Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica

14 Giugno 2017

Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare se si intende sostenere la prova orale del 16 giugno.

....

Griglia di Valutazione

1.(pt.2)	
2.(pt.4)	
3.(pt.6)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive dei calcoli e delle spiegazioni necessarie non saranno valutate.

Esercizio 1(pt. 2)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

Risposta:
$\forall M > 0$, $\exists\ \delta_M > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}, 3 - \delta_\epsilon < x < 3$, si ha che $f(x) < -M$.

Esercizio 2(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$

- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{x+1} - x - e^{x^2}}{\ln(1+x^3)}$$

Risposta:
Usando gli sviluppi di Taylor dati sopra, si ottiene che

$$\ln(1+x^3) = x^3 + o(x^3),$$
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3),$$
$$(x+1)^{x+1} = e^{(x+1)\ln(1+x)}.$$

Sviluppiamo dunque $(x+1)^{x+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+1)\ln(1+x) &= (x+1)\big(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)\big), \\
&= x^2 - x^3/2 + x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3) \\
&= x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
e^{(x+1)\ln(1+x)} &= 1 + \big(x + x^2/2 - x^3/6\big) + \frac{1}{2}\big(x + x^2/2 - x^3/6\big)^2 + x^3/6 + o(x^3), \\
&= 1 + x + x^2 + x^3/2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Pertanto, si ricava che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{x+1} - x - e^{x^2}}{\ln(1+x^3)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2 + x^3/2 - x - 1 - x^2 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3(pt. 6)
Sia data la funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale.

Risposta:
I. La funzione f è definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.
Si ottiene che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

siccome $\lim_{x \to 1^\pm} \ln x = 0^\pm$. Infine, applicando il teorema di De L'Hopital, si prova che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

Di conseguenza, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > e$ e $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e$, $x \neq 1$. Quindi f è strettamente crescente se $x > e$, ed è strettamente decrescente se $0 < x < e$, $x \neq 1$. Ne consegue che $x = e$ è un punto di minimo locale ($f(e) = e$).
II. Dal punto precedente si ottiene che $\mathrm{Im}\, f =]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$.
III. Per $\lambda < 0$ e $\lambda = e$ si ha un'unica radice reale dell'equazione $f(x) = \lambda$.

Esercizio 4(pt. 6)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4x^2 - 7x + 10}{(x+1)(4x^2 - 4x + 5)} dx$$

Risposta:
Dato che il discrimante di $4x^2 - 4x + 5$ è negativo, si tratta di individuare $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che:

$$\frac{-4x^2 - 7x + 10}{(x+1)(4x^2 - 4x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{4x^2 - 4x + 5}.$$

Dopo alcuni calcoli si prova che $A = 1, B = -8, C = 5$:

$$\frac{-4x^2 - 7x + 10}{(x+1)(4x^2 - 4x + 5)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-8x + 5}{4x^2 - 4x + 5}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{8x - 4}{4x^2 - 4x + 5} + \frac{1}{4x^2 - 4x + 5}.$$

e perciò

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4x^2 - 7x + 10}{(x+1)(4x^2 - 4x + 5)} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$- \int_0^{1/2} \frac{8x - 4}{4x^2 - 4x + 5}\, dx + \int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2 - 4x + 5}\, dx$$

$$= [\ln|1 + x| - \ln(4x^2 - 4x + 5) + 1/4 \arctan(x - 1/2)]_0^{1/2}$$

$$= \ln(3/2) - \ln 4 - \big(- \ln 5 - 1/4 \arctan(1/2)\big)$$

$$= \ln(15/8) + 1/4 \arctan(1/2).$$

Esercizio 5(pt.6)
Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{y}{x} + y^2 + x$$

I) Individuare il dominio $\mathcal{D}(f)$ della funzione e calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$.
Risposta:
a) La funzione $f \in C^\infty$ sul dominio $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \neq 0\}$.
Si ha che

$$\nabla f(x,y) = (-\frac{y}{x^2} + 1, -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y).$$

Calcoliamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = -\frac{y}{x^2} + 1 = 0 \\ f_y = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2 - y}{x^2} = 0 \\ \dfrac{-x + y^2 + 2y^3 x}{y^2 x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ -x + x^4 + 2x^7 = 0 \end{cases}$$

Siccome $x \neq 0$ si ottiene che

$$\begin{cases} y = x^2 \\ -1 + x^3 + 2x^6 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ponendo $t = x^3$ si ricava che $x^3 = -1, \dfrac{1}{2}$, e dunque si hanno le due soluzioni: $\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$
Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2y}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2} \\ -\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{2}{y^3} + 2 \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (1/2, -1/2) \text{ Punto di sella.}$$

$$H_f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt[3]{4}} & -\sqrt[3]{4} \\ -\sqrt[3]{4} & 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}) \text{ Punto di minimo.}$$

Infatti $\frac{4}{\sqrt[3]{4}} > 0$ e il determinante di $H_f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ è

$$\frac{40}{\sqrt[3]{4}} - (\sqrt[3]{4})^2 = \frac{40 - (\sqrt[3]{4})^3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{36}{\sqrt[3]{4}} > 0.$$

II) Il piano tangente a f nel punto $(1,1)$ è

$$z = f(1,1) + \langle \nabla f(1,1), (x-1, y-1) \rangle = 4 + \langle (0,2), (x-1, y-1) \rangle = 2y + 2.$$

$$\Longrightarrow z = 2y + 2.$$

Esercizio 6 (pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x/4 \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}.$$

e calcolare

$$\iint_A e^{y^2}\, dx\, dy.$$

Risposta:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in [0, 2],\ y^3 \leq x \leq 4y\}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\iint_A e^{y^2}\, dx\, dy &= \int_0^2 \Big(\int_{y^3}^{4y} e^{y^2}\, dx \Big)\, dy = \int_0^2 e^{y^2} [4y - y^3])\, dy \\
&= \int_0^2 \Big(4ye^{y^2} - y^3 e^{y^2} \Big)\, dy = 2 \int_0^2 2ye^{y^2}\, dy - \frac{1}{2} \int_0^2 y^2 \cdot 2ye^{y^2}\, dy \\
&= [2e^{y^2}]_0^2 - \frac{1}{2} \big([y^2 e^{y^2}]_0^2 - \int_0^2 2ye^{y^2}\, dy \big) \\
&= [2e^{y^2}]_0^2 - [\frac{1}{2} y^2 e^{y^2} - \frac{1}{2} e^{y^2}]_0^2 \\
&= (2e^4 - 2) - (2e^4 - e^4/2 + 1/2) = e^4/2 - 5/2.
\end{aligned}$$