veicoli. La funzione incognita $u = u(x,t) \in [0, u_{\max}]$ indica la densitá di veicoli nella strada, $u = 0$ indica assenza di veicoli, $u = u_{\max}$ indica che la strada ha raggiunto la capienza massima e si forma un ingorgo. Come si vede il flusso di veicoli é nullo in questi due casi estremali ed é massimo quando $u = u_{\max}/2$. Infatti $f'(u) = (1 - 2u/u_{\max})v_{\max}$ é positivo per $u < u_{\max}/2$ e negativo per $u > u_{\max}/2$.

Si risolva il problema tramite i diversi metodi alle differenze finite visti a lezione (Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff) per i seguenti problemi e per diverse scelte dei dati iniziali e si discutano i risultati con l'ausilio di figure.

a) **Il problema del semaforo**
Supponiamo $u_{\max} = 1$, $v_{\max} = 1$ intesi come valori normalizzati di densitá e velocitá massime. Sia inoltre $x \in [0, L]$, $L = 1$ e supponiamo che in $x = L/2$ sia posto un semaforo inizialmente rosso. All'istante $t = 0$ il semaforo diventa verde. La densitá iniziale sia

$$u(x,0) = u_s, \quad x \in (0, L/2), \qquad u(x,0) = u_d, \quad x \in [L/2, L), \tag{2}$$

con $u_s > u_d$, $u_s, u_d \in [0,1]$.

Le condizioni al bordo sono supposte periodiche $u(0,t) = u(L,t)$, $t > 0$, che corrisponde ad un circuito ad anello.

b) **Passaggio da due a una corsia**
Il modello é facilmente adattabile al caso di strade con piú corsie, osservando che la differenza sará in una maggior capienza della strada ed eventuale cambiamento dei limiti di velocitá. Dunque consideriamo $x \in [0, L]$, $L = 1$, con una giunzione in $x = L/2$ tra una corsia a sinistra e due corsie a destra. Le costanti $u_{\max}$ e $v_{\max}$ in questo caso sono funzioni di x nella forma

$$u_{\max} = 1, v_{\max} = 1 \quad x \in (0, L/2), \qquad u_{\max} = 2, v_{\max} = 1.5 \quad x \in [L/2, L) \tag{3}$$

Immaginiamo ancora un percorso ad anello, per cui in $x = 0, L$ si passa da due ad una corsia, con condizioni al bordo periodiche. Il dato iniziale sará della forma (2) con con $u_s, u_d \in [0,1]$ arbitrarie.