Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica

31 Maggio 2017

Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare se si intende sostenere la prova orale del 1 giugno.

....

Griglia di Valutazione

1.(pt.2)	
2.(pt.4)	
3.(pt.6)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive dei calcoli e delle spiegazioni necessarie non saranno valutate.

Esercizio 1(pt. 2)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x \to -7^-} f(x) = -15$$

Risposta:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta_\epsilon > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}$, $-7-\delta_\epsilon < x < -7$, si ha che $|f(x)+15| < \epsilon$.

Esercizio 2(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$

- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$

Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1 - x^2 + x^4/2}}{\sin(x^4)}$$

Risposta:
Usando gli sviluppi di Taylor dati sopra, si ottiene che
$$\sin(x^4) = x^4 + o(x^4),$$
$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2!}(x - x^3/3! + o(x^4))^2 + \frac{1}{4!}(x - x^3/3! + o(x^4))^4 + o(x^4)$$
$$= 1 - \frac{x^2 - x^4/3}{2} + \frac{x^4 + o(x^4)}{24} + o(x^4) = 1 - x^2/2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4),$$
e
$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - x^2 + x^4/2} &= \left(1 - x^2 + x^4/2\right)^{1/2} \\
&= \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^{1/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + \frac{1}{2}x^4) - \frac{1}{8}(-x^2 + \frac{1}{2}x^4)^2 + o(x^4) \\
&= 1 - x^2/2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = 1 - x^2/2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Pertanto, si ricava che
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1 - x^2 + x^4/2}}{\sin(x^4)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 + \frac{5}{24}x^4 - 1 + x^2/2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\
= &\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3(pt. 6)
Sia data la funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Risposta:
I. La funzione f è definita per $x \neq 0$.
Si ottiene che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,$$

siccome $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Infine, applicando il teorema di De L'Hopital, si prova che:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Inoltre

$$f'(x) = \Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Big) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \frac{1-x}{x}.$$

Di conseguenza, $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$ oppure $x > 1$. Quindi f è strettamente crescente se $0 < x < 1$, ed è strettamente decrescente se $x < 0$ oppure $x > 1$. Ne consegue che $x = 1$ è un punto di massimo locale ($f(1) = 1/e$).
II. Dal punto precedente si ottiene che $\mathrm{Im} f =]-\infty, 0[\cup]0, 1/e]$.
III. Per $0 < \lambda < 1/e$ si hanno 2 soluzioni reali distinte.

Esercizio 4(pt. 6)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_1^2 \frac{2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 20x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$$

Risposta:
Si tratta di una funzione razionale da ridurre di grado.
Dividendo il polinomio $2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 20x + 9$ per $x^3 - 6x^2 + 9x$ si ottiene che:

$$\frac{2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 20x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = 2x + 3 + \frac{2x^2 - 7x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}.$$

Inoltre, dato che $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x - 6x + 9) = x(x - 3)^2$, si tratta di individuare $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che:

$$\frac{2x^2 - 7x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}.$$

Dopo alcuni calcoli si prova che $A = B = 1, C = 2$:

$$\frac{2x^2 - 7x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} + \frac{2}{(x - 3)^2}.$$

e perció

$$\int_1^2 \frac{2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 20x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, dx = \int_1^2 (2x+3) \, dx + \int_1^2 \frac{1}{x - 3} \, dx + 2 \int_1^2 \frac{1}{(x - 3)^2} \, dx$$

$$= [x^2 + 3x + \ln|x| + \ln|x - 3| - \frac{2}{x - 3}]_1^2$$

$$= 4 + 6 + \ln 2 + 2 - (1 + 3 + \ln 2 + 1) = 7.$$

Esercizio 5(pt.6)
Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} - x + y^2$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(2,-2)$.
Risposta:
a) La funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$.
Si ha che $\nabla f(x,y) = (e^{x+y} - 1, e^{x+y} + 2y)$.
L'unico punto stazionario di f è $A = (1/2, -1/2)$, essendo
$\begin{cases} f_x = e^{x+y} - 1 = 0 \\ f_y = e^{x+y} + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ 1 + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \end{cases}$
Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + 2 \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(1/2,-1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (1/2,-1/2) \text{ Punto di minimo.}$$

II) Il piano tangente a f nel punto $(2,-2)$ è

$$z = f(2,-2) + \langle \nabla f(2,-2), (x-2, y+2) \rangle = 3 + \langle (0,-3), (x-2, y+2) \rangle = -3y - 3.$$

$$\Longrightarrow z = -3y - 3.$$

Esercizio 6 (pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 1 \le y \le x + 1\}.$$

e calcolare

$$\iint_A (xe^{y-1})\, dx\, dy.$$

Risposta:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [-1,2],\, x^2 - 1 \le y \le x + 1\}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\iint_A xe^{y-1}\, dx\, dy &= \int_{-1}^{2} \Big(\int_{x^2-1}^{x+1} xe^{y-1}\, dy \Big)\, dx = \int_{-1}^{2} x[e^{y-1}]_{y=x^2-1}^{y=x+1})\, dx \\
&= \int_{-1}^{2} x\Big(e^x - e^{x^2-2}\Big)\, dx = \int_{-1}^{2} xe^x\, dx - \int_{-1}^{2} xe^{x^2-2}\, dx \\
&= [(x-1)e^x]_{-1}^2 - [\frac{1}{2}e^{x^2-2}]_{-1}^2 \\
&= (e^2 + 2/e) - (\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e}) = \frac{e^2}{2} + \frac{5}{2e}.
\end{aligned}$$