Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica

19 Luglio 2017

Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare se si intende sostenere la prova orale del 16 giugno.

....

Griglia di Valutazione

1.(pt.2)	
2.(pt.4)	
3.(pt.6)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive dei calcoli e delle spiegazioni necessarie non saranno valutate.

Esercizio 1(pt. 2)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -7^+} f(x) = -\infty$$

Risposta:
$\forall M > 0$, $\exists\ \delta_M > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}, -7 < x < -7 + \delta_M$, si ha che $f(x) < -M$.

Esercizio 2(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x-x^2) - \sin(x-x^3) + 3/2x^2}{(e^x-1)^3}$$

Risposta:
Usando gli sviluppi di Taylor dati sopra, si ottiene che

$$(e^x - 1)^3 = x^3 + o(x^3),$$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x-x^2) &= x - x^2 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} + o(x^3), \\
&= x - x^2 - x^2/2 + x^3 + x^3/3 + o(x^3) \\
&= x - 3/2x^2/2 + 4/3x^3 + o(x^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x-x^3) &= x - x^3 - \frac{(x-x^3)^3}{6} + o(x^3), \\
&= x - x^3 - x^3/6 + o(x^3) = x - 7/6x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Pertanto, si ricava che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x-x^2) - \sin(x-x^3) + 3/2x^2}{(e^x-1)^3} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{x - 3/2x^2 + 4/3x^3 - x + 7/6x^3 + 3/2x^2 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3(pt. 6)
Sia data la funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x.$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione reale, e calcolare tale radice.

Risposta:
I. La funzione f è definita per $x > 0$.
Si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

Di conseguenza, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > e^{-1}$ e $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{-1}$. Quindi f è strettamente crescente se $x > e^{-1}$, ed è strettamente decrescente se $0 < x < e^{-1}$. Ne consegue che $x = e^{-1}$ è un punto di minimo locale ($f(e^{-1}) = -1$).
II. Dal punto precedente si ottiene che $\operatorname{Im} f = [-1, +\infty[$.
III. Per $\lambda = -1$ si ha un'unica radice reale $x = e^{-1}$ dell'equazione $f(x) = \lambda$.

Esercizio 4(pt. 6)
Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{y^3+1}{y^2-2y+2}\, dy$$

Risposta:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \frac{y^3+1}{y^2-2y+2}\, dy \\
&= \int_{-1}^{0} \big(y+2+\frac{2y-3}{y^2-2y+2}\big)\, dy = \\
&= \int_{-1}^{0} \big(y+2+\frac{2y-2}{y^2-2y+2} - \frac{1}{(y-1)^2+1}\big)\, dy = \\
&= \big[y^2/2+2y+\ln|y^2-2y+2| - \arctan(y-1)\big]_{-1}^{0} \\
&= (\ln 2 - \arctan(-1)) - (-3/2+\ln(5) - \arctan(-2)) \\
&= (\ln 2 + \pi/4) - (-3/2+\ln(5)+\arctan(2)) \\
&= \ln(2/5) + 3/2 + \pi/4 - \arctan(2).
\end{aligned}$$

Esercizio 5(pt.6)
Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y - y^2 - 10x^2 + 20$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 0)$.
Risposta:
Calcoliamo i punti stazionari:
$\begin{cases} f_x = 4x^3 + 8xy - 20x = 0 \\ f_y = 4x^2 - 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 + 2xy - 5x = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 + 4x^3 - 5x = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = 0, \pm 1$, e dunque si hanno le tre soluzioni:
$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 8y - 20 & 8x \\ 8x & -2 \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(\pm 1, 2) = \begin{pmatrix} 8 & \pm 8 \\ \pm 8 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (\pm 1, 2) \text{ Punti di sella.}$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (0, 0) \text{ Punto di massimo.}$$

II) Il piano tangente a f nel punto $(2, 0)$ è

$$z = f(2, 0) + \langle \nabla f(2, 0), (x-2, y) \rangle = -4 + \langle (-8, 16), (x-2, y) \rangle = -8x + 16y + 12.$$

$$\Longrightarrow z = -8x + 16y + 12.$$

Esercizio 6 (pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq -x^2 + 8, \quad y \leq 7x\},$$

e calcolare

$$\iint_A e^x \, dx \, dy.$$

Risposta:
Si ha che:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ x^2 \leq y \leq 7x\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [1, 2],\ x^2 \leq y \leq -x^2 + 8\}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\iint_A e^x \, dx \, dy &= \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{7x} e^x \, dy \Big) \, dx + \int_1^2 \Big(\int_{x^2}^{-x^2+8} e^x \, dy \Big) \, dx \\
&= \int_0^1 e^x \Big(\int_{x^2}^{7x} dy \Big) \, dx + \int_1^2 e^x \Big(\int_{x^2}^{-x^2+8} dy \Big) \, dx \\
&= \int_0^1 e^x (7x - x^2) \, dx + \int_1^2 e^x (-2x^2 + 8) \, dx \\
&= 7 \int_0^1 x e^x \, dx - \int_0^1 x^2 e^x \, dx - 2 \int_1^2 x^2 e^x \, dx + 8 \int_1^2 e^x \, dx \\
&= [7xe^x - 7e^x - x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x]_0^1 + [-2x^2 e^x + 4xe^x - 4e^x + 8e^x]_1^2 \\
&= [9xe^x - 9e^x - x^2 e^x]_0^1 + [-2x^2 e^x + 4xe^x + 4e^x]_1^2 \\
&= (9e - 9e - e + 9) + (-8e^2 + 8e^2 + 4e^2 + 2e - 4e - 4e) \\
&= (9 - e) + (4e^2 - 6e) = 4e^2 - 7e + 9
\end{aligned}$$

Infatti, integrando per parti si prova che:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x,$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x.$$