Progetto 30: (ODE) –

Modello matematico di una Epidemia
(di Kerman e McKendrik)

Descrizione del modello matematico

Il modello matematico di un'epidemia di Kerman e McKendrik (1927) distingue 3 gruppi in una popolazione di n(t) individui:

$$n(t)=x(t)+y(t)+z(t)$$

x(t) rappresenta il numero di individui sani
y(t) rappresenta il numero di individui contagiati in circolazione
z(t) rappresenta il numero di contagiati rimossi dalla circolazione (per morte o isolamento)

La somma n(t) è considerata costante, cioè $\dot{n}(t) = 0$, in quanto trascuriamo altri fenomeni, quali quelli delle dinamiche demografiche, in quanto più lenti rispetto alla dinamica di una epidemia. La dinamica del sistema, cioè la variazione delle sue tre variabili di stato espresse mediante le derivate è:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,x(t)}{dt} = -\beta\, x(t)\, y(t) \\[2ex] \dfrac{d\,y(t)}{dt} = \beta\, x(t)\, y(t) - \gamma\, y(t) \\[2ex] \dfrac{d\,z(t)}{dt} = \gamma\, y(t) \end{cases}$$

La prima equazione esprime la variazione per unità di tempo della popolazione sana. Detta variazione è proporzionale tramite il coeff. $-\beta$ al prodotto x(t) y(t). Questa equazione esprime il fatto che il contatto tra persone sane e contagiate determina una diminuzione delle persone sane. La possibilità di contatto è proporzionale secondo il parametro β al prodotto x(t)y(t).

La seconda equazione esprime la variazione per unità di tempo della popolazione contagiata. Detta variazione è uguale a quella della popolazione sana cambiata di segno meno il tasso di rimozione dei contagiati. Quest'ultimo è proporzionale secondo il coefficiente γ al numero dei contagiati.

La terza equazione esprime la variazione per unità di tempo della popolazione isolata o rimossa.

Si osservi che, essendo questo un sistema non lineare, per esso non vale la sovrapposizione degli effetti.

Per i sistemi non lineari non esiste in genere un metodo per trovare la soluzione in forma chiusa. Questi sistemi pertanto sono risolti numericamente con l'ausilio di un calcolatore.

Risoluzione del modello matematico dell' epidemia.

Iniziamo con il trovare, se esistono, i punti di equilibrio del sistema, ossia i valori di x(t)= cost, in cui il sistema permane in equilibrio. I punti di equilibrio si trovano ponendo

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x(t) = c_1$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = c_2$$

dove c_1 e c_2 sono costanti. Quindi i punti di equilibrio del sistema sono quelli per cui y(t)=0. In altre parole, qualunque sia il valore iniziale di x(0)e z(0) la dinamica mantiene y(t)=0 se y(0)=0. Non appena $y \neq 0$ si sviluppa una dinamica dello stato $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, cioè si sviluppa l'epidemia. Per risolvere il sistema si osservi che le prime due equazioni non sono influenzate dalla terza. Dividendo le prime due equazioni:

$$\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{-\beta\, x(t)}{\beta\, x(t) - \gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\beta\, x(t) - \gamma}{-\beta\, x(t)} = -1 + \frac{\gamma}{\beta\, x(t)} = -1 + \frac{\rho}{x(t)} \ \text{con}\ \rho = \frac{\gamma}{\beta}$$

da cui

$$\dot{x}(t) + \dot{y}(t) = \rho \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \ \text{ e integrando otteniamo che } \ x(t) + y(t) - \rho \ln x(t) = \text{cost}.$$

Integrando si ottiene:

$$x(t) + y(t) - \rho \ln x(t) = \cos t$$

In altri termini le variabili x(t) e y(t) si muovono sulla curva

$$x(t) + y(t) - \rho \ln x(t) = y(0) + x(0) - x(t) + \rho \ln x(0)$$

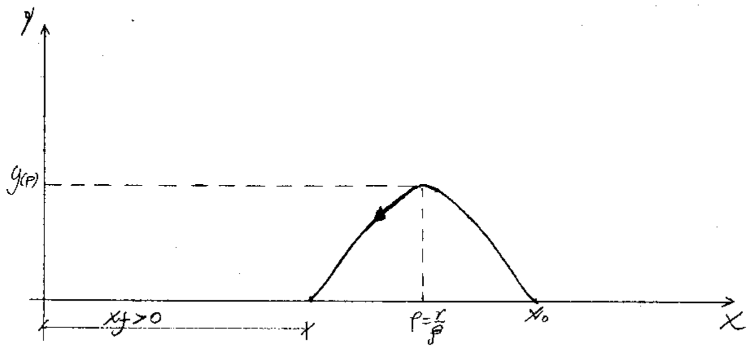
Riscrivendo

$$y(t) = y(0) + x(0) - x(t) + \rho \ln \frac{x(t)}{x(0)}$$

si ottiene y in funzione di x. Derivando y rispetto a x:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \rho \frac{x_0}{x}\frac{1}{x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \rho$$

risulta che $x = \rho$ è un punto di massimo. L’andamento tipico di y(t), x(t) al variare di t è in figura.



Dalla figura si evincono le seguenti **Proprietà**:

1. <u>Effetto soglia</u>

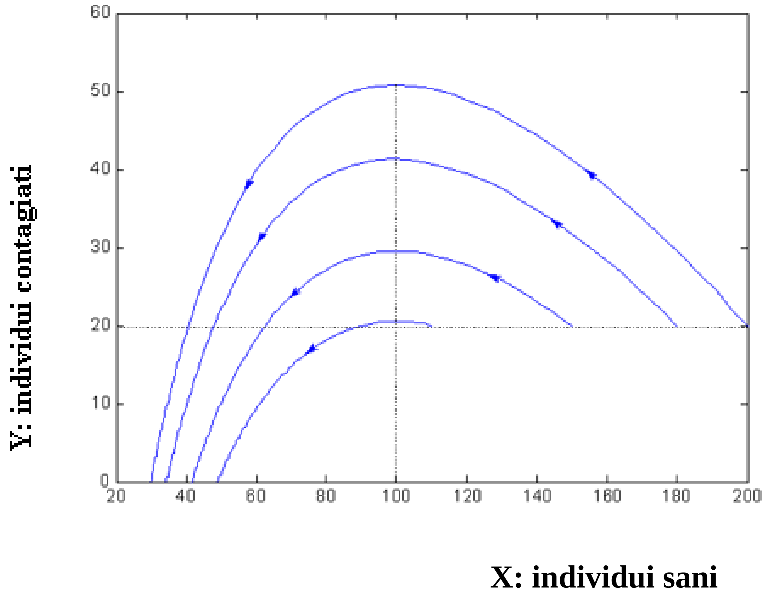
   Se x(0)>ρ l’epidemia si sviluppa, cioè y(t) cresce fino a raggiungere un massimo, per poi nuovamente diminuire fino a cessare.

   Se x(0)< ρ l’epidemia non si sviluppa.
   Perché ciò avvenga ρ deve essere maggiore della popolazione iniziale. Per ottenere ciò bisogna aumentare il coeff. γ (aumentare quindi il tasso dei rimossi isolando quanti più contagiati possibile) e diminuire il coeff. β (diminuire il contatto tra la popolazione abbassando la densità abitativa e chiudendo i luoghi pubblici dove alta è la densità abitativa).

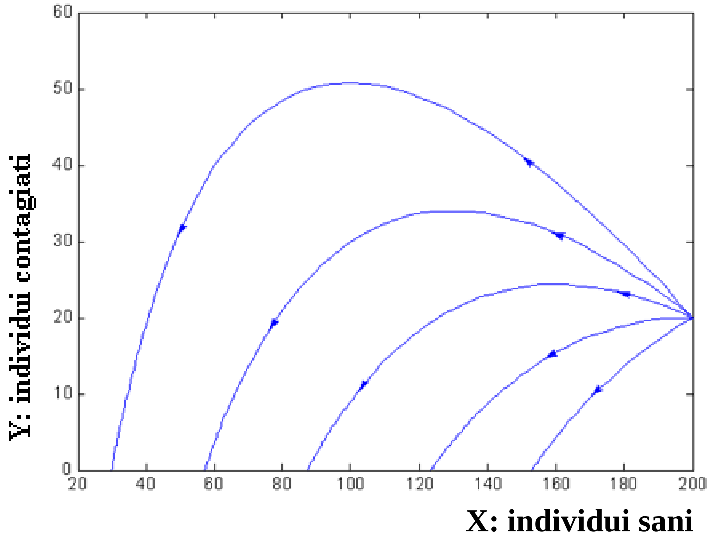
2. <u>Effetto di fuga o uscita dall’epidemia</u>

   Non è possibile che succeda x(∞)=0, ovvero che la popolazione sana dopo una epidemia sia zero perché
   y(x=0)=- ∞. La dinamica deve terminare in xf>0.

Esempi di soluzioni ottenute con diverse condizioni iniziali



La figura mostra l'andamento nel tempo delle popolazioni di individui sani e contagiati. Per tutte le curve rappresentate, la condizione iniziale y(0) sul numero di individui contagiati è la stessa ed è pari a 20; anche il coefficiente ρ è lo stesso ed è pari a 100. La condizione iniziale sul numero degli individui sani vale, partendo dalla curva con il massimo più elevato, rispettivamente 200, 180, 150 e 110. Come si può notare il valore massimo degli individui contagiati si ha in corrispondenza di 100 per tutte le curve.



Questa figura è analoga alla precedente. In questo caso la condizione iniziale sul numero d'individui sani è la stessa e vale 200 per tutte le curve come anche è la stessa la condizione iniziale sul numero d'individui contagiati che è pari a 20. In tal caso il coefficiente ρ vale, partendo dalla curva con il massimo più elevato, rispettivamente 100, 130, 160, 200, 250. Si può osservare che a valori di ρ più elevati corrisponde un valore di picco degli individui contagiati più basso. In particolare per valori di r maggiori degli individui inizialmente sani, l'epidemia non esplode: le ultime due curve rappresentate sono infatti prive di un valore di picco.

Per la sperimentazione numerica, si effettuino almeno tre tipi di prove. Nella prima mettendo a confronto i vari metodi numerici, nella seconda facendo simulazioni partendo da condizioni iniziali diverse e nella terza modificando i coefficienti.