Progetto 28 PDE
Metodo ADI per equazioni di diffusione bidimensionale

1. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Si consideri l'equazione bidimensionale asimmetrica

$$u_t = \nu u_{xx} + \sigma u_{yy}$$

con $\nu>0$, $\sigma>0$.
Si risolva il problema con il metodo delle direzioni implicite alternate (ADI) dove in ogni direzione si utilizza il metodo di Crank-Nicolson per l'integrazione temporale.

Diffusione su un'immagine
Considerare come dominio computazionale il quadrato [0,1] x [0,1] con condizioni al bordo di Dirichlet nulle. Come dato iniziale si scelga un'immagine quadrata rappresentata in scala di grigi su sfondo bianco e si assegni alla funzione

$$u(x_i, y_j, 0) = (g_{max} - g_{ij}) / g_{max}, \quad i,j = 1,\dots,N$$

dove $x_i = (i-1)/(N-1)$, $y_i = (j-1)/(N-1)$, N è la dimensione della matrice caratterizzante l'immagine, g_{ij} il corrispondente livello di grigio e g_{max} il numero totale di livelli di grigio (corrispondente al bianco). Illustrare l'effetto dell'applicazione del modello differenziale sull'immagine per diverse scelte di ν e σ al variare del tempo finale.

2. DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Il metodo ADI (Alternating Direction Implicit) è un metodo che è stato proposto da Douglas e Rachford nel 1956, ampiamente utilizzato per la risoluzione numerica di PDE paraboliche multidimensionali.
Nel metodo di Crank-Nicolson bidimensionale

$$(I - \frac{r}{2}L)U^{n+1} = (I + \frac{r}{2}L)U^n$$

si ha che la matrice dei coefficienti L è una matrice pentadiagonale e quindi, per risolverla, non si può utililzzare l'algoritmo di Thomas per la risoluzione di sistemi lineari con matrici tridiagonali. L è infatti una matrice a grandi dimensioni a banda larga.
Per risolvere le PDE paraboliche 2-D con sistemi tridiagonali anziché utlizzare questa matrice pentadiagonale, pur mantenendo le proprietà del metodo di

Crank-Nicolson (metodo incondizionatamente stabile per qualsiasi sceta del passo temporale e spaziale), si utilizza il metodo ADI.
La matrice L si può scrivere in due dimensioni come

$$L=L_x+L_y$$

dove L_x rappresenta la matrice tridiagonale che discretizza la derivata seconda lungo x e L_y la matrice tridiagonale che discretizza la derivata seconda lungo y. Quindi la forma corretta di Crank-Nicolson diventa

$$(I-\frac{r}{2}L_x-\frac{r}{2}L_y)U^{n+1}=(I+\frac{r}{2}L_x+\frac{r}{2}L_y)U^n$$

L'idea del metodo ADI è la seguente: decomporre la formula di Crank-Nicolson nella forma (1)

$$(1-\frac{r}{2}L_x)(1-\frac{r}{2}L_y)U^{j+1}=(1+\frac{r}{2}L_x)(1+\frac{r}{2}L_y)U^j$$

ovvero scrivere $(I-\frac{r}{2}L_x-\frac{r}{2}L_y)$ sotto forma di doppio prodotto, che, in realtà, corrisponderebbe a:

$$(1+\frac{r}{2}L_x)(1+\frac{r}{2}L_y)=(1+\frac{r}{2}L_x+\frac{r}{2}L_y+\frac{r}{2}\frac{r}{2}L_xL_y)$$

Come si può notare compare anche il termine-doppio, cerchiato in rosso, che nell'equazione originale non era presente. Per cui si commette un errore a causa di questo extra term che in realtà non c'è. Scrivendo $(I-\frac{r}{2}L_x-\frac{r}{2}L_y)$ come doppio prodotto però, si ha un vantaggio: si separa L_x da L_y che, come detto, sono entrambe due matrici tridiagonali.
Per risolvere questa nuova equazione, si separa la parte in x dalla parte in y e quindi si può riscrivere la (1) come

$$(I-\frac{r}{2}L_x)U^{j+1/2}=(I+\frac{r}{2}L_y)U^j$$

$$(I-\frac{r}{2}L_y)U^{j+1}=(I+\frac{r}{2}L_x)U^{j+1/2}$$

dove $U^{j+1/2}$ rappresenta la U temporanea.

Si risolvono perciò due sistemi lineari, il primo con una matrice tridiagonale che riguarda le derivate in x e il secondo con una matrice tridiagonale in y. La soluzione del primo sistema lineare (U temporanea) diventa il right-hand side del secondo sistema e per risolvere questo meccanismo si utilizza l'algoritmo di Thomas.
Quindi facendo questo splitting (decomposizione), che però non è la stessa cosa che risolvere Crank-Nicolson, si ottiene la risoluzione di PDE bidimensionali utilizzando matrici tridiagonali, anziché matrici pentadiagonali. Chiaramente bisogna tenere in considerazione che il metodo ADI, effettuando delle approssimazioni, ha un'accuratezza minore rispetto a Crank-Nicolson.