Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
18 Giugno 2018
Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare se si possiede una prova scritta sufficiente svolta in precedenza........................

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.4)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	
7.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1(pt.1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = -\infty$$

Risposta:

$\forall M > 0 : \exists \delta = \delta(-6, M) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : -6 < x < -6 + \delta$

$\Longrightarrow f(x) < -M$

Esercizio 2(pt.1)
Enunciare il teorema di Weierstrass.
Risposta:

Hp: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Th: $\exists \; x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f \quad , \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f$$

Più precisamente:

$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f \, , \, \max_{[a,b]} f\right]$$

Esercizio 3(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$

Calcolare, INDICANDO SOLO IL RISULTATO FINALE:

$$\lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\ln(1+\sin x) - \ln(1+x) + x^3/6}{x^4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$= f(x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + o(x^4) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 -$$

$$- \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} - \frac{x^4}{12} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + \cancel{\frac{x^3}{6}}}{x^4}$$

$$\xrightarrow{x \to 0} \quad -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = x(2\ln^2(x) - 3\ln(x))$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Risposta:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 2\ln^2 x - 3\ln x + x\left(4\frac{1}{x}\ln x - \frac{3}{x}\right) =$$

$$= 2\ln^2 x + \ln x - 3 = 2t^2 + t - 3 \qquad (t = \ln x)$$

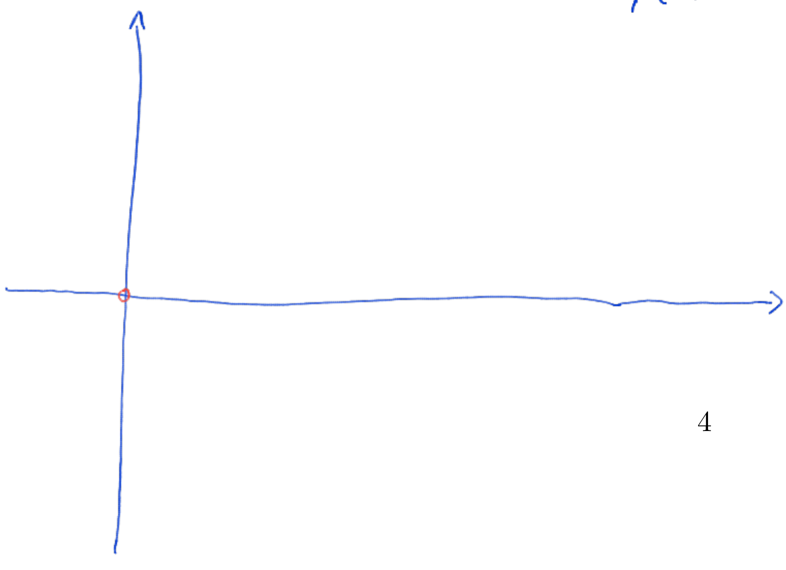
$$\Delta = 1 + 24 = 25 \qquad t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4} \begin{cases} -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} = \ln x \to x_1 = e^{-\frac{3}{2}} \\ 1 = \ln x \to x_2 = e \end{cases}$$

f': 0 $+$ $e^{-\frac{3}{2}}$ $-$ e $+$

f: 0 $\nearrow$ $e^{-\frac{3}{2}}$ $\searrow$ e $\nearrow$

$$f(e^{-\frac{3}{2}}) = e^{-\frac{3}{2}}\left(2\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) = 9e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f(e) = -e$$



Esercizio 5(pt. 6)
Calcolare:
(I) una primitiva della seguente funzione:

$$\sin^2(x)\cos^2(x);$$

(II) il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx.$$

Può essere utile ricordare che:

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t), \qquad \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t).$$

Risposta:

Esercizio 6(pt. 6)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = e^x(2x^2 - xy + y^2)$$

I) Determinare i suoi punti critici.
II) Stabilire quali siano i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
III) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1)$.
Risposta:

Esercizio 7(pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2y^2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\},$$

e calcolare

$$\int\!\!\int_A \frac{1}{4}\sqrt{x}\cos(y^2)\; dx\, dy.$$

Risposta: