Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
18 Giugno 2018
Marco Mughetti

Cognome: .....

Nome: .....

Numero di matricola: .....

Email: .....

Indicare se si possiede una prova scritta sufficiente svolta in precedenza.....

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.4)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	
7.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1(pt.1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = -\infty$$

Risposta:

$\forall M > 0 : \exists \delta = \delta(-6, M) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad -6 < x < -6 + \delta$

$\Longrightarrow \quad f(x) < -M$

Esercizio 2(pt.1)
Enunciare il teorema di Weierstrass.
Risposta:

Hp: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Th: $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f \quad , \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f$$

Più precisamente:

$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f \, , \, \max_{[a,b]} f \right]$$

Esercizio 3(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$

Calcolare, INDICANDO SOLO IL RISULTATO FINALE:

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+\sin x) - \ln(1+x) + x^3/6}{x^4}}_{= f(x)} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + o(x^4) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 -$$

$$- \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} - \frac{x^4}{12} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + \cancel{\frac{x^3}{6}}}{x^4}$$

$$\xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = x(2\ln^2(x) - 3\ln(x))$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Risposta: $\boxed{-e < \lambda \leq 0 \ \vee \ \lambda = 9e^{-\frac{3}{2}}}$

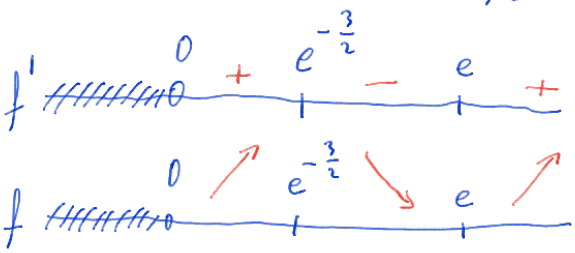
$D(f) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2\ln^2 x - 3\ln x + x\left(4\frac{1}{x}\ln x - \frac{3}{x}\right) =$

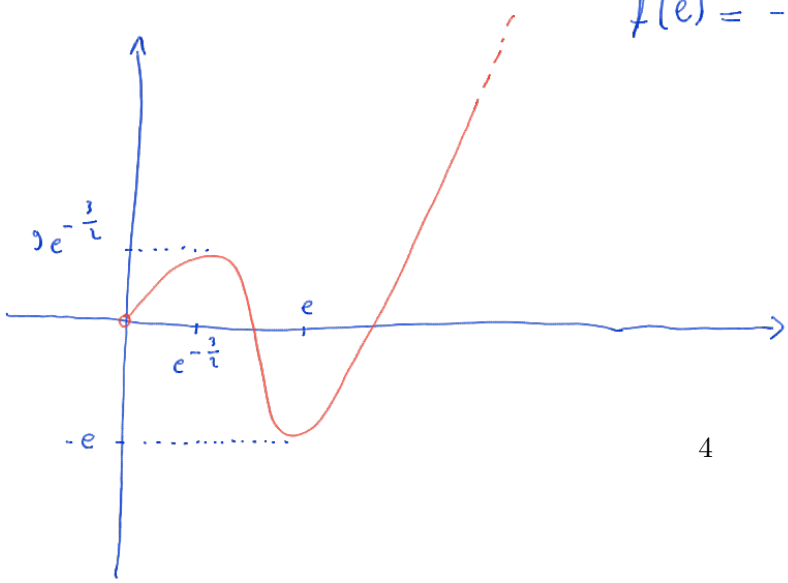
$= 2\ln^2 x + \ln x - 3 = 2t^2 + t - 3 \qquad (t = \ln x)$

$\Delta = 1 + 24 = 25 \qquad t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} = \ln x \to x_1 = e^{-\frac{3}{2}} \\ 1 = \ln x \to x_2 = e \end{cases}$



$f(e^{-\frac{3}{2}}) = e^{-\frac{3}{2}}\left(2\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) = 9e^{-\frac{3}{2}}$

$f(e) = -e$



Esercizio 5(pt. 6)
Calcolare:
(I) una primitiva della seguente funzione:

$$\sin^2(x)\cos^2(x);$$

(II) il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx.$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

Può essere utile ricordare che:

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t), \qquad \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t).$$

$$= 1 - 2\sin^2(t)$$

Risposta:

$$\int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int 1\,dx - \int \cos(4x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right) = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx = \left[\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 6(pt. 6)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = e^x(2x^2 - xy + y^2)$$

I) Determinare i suoi punti critici.
II) Stabilire quali siano i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
III) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1)$.
Risposta:

$$\begin{cases} f'_x = e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y) = 0 \\ f'_y = e^x(-x + 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y^2 - 2y^2 + y^2 + 8y - y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} 7y^2 + 7y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 0 \\ y = -1 \end{matrix} \qquad (0,0),\ (-2,-1)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x(8x - 2y + 4 + 2x^2 - xy + y^2) & e^x(-x + 2y - 1) \\ e^x(-x + 2y - 1) & 2e^x \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 4 > 0 \qquad \det H_f(0,0) = 8 - 1 = 7 > 0 \longrightarrow (0,0) \text{ P. DI MINIMO LOCALE}$$

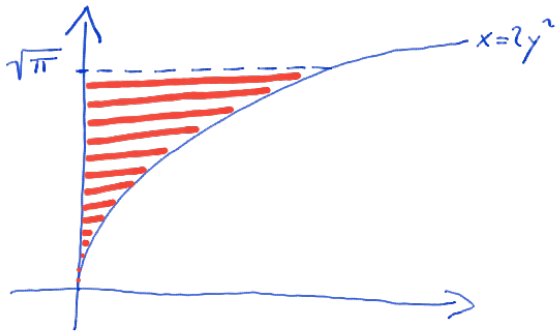
$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -3e^{-2} & -e^{-2} \\ -e^{-2} & 2e^{-2} \end{pmatrix} \quad \det H_f(-2,-1) = -7e^{-4} < 0$$

$$\longrightarrow (-2,-1) \text{ P. DI SELLA}$$

III

$$z = f(1,1) + \left\langle \nabla f(1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 2e + \left\langle \begin{pmatrix} 5e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle = -4e + 5ex + ey$$



Esercizio 7(pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 2y^2, \quad 0 \le y \le \sqrt{\pi}\},$$

e calcolare

$$\iint_A \frac{1}{4}\sqrt{x}\cos(y^2)\, dx\, dy.$$

Risposta:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{2y^2} \frac{1}{4}\sqrt{x}\cos(y^2)\, dx \right) dy = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(y^2) \left[\int_0^{2y^2} \sqrt{x}\, dx \right] dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(y^2) \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2y^2} dy = \frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(y^2)\cdot 2\sqrt{2}\, y^3\, dy =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\sqrt{\pi}} y^3 \cos(y^2)\, dy = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^{\sqrt{\pi}} y^2 \cdot 2y \cos(y^2)\, dy =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left[y^2 \sin(y^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} 2y \sin(y^2)\, dy \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left[y^2 \sin(y^2) + \cos(y^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\pi \cdot \sin \pi + \cos(\pi) - \cos 0 \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (-2) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$