Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
1 Giugno 2018
Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare se sono state eventualmente superate entrambe le prove parziali:........................

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.4)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	
7.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1(pt.1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -8$$

Risposta:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(-2, \varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} : \; -\delta - 2 < x < -2$

$\Longrightarrow \quad |f(x) + 8| < \varepsilon$

Esercizio 2(pt.1)
Enunciare il teorema della media integrale per la funzione $f : [2, 8] \longrightarrow \mathbf{R}$.
Risposta:

Hp: $f : [2, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Th:

$$\min_{[2,8]} f \leq \frac{1}{6} \int_2^8 f(x)\, dx \leq \max_{[2,8]} f$$

Esercizio 3(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$
- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)$
- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$

Calcolare, INDICANDO SOLO IL RISULTATO FINALE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x^2 - x^4} - e^{1-\cos x}}{x^4} = -\frac{2}{3}$$

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{1-\cos x} = e^{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} =$$
$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) =$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\sqrt[3]{1 + \frac{3}{2}x^2 - x^4} = \left(1 + \frac{3}{2}x^2 - x^4\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^2 - x^4\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\left(\frac{3}{2}x^2 - x^4\right)^2 + o(x^4)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{4}x^4 + o(x^4)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x^2 - x^4} - e^{1-\cos x}}{x^4} = \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{7}{12}x^4 - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= -\frac{9}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4} \longrightarrow -\frac{9}{12} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Risposta:

Esercizio 5(pt. 6)
Calcolare:
(I) una primitiva della seguente funzione:

$$\frac{2-5x}{(x-4)(x^2-3x+3)};$$

(II) il valore del seguente integrale

$$\int_0^3 \frac{2-5x}{(x-4)(x^2-3x+3)}\, dx.$$

Risposta:

Esercizio 6(pt. 6)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = e^x(x-1)y + y^2$$

I) Determinare i suoi punti critici.
II) Stabilire quali siano i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
III) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(2, 0)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.
Risposta:

Esercizio 7(pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq x, 0 \leq y\},$$

e calcolare

$$\int\int_A xy \, dx \, dy.$$

Risposta: