

Progetto 3

GRATTACIELO E TERREMOTO

Obiettivo: studiare l'effetto di un terremoto su di un edificio formato da più piani.

Consideriamo il seguente semplice modello rappresentato graficamente in figura dove l'edificio a n piani è costituito da n masse uguali e sovrapposte:

X10(t)
X9(t)
X8(t)
X7(t)
X6(t)
X5(t)
X4(t)
X3(t)
X2(t)
X1(t)

Supponiamo che ogni piano sia collegato ai piani adiacenti in modo elastico. Assumiamo che ogni massa possa scivolare senza frizione e che la tendenza a conservare la posizione iniziale sia proporzionale allo spostamento orizzontale del singolo piano sui piani precedente e seguente.

Questo può essere modellato tramite l'azione su ogni piano di due forze elastiche indotte dai due piani adiacenti del tipo: $\mathbf{F} = -\mathbf{k} \mathbf{x}$ dove x indica lo spostamento relativo del piano. Al fine di ottenere un modello semplice da trattare matematicamente possiamo trascurare in prima approssimazione gli effetti della forza di gravità. Se indichiamo con $x_i(t)$ la coordinata della massa che rappresenta il piano i -esimo avremo che su ogni piano interno agiscono due forze:

$$F_i(1) = -k(x_i - x_{i-1}); \quad \text{con } i=2, \dots, n-1$$

$$F_i(2) = -k(x_i - x_{i+1});$$

$$\begin{array}{ll} \text{Sul primo piano agir\`a la forza} & -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ \text{mentre sull'ultimo solo la forza} & -k(x_n - x_{n-1}) \end{array}$$

L'applicazione della Legge di Newton $F=ma=mx''$ fornisce le equazioni del moto:

$$mx_1'' = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$mx_2'' = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)$$

.....

.....

$$mx_{n-1}'' = -k(x_{n-1} - x_{n-2}) - k(x_{n-1} - x_n)$$

$$mx_n'' = -k(x_n - x_{n-1})$$

Introducendo il vettore $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$, la matrice di massa $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$ con \mathbf{I} matrice identità $n \times n$ la matrice di stiffness \mathbf{K} :

Utilizzando il comando MATLAB `eig(A)` possiamo calcolare gli autovalori di A , possiamo quindi trovare le relative frequenze naturali w_i ed i periodi di oscillazione $2\pi/w_i$.

Una volta fatto questo scriviamo poi una function di MATLAB `fierre()` in cui definiamo la funzione vettoriale che caratterizza il problema differenziale come sistema di $2n$ equazioni di ordine uno trasformandolo da sistema di n equazioni di ordine due con l'ausilio di variabili z .

```
function ft=fierre(t,y);
%le variabili w , E ed A sono globali
global w E A
ft=y;
n=length(y)/2;
x=y(1:n);
z=y(n+1:2*n);
ee=ones(n,1);
ft(1:n)=z;
ft(n+1:2*n)=A*x+E*w^2*cos(w*t)*ee;
```

Ora che abbiamo definito le function su cui il programma centrale si appoggia per risolvere il problema, rimane da scrivere lo script del programma che risolve il problema differenziale per diversi valori della pulsazione w e riporta il grafico degli spostamenti massimi dei piani, cioè delle massime oscillazioni dei piani:

```
% simulgratta.m
% simula le oscillazioni indotte da un terremoto in un edificio
% di dieci piani
clear;
global w E n A;
%'numero dei piani'
n=10
%'peso di ogni piano'
m=20
%'coefficiente tra i piani'
k=100
%'E'
E=1
K=-2*k*eye(n,n)+k*diag(ones(1,(n-1)),-1)+k*diag(ones(1,(n-1)),1);
K(n,n)=-k;
v=1*ones(1,n);
I=diag(v);
M=m*I;
A=M^-1*K;
%'matrice A'
[A]
%calcolo degli autovalori, delle w di risonanza e delle f di
risonanza
%'autovalori di A'
lambdac=eig(A)
%'pulsazione naturale de grattacielo'
omegac=sqrt(-lambdac)
```

```

%'frequenza naturale del grattacielo'
periodoc=2*pi./omegac
%'range'
prange=linspace(1,20,200);

%disegno la soluzione
Nt=1000
'tempo iniziale'
t0=0
'tempo finale'
tf=200
'passo della risoluzione del metodo Runge-Kutta'
h=(tf-t0)/Nt
'spostamento iniziale'
y0=zeros(2*n,1)
'ordine del sistema'
p=4
c=0
for periodoc=prange
    w=2*pi/periodoc;
    [t,y]=odesolver('fterre',t0,y0,h,p,Nt);
    disp(sprintf('periodo=%f omega=%f
ampiezza=%f',periodoc,omegac,max(max(y))));
    c=c+1;
    am(c)=max(max(y));
end
figure;
hold on;
plot(prange,am);
for i=1:n
plot([periodoc(i) periodoc(i)],[0 max(am)],'r:');
end
hold off

```

Facendo girare questo script in MATLAB abbiamo come output il grafico dell'ampiezza dell'oscillazione in funzione della frequenza:

