Progetto 14
PROBLEMA DI TRASPORTO-REAZIONE (PDE)

1 Introduzione al problema

Il problema di trasporto- reazione monodimensionale da analizzare è il seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + a_0 u = f, \quad x \in (0, 2\pi), t > 0$$

$$u(x,0) = \sin(x)$$

$$u(0,t) = \sin(-t), u(2\pi, t) = \sin(-t)$$

E' richiesto di calcolare la soluzione per *t*=2p e *f=0* nei due casi:

a=1, a_0=1

a=1, a_0=0

In generale le condizioni al contorno per il problema in esame sono legate al segno del coefficiente *a* al bordo,

- se *a*(0) > 0 il bordo *x* = 0 è inflow e quindi si assegna *u,*
- se invece *a* (0) < 0 il bordo è outflow e la soluzione in tale punto è fornita dalla equazione stessa.

Per *x*=2p si può imporre una condizione al bordo solo se *a(*2p)<0 .

Poiché nel nostro caso *a*(*x*) > 0 la condizione al bordo del problema sarà *u(0,t)*=`sin(-t)` .

Questa equazione alle derivate parziali è di tipo iperbolico, la cui soluzione sappiamo già a priori essere un'onda che si propaga nel tempo.

Volendo calcolare la soluzione esatta, si può notare che che l'equazione differenziale può essere riscritta:

$$\frac{Du}{Dt} + a_0 u = 0,$$

$$dove \quad \frac{Du}{Dt}$$

è la derivata lungo le caratteristiche definite dalla equazione *dx/dt* =*a*.

Avremo così delle onde che si spostano a velocità *a* e che nel caso a_0>0 vengono smorzate.

La soluzione generale è data dall'equazione:

$$u(x,t) = \sin(x - t)e^{-a_0 t}$$

nei nostri due casi avremo:

a_0=0, *u(x* ,2p)=sin(*x*−2p)

a_0=1, *u(x* ,2p)=sin(*x*−2p)e^{-x}

Risoluzione numerica del problema con differenze finite