Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
1 Giugno 2018
Marco Mughetti

Cognome: .....

Nome: .....

Numero di matricola: .....

Email: .....

Indicare se sono state eventualmente superate entrambe le prove parziali:.....

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.4)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	
7.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1(pt.1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -8$$

Risposta:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(-2, \varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad -\delta - 2 < x < -2$

$\Longrightarrow \quad |f(x) + 8| < \varepsilon$

Esercizio 2(pt.1)
Enunciare il teorema della media integrale per la funzione $f : [2, 8] \longrightarrow \mathbf{R}$.
Risposta:

$H_p : \quad f : [2, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$Th : \quad \exists c \in [2, 8] : \quad \frac{1}{6} \int_2^8 f(x)\, dx = f(c)$

Esercizio 3(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$
- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)$
- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$

Calcolare, INDICANDO SOLO IL RISULTATO FINALE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x^2 - x^4} - e^{1-\cos x}}{x^4} = \dots -\frac{2}{3} \dots$$

$$1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) = \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

$$e^{1-\cos x} = e^{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} = 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o(x^4) =$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{8}+o(x^4) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x^2-x^4} = \left(1+\frac{3}{2}x^2-x^4\right)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^2-x^4\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\left(\frac{3}{2}x^2-x^4\right)^2+o(x^4)$$

$$= 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{4}x^4+o(x^4)$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x^2-x^4}-e^{1-\cos x}}{x^4} = \frac{\cancel{1}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{7}{12}x^4-\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4} =$$

$$= -\frac{9}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4} \longrightarrow -\frac{9}{12} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Risposta: $D(f) = \mathbb{R}$

$-3e^3 < \lambda \leq 0$

$\vee \quad \lambda = \frac{7}{e^2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2 - 3x - 3)e^x = (x^2 - x - 6)e^x$

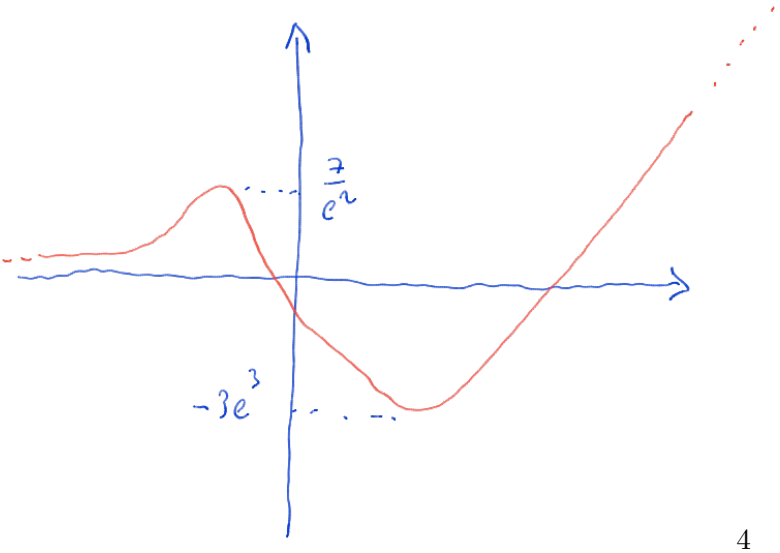
$x^2 - x - 6 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$

f': $+$ $\quad -2 \quad$ $-$ $\quad 3 \quad$ $+$

f: $\nearrow \quad -2 \quad \searrow \quad 3 \quad \nearrow$

$f(-2) = (4+6-3)e^{-2} = \frac{7}{e^2}$

$f(3) = (9-9-3)e^3 = -3e^3$



Esercizio 5(pt. 6)
Calcolare:
(I) una primitiva della seguente funzione:

$$\frac{2-\cancel{5}x}{(x-4)(x^2-3x+3)};$$

(II) il valore del seguente integrale

$$\int_0^3 \frac{2-\cancel{5}x}{(x-4)(x^2-3x+3)}\,dx.$$

Risposta:

$x^2-3x+3=0 \qquad \Delta = 9-12<0$

$$f(x)=\frac{2-4x}{(x-4)(x^2-3x+3)} = \frac{A}{x-4}+\frac{Bx+C}{x^2-3x+3} = \frac{Ax^2-3Ax+3A+Bx^2-4Bx+Cx-4C}{(x-4)(x^2-3x+3)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(C-3A-4B)x+3A-4C}{(x-4)(x^2-3x+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-3A-4B=-4 \\ 3A-4C=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ C-3A+4A=-4 \\ \\ \end{cases} \quad \begin{cases} \\ C=-4-A \\ 3A+2C+4A=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2 \\ C=-2 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$\frac{2-4x}{(x-4)(x^2-3x+3)} = \frac{-2}{x-4}+\frac{2x-3}{x^2-3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x+3}\,dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}\right)+C$$

$$\int f(x)\,dx = -2\ln|x-4|+\ln(x^2-3x+3)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}\right)+C$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \left[-2\ln|x-4|+\ln(x^2-3x+3)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}\right)\right]_0^3 =$$

$$= \ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\sqrt{3}+2\ln 4-\ln 3-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg(-\sqrt{3}) =$$

$$= 4\ln 2+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctg\sqrt{3} = 4\ln 2+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Esercizio 6(pt. 6)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = e^x(x-1)y + y^2$$

I) Determinare i suoi punti critici.
II) Stabilire quali siano i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
III) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(2, 0)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.
Risposta:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x-1)y + e^x y = xye^x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(x-1) + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \begin{cases} x = 0 \\ -1 + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\beta \begin{cases} y = 0 \\ e^x(1-x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} ye^x + xye^x & xe^x \\ xe^x & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \text{ punto di minimo locale}$$

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow (1, 0) \text{ punto di sella}$$

$$\nabla f(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ e^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{e^2}{2}$$

Esercizio 7(pt. 6)
Disegnare l'insieme

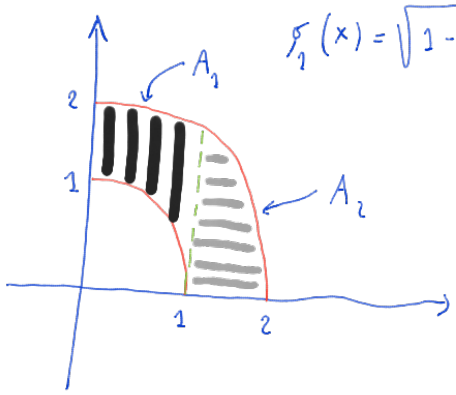
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x, 0 \le y\},$$

$f_2(x) = \sqrt{4-x^2}$

$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

e calcolare

$$\iint_A xy\, dx\, dy.$$



Risposta:

$$\iint_A xy\,dx\,dy = \iint_{A_1} xy\,dx\,dy + \iint_{A_2} xy\,dx\,dy$$

$$\iint_{A_1} xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\left(4-\cancel{x^2}-1+\cancel{x^2}\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\iint_{A_2} xy\,dx\,dy = \int_1^2 x\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\right)dx = \int_1^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x}{2}(4-x^2)\,dx = \int_1^2\left(2x - \frac{x^3}{2}\right)dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^4}{8}\right]_1^2 = 2 - \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{9}{8}$$

$$\iint_A = \iint_{A_1} + \iint_{A_2} = \frac{3}{4} + \frac{9}{8} = \frac{15}{8}$$