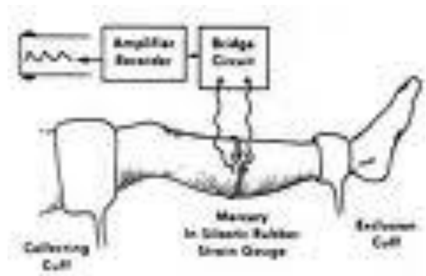
PROGETTO 7 ODE

ANDAMENTO DEL VOLUME DI SANGUE IN UN ARTO CALCOLATO ATTRAVERSO LA PLETISMOGRAFIA



INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Si considera di monitorare l'andamento del volume di sangue in un arto attraverso la pletismografia ad occlusione venosa. Essa consiste nel registrare le variazioni di volume dell'arto a seguito dell'occlusione del ritorno venoso dell'arto stesso. L'occlusione si può ottenere semplicemente disponendo attorno all'arto una camera d'aria, gonfiata ad una pressione sufficientemente più alta della pressione venosa, circa 40-50 mmHg.
Nel seguito viene illustrata una interpretazione della manovra di occlusione basata su una semplice rappresentazione della circolazione dell'arto, come schematicamente indicato in figura 1.

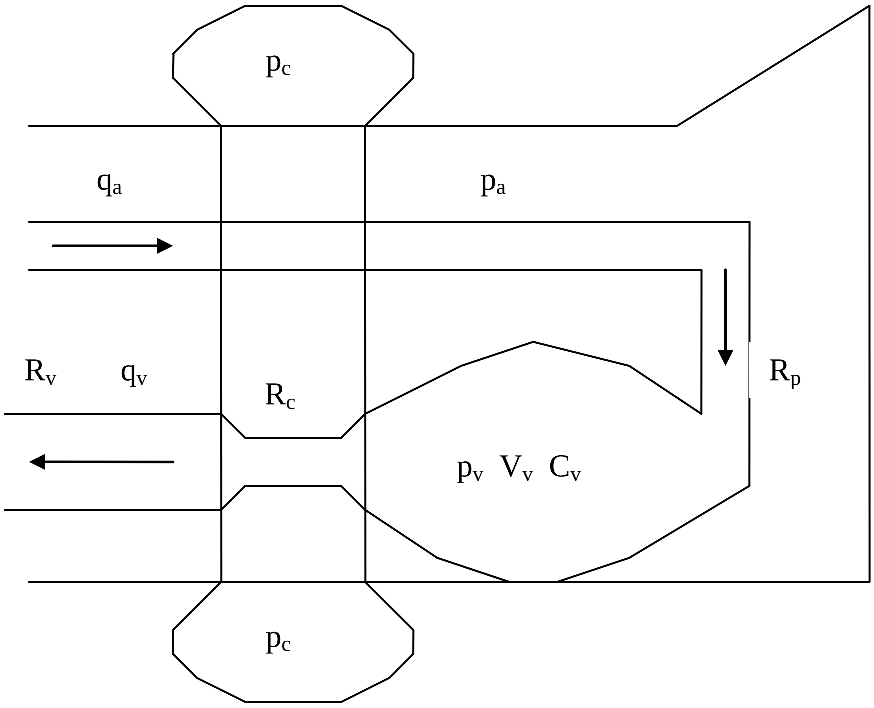


Figura 1. Schema di occlusione di un arto tramite camera d'aria.

Si trascurano le variazioni di volume delle arterie e delle arteriole e si rappresenta la circolazione venosa a valle della camera d'aria con un serbatoio elastico modello tipo windkessel.

Si indica con :
V_v il volume dell'arto a valle della camera d'aria;
q_a e q_v la portata media arteriosa e venosa;
C_v la capacità delle vene;
R_p la resistenza idraulica delle arteriole;
R_c la resistenza relativa al tratto di vene sotto la camera d'aria;
R_v la resistenza venosa tra camera d'aria e atrio destro;
P_a la pressione arteriosa;
P_v la pressione venosa;
P_c la pressione esercitata dalla camera d'aria sull'arto.
P_{ra} la pressione nell'atrio destro.

DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Ipotizzando inoltre che la pressione nell'atrio destro sia nulla P_{ra}=0, il circuito elettrico equivalente che si ha per un problema di questo tipo è il seguente:

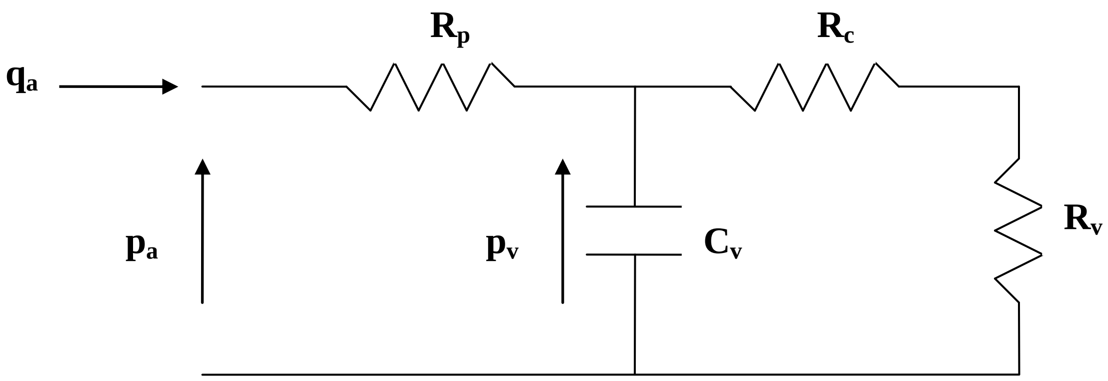


Figura 2. Analogo elettrico di schema di occlusione di un arto tramite camera d'aria.

Detto Vg il volume della gamba a valle della camera d'aria, per la conservazione della massa si ha:

$$q_a = q_v + \frac{dV_g}{dt}$$

relazione che deve valere in ogni istante e soprattutto dopo t=0, momento in cui sono chiuse le vene e si impone quindi

$$q_v(t) = 0 \qquad \text{per } t>0$$

Sapendo che Pra=0 si possono scrivere le seguenti equazioni:

$P_a - P_v = R_p * q_a$ Caduta di pressione ai capi delle arteriole

$V_v = V_{v0} + C_v * P_v$ Caratteristica elastica delle vene supposta lineare; V_{v0} è il volume a pressione nulla delle vene.

$\frac{dV_{v=g}}{dt} = q_a - \frac{P_v}{R_c + R_v}$ Equazione di continuità (o bilancio dei volumi ematici) delle vene.

Tenendo presente che $\frac{dV_v}{dt} = C_v * \frac{dP_v}{dt}$:

- Per t<0 :

  la camera d'aria è sgonfia P_c=0 e non c'è occlusione quindi R_c=0.
  All'equilibrio si ha:

$$q_a = \frac{P_a}{R_p + R_v} = \frac{P_v}{R_v}; \qquad \rightarrow \qquad P_v = \frac{R_v}{R_p + R_v} * P_a;$$

  Nota P_a supposta costante, si può esprimere il volume venoso in funzione di essa:

$$V_v(t) = V_{vo} + C_v * P_v = V_{v0} + \frac{P_a * R_v * C_v}{R_p + R_v} = V_v(0)$$

  $V_v(0)$ rappresenta il volume del compartimento venoso per t=0.
  Subito dopo gonfiamo la camera fino ad arrivare a Pc=40mmHg e occludiamo così le vene sotto la camera.

- Per t>0 :

si può considerare $R_c \rightarrow \infty$ e quindi l'equazione di continuità diventa:
$$\frac{dV_v}{dt} = q_a = \left(\frac{P_a - P_v}{R_p}\right)$$
Poiché $P_v = \frac{(V_v - V_{vo})}{C_v}$ e $V_v - V_v(0) = V(t)$ si ottiene
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_v}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{(P_a - P_v)}{R_p}$$
$$V_v(t) = V_{v0} - \frac{P_a * R_v * C_v}{R_p + R_v}; \qquad P_v = \frac{\left(V_v + V_{vo} + \frac{P_a * C_v * R_v}{R_p + R_v}\right)}{C_v};$$
Da questa analisi si ha la seguente equazione di stato:
$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{C_v * R_p} = \frac{P_a}{R_p + R_v}$$
da risolvere a partire dalla condizione iniziale V(0)=0.
L'integrale generale è:
$$V(t) = Ae^{\lambda t} + V(\infty);$$
dove $\lambda = -\frac{1}{C_v * R_p}$ è l'autovalore dell'equazione differenziale e A è una costante da determinare in base alle condizioni iniziali. $V(\infty)$ è l'integrale particolare corrispondente alla soluzione di regime ovvero:
$$V(\infty) = (C_v * R_p)\frac{P_a}{R_p + R_v};$$
Dall'integrale generale all'istante zero si ha
$$V_v(0) = A + V(\infty) \quad \rightarrow \quad A = V(0) - V(\infty)$$
ma V(0)=0 $\rightarrow A = -V(\infty)$
$$\rightarrow V(t) = V(\infty)(1 - e^{\lambda t}) = \left(\frac{R_p * C_v * P_a}{R_p + R_v}\right)\left(1 - e^{\frac{-t}{Rp*Cv}}\right)$$
Risolvere per via numerica l'equazione differenziale ordinaria del 1°ordine trovata sopra e confrontare con la soluzione esatta.
Come dati per la risoluzione poniamo:
P_a=100mmHg=1330*10^2 dine/cm^2, che rappresenta la pressione arteriosa supposta costante,
R_p=1985 dine*s/cm^5 la resistenza idraulica delle arteriole,
R_v=80 dine*s/cm^5 la resistenza venosa tra camera d'aria e atrio destro,
C_v=0,0230 cm^5/dine la capacità delle vene.
Considerare V(0)=0, che significa che a riposo non è presente sangue nelle vene.