

Progetto PDE 17

APPLICAZIONE DELL'EQUAZIONE MONODIMENSIONALE DI FISHER PER DESCRIVERE LA DINAMICA DI UNA POPOLAZIONE BATTERICA

INTRODUZIONE AL PROBLEMA

L'evoluzione dinamica di una popolazione batterica è chiaramente soggetto di fondamentale importanza in ambito medico, proprio per questo è stato studiato sia sperimentalmente che teoricamente. Una descrizione teorica della dinamica ha evitato di soffermarsi su fenomeni di mutazione mentre si è incentrati maggiormente sulla crescita, sulla competizione delle risorse e sulla diffusione. L'esperimento che mi preste a descrivere in forma matematica è fatto su un sistema monodimensionale e tratta la diffusione di una popolazione batterica con sviluppo non omogeneo sotto l'influenza di una radiazione ultravioletta che inibisce la crescita se non per un piccolo tratto di spazio (che chiameremo "Oasi") per la quale l'azione ultravioletta è schermata. Viene inoltre simulato il movimento dell'oasi lungo il dominio dello spazio nel tempo con velocità costante, questo rappresenterà il flusso sanguigno.

DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

1) L'equazione di Fisher (quasi lineare del II ordine) attraverso la quale è quindi possibile descrivere il modello è simile ad un'equazione del calore, con la presenza di due termini additivi dipendenti dalla soluzione stessa: il primo "a" è un termine che caratterizza la crescita della popolazione batterica, mentre il secondo "b" tiene conto della limitatezza delle risorse che favoriscono la crescita o fattori che tendono ad eliminare la popolazione batterica:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - bu^2(x,t)$$

La colonia di batteri viene fatta evolvere in un ambiente monodimensionale di 22 cm. Condizioni iniziali:

$$u(x,0) = 5000 * \exp(0,1*x) * \sin(\pi*x/22)$$

Condizioni al contorno di Dirichlet omogenee.

2) Volendo ora analizzare un sistema sempre monodimensionale ma sotto l'influenza di radiazione ultravioletta che ostacola la crescita batterica. Inoltre si vuole inserire un'oasi che invece consente la crescita, la quale sarà in costante movimento nel dominio dello spazio dove avviene l'esperimento. A

questo punto nella classica equazione di Fisher si inserirà una funzione $U(x,t)$ che rappresenterà il fattore di crescita ($a=U(x,t)$) e che dipenderà dal movimento dell' "Oasi" nel sistema. L'equazione che analizzeremo sarà quindi:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\nabla^2 c(x,t) + U(x-vt)c(x,t) - bc(x,t)^2$$

dove $c(x,t)$ è la concentrazione lineare dei batteri.

La colonia di batteri viene fatta evolvere in un ambiente monodimensionale di larghezza 25 cm all'interno della quale viene fatta muovere con velocità v l'Oasi di larghezza 3 cm.

Condizioni iniziali:

$c(x,0)=a/b$ nel caso $1,1 \text{ cm} \leq x \leq 1,4 \text{ cm}$
 $c(x,0)=0$ altrimenti

Condizioni al contorno di Dirichlet omogenee.