Progetto 30 PDE:
IL BULBO PULSATILE

1. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

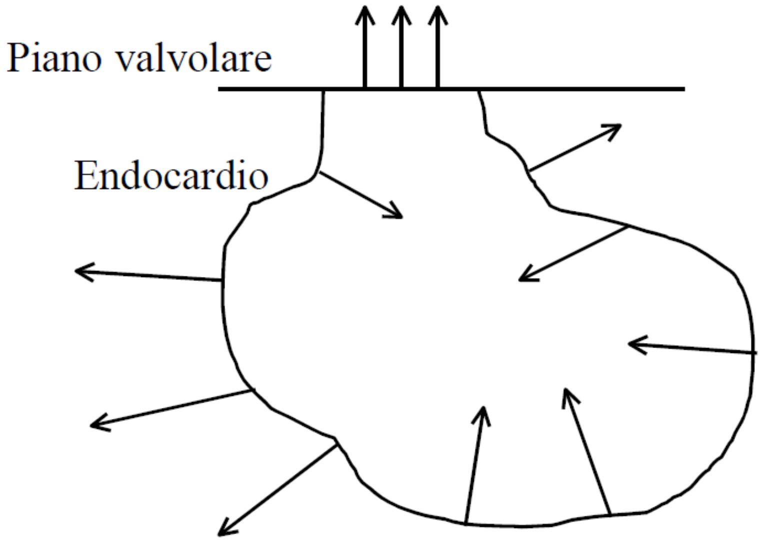

Fig. 1

Il bulbo pulsatile (fig. 1) rappresenta una schematizzazione 2D del ventricolo sinistro. Quest'ultimo è coinvolto nella circolazione sistemica, quella parte della circolazione sanguigna per la quale il sangue proveniente dal cuore e ricco di ossigeno raggiunge la periferia del corpo umano. All'interno del ventricolo, il sangue viene spinto dalle pareti dell'endocardio verso l'aorta, attraversando il piano valvolare. E ciò avviene durante la fase di sistole. In diasole invece avviene il riempimento del ventricolo. Di questa dinamica è possibile uno studio sulla parte meccanica, riguardante contrazione e rilassamento delle pareti e quindi mettendo in gioco tensioni e pressioni. In tale modello, invece, lo scopo è studiarne la *fluidodinamica*: le grandezze in gioco sono le *velocità del fluido* (il sangue) all'interno del ventricolo stesso, valutate puntualmente in uno spazio bidimensionale. E verrà introdotto inoltre un *potenziale di velocità*, un campo particolarmente utile per la descrizione fluoidodinamica. Dall'equazione di Navier-Stokes è poi possibile ricavare la *distribuzione di pressione* all'interno della camera.

2. DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Il modello matematico usato per il calcolo della velocità e del campo di velocità si ottiene dall'equazione di continuità. Nel caso bidimensionale e considerando la densità del sangue costante essa assume questa forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Dove *u* e *v* sono le componenti di velocità nelle direzioni x e y.

Si fa l'ipotesi di vorticità nulla:

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

Da cui:

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$\Phi(x,y)$ è il potenziale di velocità, un campo tale da soddifare la precedente condizione di vorticità nulla. Sostituendo nell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0 \qquad \nabla^2\Phi=0 \tag{1}$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) di tipo ellittico (di Laplace).

Condizioni al contorno per il potenziale: si impone la continuità della velocità della parete e della velocità del fluido (velocità della parete = velocità del fluido).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=v_n$$

Questa rappresenta una condizione di Neumann.

Una volta stimata la $\Phi(x,y)$, ricaviamo *u* e *v* in ogni punto del bulbo, quindi dall'equazione di Navier-Stokes è possibile calcolare il campo di pressione.

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

Stessa cosa per la componente y.

Si consideri la seguente rappresentazione schematica della geometria del problema.

La cavità ventricolare sinistra è modellata, in modo semplificativo, come un cubo di spigolo 5 cm di cui la figura (fig. 2) rappresenta una generica sezione sul piano xy (misure in m).

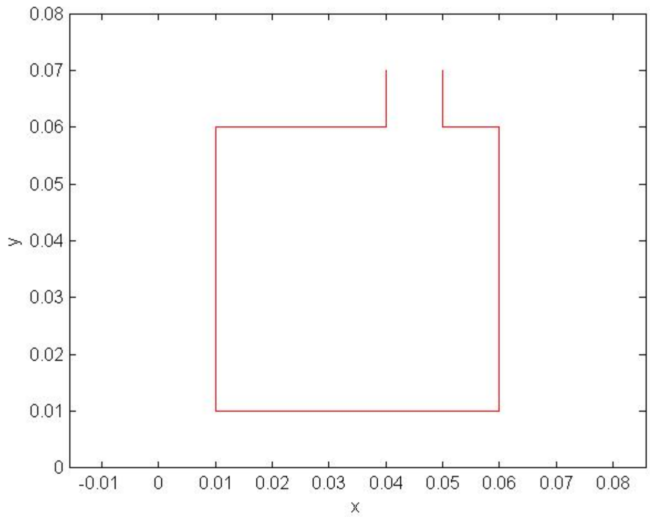

Fig. 2

Il volume ventricolare è quindi pari a 125 cm³. Le valvole mitrale (in diastole) ed aortica (in eiezione sistolica) hanno una sezione rettangolare di 1 cm (in figura) x 5 cm (profondità).
Il cuore, nel suo normale funzionamento, deve garantire una certa portata di sangue Q (500 cm³/s).
Si impone quindi tale portata e da essa si ricavano le *velocità normali alle pareti*: $v = Q / S$, dove S è la superficie della parete considerata.
Per il potenziale si crei un reticolo di integrazione con un passo $\Delta x = \Delta y = 1$mm, con M=49 punti interni per lato. Si asssume inizialmente il valore di potenziale nullo. Si risolva (1) con lo schema alle differenze finite.
Si rappresenti graficamente il campo di velocità all'interno del ventricolo, con la funzione *quiver*, che visualizza i vettori velocità come frecce con componenti *(u,v)* nel punto *(x,y)*.
Infine, risolvendo l'equazione di Navier-Stokes (2) si calcoli, trascurando l'azione delle forze di massa, la distribuzione di pressione all'interno della camera.
Si rappresenti graficamente la distribuzione di pressione.