Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica
20 Luglio 2018
Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare se si possiede una prova scritta sufficiente svolta in precedenza........................

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.4)	
4.(pt.6)	
5.(pt.6)	
6.(pt.6)	
7.(pt.6)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1(pt.1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Risposta:

$\forall M > 0 : \exists \delta = \delta(M) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad x < -\delta$

$\Longrightarrow \quad f(x) < -M$

Esercizio 2(pt.1)
Enunciare il teorema degli zeri di una funzione continua.
Risposta:

$H_p : \quad f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$Th : \quad \exists\, c \in \,]a, b[\; : \quad f(c) = 0$

Esercizio 3(pt. 4)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + o(t^7)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$

Calcolare, INDICANDO SOLO IL RISULTATO FINALE:

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+\tan x) - \ln(1+x) - \frac{1}{3}\ln(1+x^3)}{x^4}}_{f(x)} = \ldots\ldots -\frac{1}{3}$$

$$\ln(1+\tan x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x^3) = x^3 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{2}{3}x^3} - \frac{7}{12}x^4 - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{x^4}{4} - \cancel{\frac{x^3}{3}} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2}$$

I. Disegnare il suo grafico.

II. Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha una sola soluzione reale.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

Risposta: $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 2\}$, $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}(x-2) - e^{\frac{1}{x}}}{(x-2)^2} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{(x-2)^2}\left(\frac{x-2}{x^2} + 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(x-2)^2} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2}$$

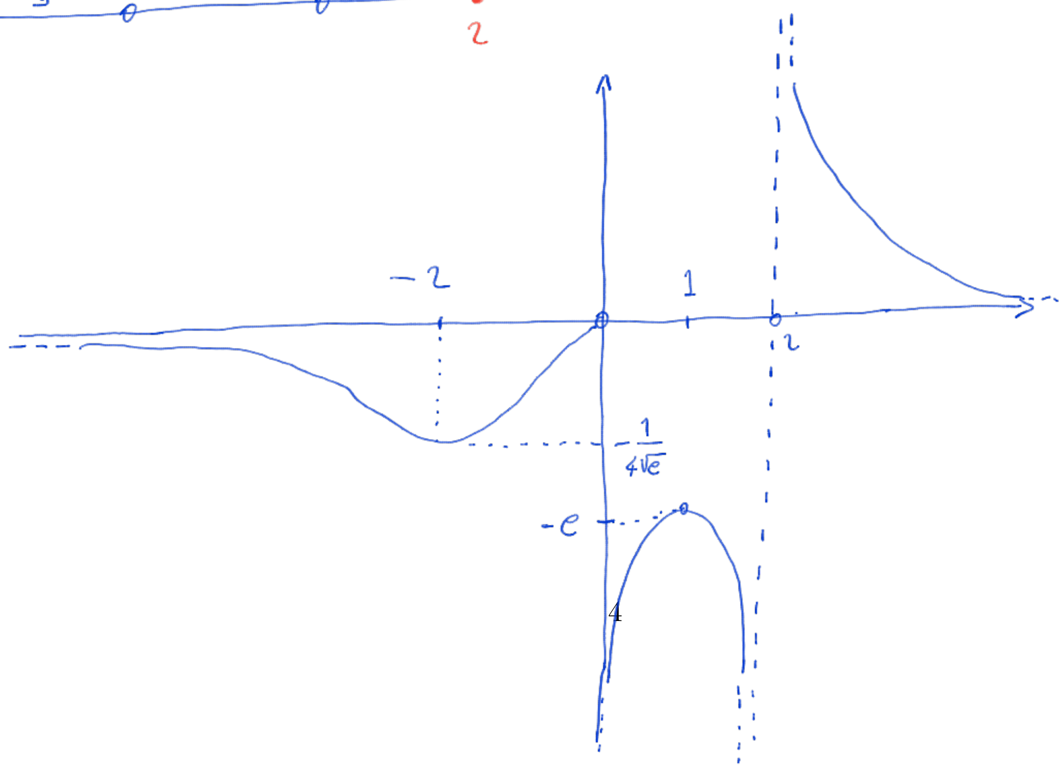
$$f'(x) = 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-2} \begin{cases} +1 \\ -2 \end{cases}$$

$f(1) = -e$ P. DI MAX

$$f(-2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{-4} = -\frac{1}{4\sqrt{e}}$$ P. DI MIN.

f': $-$ $\;(-2)\;$ $+$ $\;(1)\;$ $-$ $\;(2)\;$ $-$

f: $\searrow$ $\;(-2)\;$ $\nearrow$ $\;(1)\;$ $\searrow$ $\;(2)\;$ $\searrow$



Esercizio 5(pt. 6)
Calcolare:
(I) una primitiva della seguente funzione:

$$(x^2 - x)\cos(x);$$

(II) il valore del seguente integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - x)\cos(x)\, dx.$$

Risposta:

$$\int (x^2 - x)\cos x\, dx = (x^2 - x)\sin x - \int (2x-1)\sin x\, dx$$

$$= (x^2 - x)\sin x + \left[(2x-1)\cos x - \int 2\cos x\, dx\right] =$$

$$= (x^2 - x - 2)\sin x + (2x-1)\cos x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x)\cos x\, dx = \Big[(x^2 - x - 2)\sin x + (2x-1)\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} - 2 - \left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} + 2\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 4$$

Esercizio 6(pt. 6)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{4}y\big(9(y+2)^2 - x^2\big)$$

I) Determinare i suoi punti critici.
II) Stabilire quali siano i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
III) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(4,0)$.
Risposta:

$$f_x = \frac{1}{4}y\cdot(-2x) = -\frac{1}{2}xy = 0 \quad \begin{cases} x=0 \ (\mathrm{I}) \\ y=0 \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$f_y = \frac{1}{4}\left(9(y+2)^2 - x^2\right) + \frac{1}{4}y\cdot 18(y+2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(9y^2 + 36y + 36 - x^2 + 18y^2 + 36y\right) = \frac{9}{4}\left(3y^2 + 8y + 4 - \frac{x^2}{9}\right) = 0$$

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x=0 \\ 3y^2+8y+4=0 \to y_{1,2} = \dfrac{-8\pm 4}{6} \begin{cases} -2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 6 \end{cases}$$

$(0,-2)$ $(0,-\frac{2}{3})$
$(-6,0)$ $(6,0)$

$$H_f = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} & -\frac{x}{2} \\ -\frac{x}{2} & \frac{27}{2}y+18 \end{pmatrix}$$

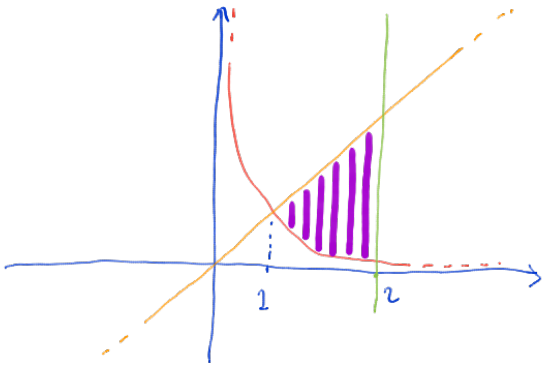
$$H_f(0,-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$
SELLA

$$H_f\left(0,-\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$
MIN. LOCALE

$$H_f(\mp 6,0) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 3 \\ \mp 3 & 18 \end{pmatrix}$$
$(\mp 6, 0)$ P. DI SELLA

$$z = \left\langle \nabla f(4,0), \begin{pmatrix} x-4 \\ y-0 \end{pmatrix} \right\rangle + f(4,0)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-4 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + 0 = 5y \longrightarrow z = 5y$$



$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \quad x^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7(pt. 6)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq y \leq x \leq 2\},$$

e calcolare

$$\iint_A \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy.$$

Risposta:

$$\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy \right) dx = \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(-x + x^3 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{4}{2} + \frac{16}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$